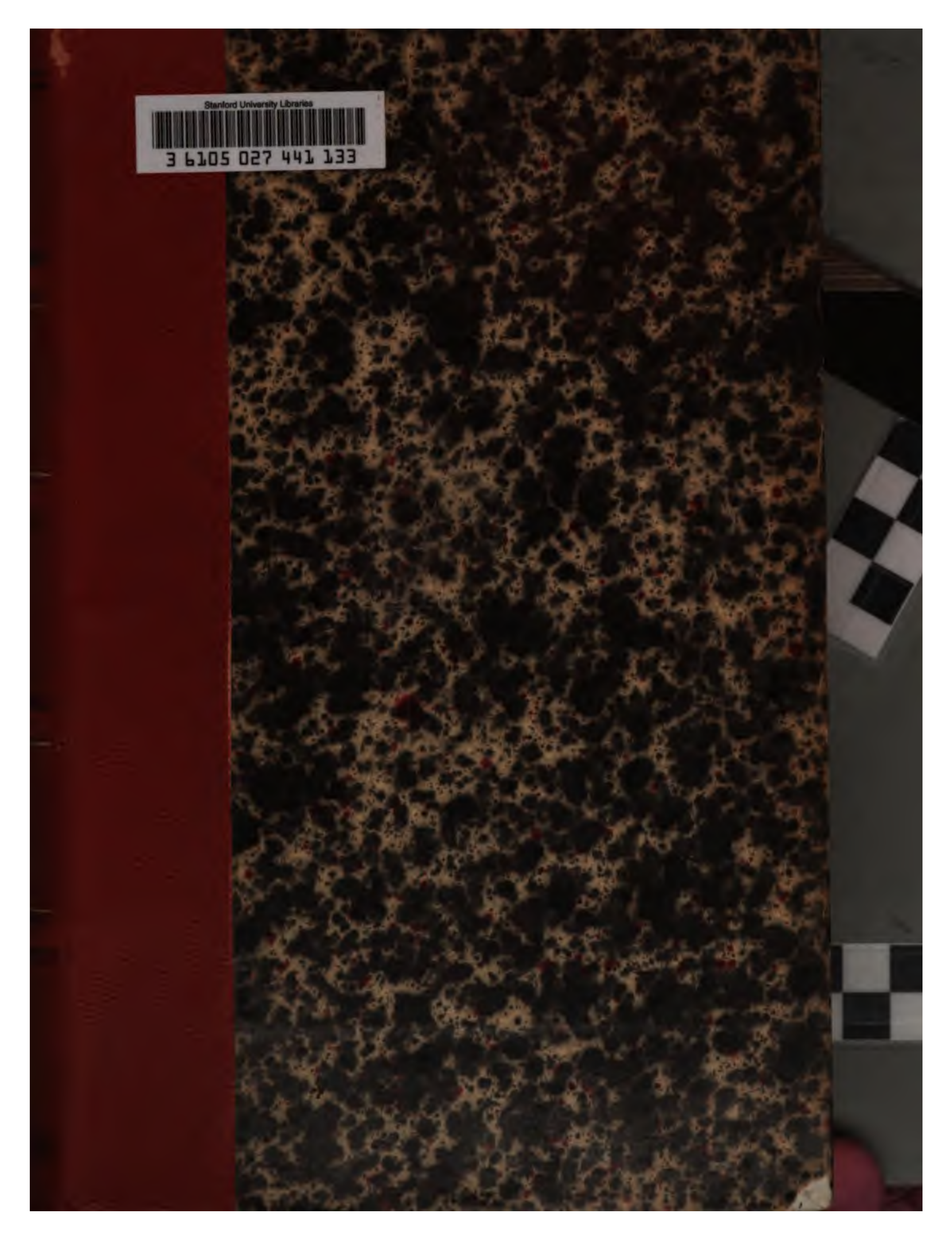
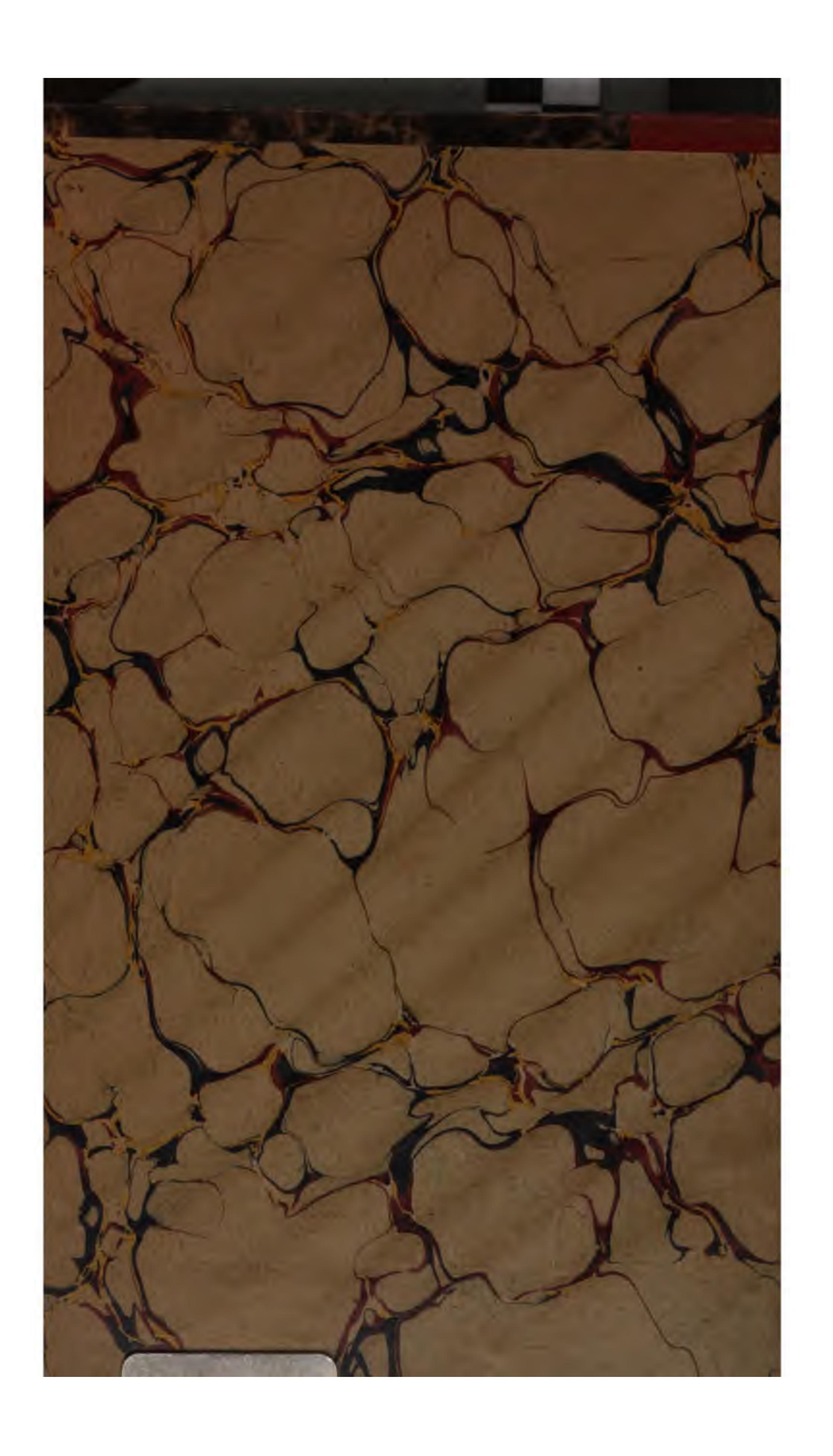










BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES AUGUSTINS, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
AVEC LA COLLABORATION
DE MM. ANDRÉ, LESPIAULT, PAINVIN ET RADAU,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

TOME CINQUIÈME. — ANNÉE 1873.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1873

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. CHASLES, *président*.

BERTRAND.

PUISEUX.

SERRET.

N...,

LISTE DES COLLABORATEURS DU BULLETIN

PENDANT LES TROIS PREMIÈRES ANNÉES.

MM. **Baillaud**, agrégé de l'Université.
Battaglini, professeur à l'Université de Rome.
Beltrami, professeur à l'Université de Bologne.
Bertrand (J.), membre de l'Institut.
Bonnet (O.), membre de l'Institut.
Bouquet, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.
Clebsch, professeur à l'Université de Goettingue.
Dewulf, commandant du Génie aux îles d'Hyères.
Ermakof, à Kazan.
Hermite, membre de l'Institut.
Imschenetsky, professeur à l'Université de Kharkof.
Klein, professeur à l'Université d'Erlangen.
Laguerre, répétiteur à l'École Polytechnique.
Lampe, professeur à Berlin.
Laurent (H.), répétiteur à l'École Polytechnique.
Lie, professeur à l'Université de Christiania.
Lindelöf, professeur à l'Université de Helsingfors.
Lipschitz, professeur à l'Université de Bonn.
Mannheim, professeur à l'École Polytechnique.
Padova, professeur à Pise.
Pellet, professeur au Lycée de Bourg.
Potocki, licencié ès Sciences, à Bordeaux.
Resal, membre de l'Institut.
Serret (J.-A.), membre de l'Institut.
Simon (Ch.), professeur au Lycée Louis-le-Grand.
Tilly (de), capitaine d'Artillerie, à Bruxelles.
Tisserand, directeur de l'Observatoire de Toulouse.
Zeuthen, professeur à l'Université de Copenhague.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

THOMSON (sir William), Fellow of St. Peter's College, Cambridge, and Professor of Natural Philosophy in the University of Glasgow. — REPRINT OF PAPERS ON ELECTROSTATICS AND MAGNETISM. — London, Macmillan & Co., 1872. — In-8°, 592 p., avec planches et figures dans le texte. Prix : 24 fr. 25.

M. Thomson a eu l'heureuse idée de réimprimer ses nombreux Mémoires, dont quelques-uns sont d'une date récente, et qui sont disséminés dans une douzaine de Recueils scientifiques. Si la multiplicité des publications consacrées aux sciences offre aux auteurs des moyens précieux de faire connaître leurs travaux, il faut avouer qu'elle présente aussi des inconvénients très-grands, et les personnes qui désirent se tenir au courant ont fort à faire aujourd'hui, et manquent le plus souvent de guide et des indications nécessaires. Il serait à désirer qu'on pût constituer dans les grandes villes, et à Paris en particulier, des salles de lecture où l'on mettrait à la disposition des personnes studieuses les nombreuses publications qu'elles ne peuvent se procurer personnellement, et qu'on ne leur communique d'ailleurs, dans les bibliothèques des établissements publics, que bien longtemps après la réception, quand les volumes sont reliés. Quoi qu'il en soit, nous devons savoir gré à M. Thomson de l'attention qu'il a eue pour les savants, en réunissant tous ses Mémoires, et nous allons donner la liste de ceux que contient le Volume que nous avons sous les yeux.

I. On the uniform Motion of Heat in homogeneous solid bodies, and its connexion with the mathematical Theory of Electricity.

II. On the mathematical Theory of Electricity in Equilibrium.

III. On the electrostatical Capacity of a Leyden Phial and of a telegraph wire insulated in the axis of a cylindrical conducting sheath.

IV and V. On the mathematical Theory of Electricity in Equilibrium (2[e] *et* 3[e] *Partie*).

VI. On the mutual attraction or repulsion between two electrified spherical conductors.

VII. On the attractions of conducting and non-conducting electrified bodies.

VIII. Demonstration of a fundamental proposition in the mechanical Theory of Electricity.

IX. Note on induced Magnetism in a plate.

X. Sur une propriété de la couche électrique en équilibre à la surface d'un corps conducteur, par M. Liouville. Note sur ce Mémoire.

XI. On certain definite integrals suggested by problems in the Theory of Electricity.

XII. Propositions in the Theory of Attraction.

XIII. Theorems with reference to the solution of certain partial differential equations.

XIV. Electrical images.

XV. Determination of the distribution of Electricity on a circular segment of plane or spherical conducting surface, under any given influence.

XVI. Atmospheric Electricity.

XVII. Sound produced by the discharge of a condenser.

XVIII. Measurement of the electrostatic force produced by a Daniell's battery.

XIX. Measurement of the electromotive force required to produce a spark in air between parallel metal plates at different distances.

XX. Report on electrometers and electrostatic measurements.

XXI. Atmospheric Electricity.

XXII. New proof of contact Electricity.

XXIII. Electrophoric apparatus and illustrations of Voltaic Theory.

XXIV. On mathematical Theory of Magnetism.

XXV. On the potential of a closed galvanic circuit of any form.

XXVI. On the mechanical values of distribution of matter and of magnets.

XXVII. Hydro-kinetic analogy.

XXVIII. Inverse Problems.

XXIX. On the electric Currents by wich the phænomena of terrestrial magnetism may be produced.

XXX. On the Theory of magnetic Induction in crystalline and non-crystalline substances.

XXXI. Magnetic permeability and analogues in electrostatic Induction, conduction of heat and fluid motion.

XXXII. Diagrams of lines of force, to illustrate magnetic permeability.

XXXIII. On the forces experienced by small spheres under magnetic influence; and on some of the phænomena presented by diamagnetic substances.

XXXIV. Remarks on the forces experienced by inductively magnetised ferromagnetic or diamagnetic non-crystalline substances.

XXXV. Abstract of two Communications.

XXXVI. Remarques sur les oscillations d'aiguilles non cristallisées de faible pouvoir inductif paramagnétique et diamagnétique, etc.

XXXVII. Elementary demonstration of propositions in the Theory of magnetic force.

XXXVIII. Correspondence with Professor Tyndall.

XXXIX. Inductive susceptibility of a polar Magnet.

XL. General Problem of magnetic Induction.

XLI. Hydrokinetic analogy for the magnetic influence of an ideal extreme diamagnetic.

XLII. General hydrokinetic analogy for induced magnetism.

Plusieurs de ces Mémoires sont enrichis de Notes et d'Additions. Le Volume est suivi d'un Index, qui facilite les recherches. Le travail nouveau que vient de s'imposer M. Thomson n'empêchera pas, nous l'espérons, cet éminent géomètre de nous donner, avec M. Tait, le second Volume, si impatiemment attendu, du beau *Traité de Philosophie naturelle,* dont la publication a été commencée par ces auteurs. G. D.

CREMONA (L.), professore nel R. Istituto Tecnico superiore di Milano. — ELEMENTI DI GEOMETRIA PROJETTIVA. Ad uso degli Istituti Tecnici del Regno d'Italia. — Roma-Torino-Milano-Firenze, G.-B. Paravia e Comp.; 1873. — Vol. I, texte et atlas; 2 fasc. gr. in-8°. — Prix : 3 fr. 50 c. (4 fr. pour la France, port compris).

La Science qui porte les différents noms de *Géométrie supérieure*, de *Géométrie moderne*, de *Géométrie projective*, etc., n'est pas une branche spéciale de la Géométrie qui ait égard seulement à certaines classes de figures; mais elle comprend toute la Géométrie. En effet, ce qui lui est particulier, c'est qu'elle s'occupe des propriétés projectives; or toute propriété géométrique non projective n'est qu'un cas particulier d'une propriété projective : donc les théorèmes qui indiquent des propriétés non projectives peuvent être regardés comme des corollaires de ceux qui indiquent des propriétés projectives, ce que fait la Géométrie projective.

Cette Science s'est organisée de plusieurs manières très-différentes entre elles. On sait que Poncelet, pour trouver les propositions générales qui indiquent les propriétés projectives des figures, commençait par étudier les figures particulières, et qu'il généralisait ensuite, au moyen de projections centrales, les résultats obtenus; il déduisait les propriétés des coniques, des figures homologiques, etc., de celles des cercles, des figures homothétiques, etc. Gergonne, dont le but principal était d'établir *a priori* le principe de dualité, conçut plus tard l'idée d'une déduction plus directe d'une partie essentielle des propriétés projectives, savoir : des propriétés descriptives. Comme ces propriétés ne dépendent que de la situation des parties des figures, et non pas de leurs grandeurs, il croyait aussi que leur démonstration pouvait être indépendante de toute relation métrique, et il proposa de construire une Géométrie avec les seules propriétés descriptives (*Géométrie de situation*). En commençant lui-même cette construction, il la mena assez loin pour montrer que son idée était réalisable (¹); qu'il fallait seulement abandonner la séparation des Géométries à deux et à trois

(¹) *Essai sur un nouveau mode de démonstration des propriétés de l'étendue*, par M. BOBILLIER (*Annales de Mathématiques*, t. XVIII, 1827-1828, p. 320-339 et p. 350-367).
Considérations philosophiques sur les propriétés de l'étendue qui ne dépendent pas des relations métriques, par M. GERGONNE (*Annales de Mathématiques*, t. XVI, 1825-1826, p. 209-232).

dimensions, et profiter ainsi, dans les recherches sur la Géométrie plane, des opérations dans l'espace.

En continuant la réalisation de ce plan de Gergonne, on peut former un système où l'on parvient, quant à la situation, immédiatement aux propriétés projectives et générales, sans commencer par des cas particuliers. Mais comme cette continuation se faisait attendre, le même but fut atteint plus tôt, par d'autres voies, dans les systèmes analytiques de Möbius et de Plücker, dont nous n'avons pas à nous occuper ici, et dans les systèmes géométriques (¹) de Steiner et de Chasles, qui comprennent toutes les propriétés projectives, tant descriptives que métriques. On sait que la base de ces systèmes, qui, malgré l'indépendance des travaux de ces deux grands géomètres, se rencontrent sur les points les plus essentiels, est, à côté des propriétés descriptives fondamentales du point, de la droite et du plan, *le rapport anharmonique*, grâce auquel on peut démontrer les propriétés projectives planes, sans avoir recours à des considérations stéréométriques. Seulement, en 1847, v. Staudt, professeur à Erlangen, publia un système de *Géométrie de situation* (²), en prenant pour point de départ les mêmes principes, tout à fait élémentaires, que Gergonne.

Nous n'avons pas à nous occuper ici de l'importance scientifique et de la beauté de chacun de ces systèmes, mais à examiner lequel d'entre eux est le plus propre à initier les jeunes gens à la Géométrie projective : celui de Poncelet, celui de Chasles et de Steiner, ou celui de v. Staudt? La réponse sera sans doute différente dans différentes conditions; mais ici il s'agit particulièrement d'un cours destiné à donner aux élèves ingénieurs des Écoles techniques une base théorique de leurs études plus pratiques, et notamment à les préparer à l'étude de la *Statique graphique*. Alors la *Géométrie de situation* a de grands avantages. A ces jeunes gens qui cultivent en même temps la Géométrie descriptive ou qui ont étudié cette

---

(¹) Steiner : *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten*, 1832. — *Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften.* Publié, d'après les leçons et les manuscrits de *Steiner*, par *H. Schröter*, 1867.

Chasles : *Aperçu historique, etc.*, dont une partie avait été présentée à l'Académie de Bruxelles, en 1830, et qui parut en 1836. — *Traité de Géométrie supérieure*, 1852. — *Traité des Sections coniques*, 1865.

(²) *Geometrie der Lage*, Nürnberg, 1847; suivie par *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 1856-1860.

science, et qui s'exercent à dessiner, les figures et les conceptions stéréométriques doivent être assez familières pour leur faire comprendre sans difficulté les démonstrations descriptives, et, réciproquement, ils ont besoin, pour leurs études et pour leurs futurs travaux, de se familiariser encore plus avec ces conceptions. Aussi le fondateur de la Statique graphique, M. Culmann, renvoie-t-il, dans son excellent Traité, à la *Géométrie de situation* de v. Staudt, et M. Reye, dans ses excellentes Leçons ([1]) de Géométrie projective faites aux élèves ingénieurs à Zürich, se sert-il aussi de démonstrations purement descriptives.

Toutefois, dans l'instruction, on ne doit pas pousser trop loin une abstraction, et nous ne croyons pas qu'il soit utile, dans le cas qui nous occupe, de se refuser absolument l'usage de relations métriques. Dans la Géométrie de situation, on définit les séries homographiques ou projectives de la manière suivante : Deux séries (avec ∞^1 éléments) sont projectives, si leurs éléments se correspondent un à un, et si à quatre éléments harmoniques de l'une correspondent quatre éléments harmoniques de l'autre. Cette définition ne renferme pas en elle une détermination de l'élément de l'une qui correspond à un élément arbitraire de l'autre. Or on sait que cette détermination est exprimée d'une manière assez simple par l'égalité des rapports anharmoniques de quatre éléments de l'une et des éléments correspondants de l'autre. Nous croyons donc qu'il est bon, même dans un cours qui a pour base principale l'étude des propriétés descriptives, d'introduire la notion du rapport anharmonique, sitôt qu'il s'agit de construction de séries (ou de *formes*) projectives. Cette notion rend la conception de ces séries plus claire et facilite l'étude des propriétés descriptives, en même temps qu'elle donne aussi le moyen d'étudier les propriétés métriques des figures ([2]).

La voie à laquelle nous avons donné ici la préférence est celle que suit, dans le Livre que nous avons à analyser, l'illustre géomètre italien, qui n'aspire pas à faire des découvertes, mais qui s'est chargé de la tâche utile, mais assez difficile, d'élaborer un Cours. Dans les premiers paragraphes [§ 1, *Définitions;* § 2, *Projection centrale;* § 3, *Homologie;* § 4, *Figures homologiques de*

([1]) *Die Geometrie der Lage*, Hannover, 1866.

([2]) Pour cette dernière raison, M. *Reye* parle aussi dans des *Appendices* du rapport anharmonique.

trois dimensions; § 5, *Formes* (séries) *géométriques;* § 6, *Principe de dualité;* § 7, *Formes projectives;* § 8, *Formes harmoniques*], on fait abstraction de toute question de la grandeur de l'étendue, et toutes les démonstrations se font avec des propriétés descriptives. Mais, dans le § 9, l'auteur introduit *les rapports anharmoniques,* et en montre les principales propriétés, pour en faire usage dans ce qui suit (§ 10, *Construction des formes projectives;* § 11, *Cas particuliers et exercices;* § 12, *Involution,* etc.). Fidèle à son point de départ, l'auteur préfère toutefois, même après avoir introduit les rapports anharmoniques, les démonstrations descriptives et constructives, lorsqu'elles ne sont pas plus compliquées que celles où l'on se sert de simples opérations algébriques. C'est pour cette raison que la détermination des *éléments communs* de deux séries projectives et celles *des éléments doubles* d'une série de couples en involution (§ 18), et *les problèmes du second degré* (§ 19) ne sont exposés qu'après la déduction des propriétés principales des coniques (§ 13, *Formes projectives dans le cercle;* § 14, *Formes projectives dans les coniques;* § 15, *Constructions et exercices;* § 16, *Corollaires des théorèmes de Pascal et de Brianchon;* § 17, *Théorème de Desargues*).

On voit par les titres de ces derniers paragraphes que l'auteur suit, quant à l'introduction des coniques, un peu la même voie que Poncelet, en déduisant quelques-unes des propriétés des coniques de celles du cercle. Toutefois, il se borne à établir par cette voie les théorèmes fondamentaux sur la projectivité des faisceaux qui projettent de points fixes d'une conique un point mobile, et sur celle des divisions faites sur des tangentes fixes par une tangente mobile, et enfin sur celle de ces deux différentes espèces de formes entre elles; ces théorèmes font ensuite la base de la théorie suivante. En définissant une conique comme le lieu ou l'enveloppe déterminée par une de ces propriétés, on pourrait éviter cette déduction de théorèmes généraux de leurs cas particuliers; mais alors on aurait besoin de plusieurs démonstrations (que les centres des faisceaux qui engendrent la conique peuvent être des points quelconques de la courbe, etc.).

Les paragraphes suivants contiennent : § 20, *Pôles et polaires;* § 21, *Centre et diamètres;* § 22, *Figures polaires réciproques;* § 23, *Corollaires et constructions.* — Nous devons faire remarquer

que M. Cremona ne fait pas usage, dans ces démonstrations, d'éléments imaginaires.

Le second volume contiendra les *Propriétés focales des coniques, la Théorie des cônes et des figures sphériques,* et les principes de la Géométrie analytique.

Voilà un résumé du plan du travail de M. Cremona. Quant à l'exécution de ce plan, on ne peut trop louer l'excellente exposition, l'heureux choix des dénominations, la clarté du style et des explications, et la description intuitive des figures, avantages qu'on doit apprécier, sachant combien il est difficile souvent de ne pas donner à la description d'une figure qui fait saillir presque immédiatement une vérité géométrique une étendue qui dérobe à la démonstration descriptive toute son élégance.

Nous devons rappeler encore que M. Cremona fait suivre les théorèmes de nombreuses applications, soit de corollaires, soit de constructions. En exécutant avec soin ces constructions, l'élève ingénieur, en même temps qu'il acquiert la connaissance de la Géométrie projective, se familiarise avec les constructions graphiques qui lui seront si utiles plus tard.

Il va sans dire que l'excellent Livre de M. Cremona, tout en étant destiné spécialement aux Instituts techniques, sera aussi extrêmement propre à répandre ailleurs le goût de la Géométrie projective et la connaissance de cette science. Nous voudrions donc bien, par cette analyse, augmenter le nombre de ses lecteurs. En même temps, nous devons relever deux fautes qui s'y sont glissées. Comme la première, qui se trouve à l'énoncé du théorème 17, ne repose que sur un échange, nous nous permettons de la corriger, en substituant à cet énoncé celui qui suit : « Si aux droites a, b, c,... et aux points ab, ac,..., bc,... d'une figure correspondent respectivement les droites a', b', c',... et les points $a'b'$, $a'c'$,..., $b'c'$,... d'une autre figure située dans le même plan que la première, et si les droites joignant les points correspondants ab et $a'b'$, ac et $a'c'$,..., bc et $b'c'$,... passent par un point fixe O, alors les droites correspondantes a et a', b et b', c et c',... se rencontrent en des points d'une droite fixe. »

La seconde de ces fautes [1] se trouve dans les démonstrations de

[1] Nous croyons savoir que l'indication de ces deux fautes, reconnues par l'auteur

l'article **114**, (*a*) et (*b*). En effet, selon ces démonstrations, il serait possible de substituer au cercle une courbe tout à fait arbitraire. Il y a donc, dans la démonstration, une lacune qu'il ne serait pas difficile de remplir; mais, comme les théorèmes dont il s'agit sont importants, l'auteur, sans doute, s'en chargera lui-même, en donnant dans le second Volume une correction de ces deux démonstrations. Z.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ATTI DELL' ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI (¹). — In-4°.

T. XXV; 1871-1872.

SECCHI (le P.). — *Sur la distribution des protubérances autour du disque solaire.* 4ᵉ, 5ᵉ, 6ᵉ et 7ᵉ Communications. (Ensemble 69 p.)

Avec des considérations sur la couronne solaire.

SECCHI (le P.). — *Sur quelques phénomènes produits dans l'explosion de la foudre à Alatri.* (5 p.)

PROVENZALI (P.-F.-S.). — *Sur la mesure de l'intensité de la lumière solaire.* (2 Articles, 13 p.)

FERGOLA (E.) et SECCHI (le P.). — *Sur la différence de longitude entre Rome et Naples.*

Ces astronomes ont trouvé pour l'expression de cette différence, évaluée en temps, $7^m 6^s,247 \pm 0^s,027$.

CATALAN (E.). — *Théorème d'Arithmétique.* (1 p.; fr.)

N étant un multiple donné de 4, n un nombre pair $< N$, on décompose n en une somme de puissances de 2, et l'on fait $\lambda_n = \pm 1$, suivant que ces puissances sont en nombre pair ou en nombre impair. En supposant $N - n = 2^{\rho_n} i$, on a

$$\sum_{n=0}^{n=N-2} \lambda_n 2^{\rho_n} = \pm \frac{N}{2},$$

le signe + répondant au cas où N est la somme d'un nombre impair de puissances de 2.

---

après l'impression, fait partie de l'*Erratum* qui se trouvera dans le second Volume de l'Ouvrage. G. D.

(¹) Voir *Bulletin*, t. II, p. 19.

SECCHI (le P.). — *Sur l'aurore électrique du 4 février 1872.* (12 p.)

SECCHI (le P.). — *Sur la dernière éclipse du 12 décembre 1871.* (18 p.)

AZZARELLI (M.). — *Centre de pression dans une surface quelconque.* (20 p.)

Une surface rigide quelconque étant plongée dans un liquide, les pressions normales exercées sur les divers éléments de cette surface n'auront pas, en général, de résultante unique, et, par conséquent, il n'y aura pas lieu de chercher le centre de pression. L'auteur établit dans son Mémoire les conditions nécessaires pour la réduction des pressions élémentaires à une force unique. Il applique ensuite ces conditions à différentes surfaces.

SECCHI (le P.). — *Sur les spectres prismatiques des corps célestes.* (56 p.)

AZZARELLI (M.). — *Détermination du centre de gravité du triangle sphérique et de la pyramide sphérique. Résolution des problèmes qui s'y rapportent.* (32 p.)

Ce Mémoire est le développement d'une Note de Kramp, publiée en 1793, dans le tome IV du *Giornale fisico-medico,* et contenant les énoncés et la simple indication des solutions de vingt-sept problèmes, dont vingt et un se rapportent à la détermination du centre de gravité du triangle sphérique. M. Azzarelli donne la démonstration des solutions de ces vingt et un problèmes.

CATALAN (E.). — *Sur les courbes antipodaires.* (1 p.; fr.)

Les antipodaires d'une suite de conchoïdes ayant même pôle sont des courbes parallèles.

SECCHI (le P.). — *Sur la température solaire.* (11 p.)

PROVENZALI (P.-F.-S.). — *Sur l'équivalent mécanique de la chaleur.* (7 p.)

AZZARELLI (M.). — *Nouvelles recherches relatives au théorème de Fagnano.* (13 p.)

Suite du Mémoire inséré au t. XXIV des *Atti dell' Accad. Pont. de' N. Lincei* (voir *Bulletin,* t. III, p. 106). Constructions géométriques se rattachant au théorème de Fagnano.

RIVISTA SCIENTIFICO-INDUSTRIALE delle principali scoperte ed invenzioni fatte nelle scienze e nelle industrie. Compilata da Guido VIMERCATI, con la collaborazione dei signori P. Secchi, Donati, Denza, Canestrini, etc., etc. — Firenze, Gr. in-8° (¹).

Les deux premiers Volumes de cette Revue ont paru sous forme d'Annuaire, dans le format in-18, à la fin des années 1869 et 1870. C'est à partir du mois d'avril 1871 qu'elle est devenue publication mensuelle avec son format actuel. Le cadre de la Revue embrassant l'ensemble des Sciences mathématiques, physiques et naturelles, nous mentionnerons seulement les articles qui se rapportent aux branches dont s'occupe notre *Bulletin*.

3ᵉ Année; 1871.

DENZA (F.) et DONATI (G.-B.). — *Aurores boréales du* 9 *et du* 18 *avril* 1871.

CIPOLLETTI (D.). — *Sur la fonction des forces*. (5 p.)

L'auteur a pour but de chercher l'expression de l'action élémentaire qu'exercent deux molécules l'une sur l'autre. Après avoir cité les principes énoncés par Hooke et par Newton, il arrive à la loi qu'en a déduite Boscovich, et à la courbe sinueuse, asymptote aux deux axes coordonnés, par laquelle cette loi est représentée. Il en conclut que la grandeur de l'action de deux molécules peut être représentée par le quotient $\frac{P_{2n}}{P_{2n+2}}$ de deux polynômes, de degrés $2n$ et $2n+2$, ne renfermant, l'un et l'autre, que des puissances paires, et dont le second, P_{2n+2}, n'a pas de terme constant; ce qui donne, comme limite, la loi d'attraction newtonienne, pour une distance infinie.

GHERARDI (S.). — *Sur un projet, paraissant le plus ancien, de télégraphe magnétique*. (9 p.)

Voir les Articles publiés dans le tome Iᵉʳ du *Bullettino di Bibliografia, etc.* de M. le prince Boncompagni.

DENZA (F.). — *Bolides observés en Italie, en avril* 1871.

(¹) *Revue scientifique et industrielle* des principales découvertes et inventions faites dans les sciences et dans l'industrie. Rédigée par M. l'ingénieur comte *G. Vimercati*. — Cette Revue paraît chaque mois par fascicule de deux feuilles. Le prix d'abonnement est 7 fr. pour l'Italie, 9 fr. pour le reste de l'Europe.

CAGNASSI (M.). — *Sur un télémètre, nouvel instrument pour la mesure des distances.*

TACCHINI (P.). — *Nouvelles observations sur les protubérances solaires.*

SECCHI (A.). — *Sur une nouvelle méthode spectroscopique.*

ECCHER (A. DE). — *Sur la transformation du travail mécanique en électricité et en chaleur.* (8 p.)

DENZA (F.). — *Les étoiles filantes et les aurores polaires observées en Piémont, en 1871.* (3 p.)

RAGONA (D.). — *La poussière atmosphérique.* (7 p.)

DOMINI (P.). — *Sur les machines à vapeur; notes pratico-théoriques.* (2 art., 13 p.)

CECCHI (F.). — *Le baromètre de la Loggia dell' Orgagna, à Florence.* (3 art., 25 p.)

LAVISATO (D.). — *Le spectre des éclairs.* (3 p.)

DENZA (F.). — *Aurores polaires et éruptions solaires.* (3 p.)

TACCHINI (P.). — *Physique solaire.* (3 p.)

4e Année; 1872.

DENZA (F.). — *Aurores polaires.* (3 p.)

SERPIERI (A.). — *Sur les relations entre le Soleil et les planètes.* (3 art., 27 p.)

SECCHI (A.), BERTELLI (T.), CAGNASSI (M.). — *La grande aurore boréale du 4 février 1872.* (6 p.)

BERTELLI (T.). — *Phénomènes météorologiques observés à Florence, en mars 1872.* (3 p.)

CECCHI (F.). — *Nouvel appareil pour démontrer l'égalité de vitesse de chute des corps lourds et des corps légers.* (4 p.)

DONATI (G.-B.). — *Sur des phénomènes qui se sont manifestés sur les lignes télégraphiques pendant la grande aurore boréale du 4 février 1872; sur l'origine des aurores boréales, et sur une prétendue question de priorité relative à l'explication de cette origine.* (18 p.)

Cipolletti (D.). — *Application du principe de Newton et de la dissertation de Boscovich sur la loi des forces qui existent dans la nature à une théorie synthétique de l'étendue.* (3 art., 20 p.)

Suite de la Note insérée dans le précédent Volume. L'auteur prend pour point de départ les principes de Hooke, de Newton et de Boscovich, qu'il résume comme il suit : « Si, en vertu d'une action extérieure, deux atomes contigus d'un corps sont sollicités à se rapprocher ou à s'éloigner, alors il se développe, entre ces deux atomes et suivant la droite qui les joint, des accroissements de forces, répulsifs dans le premier cas, attractifs dans le second. Ces réactions, entre des limites déterminées de stabilité, sont proportionnelles aux forces extérieures, et fonctions continues du déplacement $\mp \delta\zeta$, ou de la quantité dont les atomes se sont rapprochés ou éloignés. Elles s'annulent soit quand la variation $\mp \delta\zeta$ converge vers zéro, soit quand la distance variable $\zeta + \delta\zeta$ s'approche de la distance limite de la cohésion, et elles croissent indéfiniment, par des valeurs négatives, lorsque la distance variable $\zeta - \delta\zeta$ est sur le point de devenir un minimum, par rapport à la distance ζ qui répond à l'état naturel. »

Marangoni (C.). — *Sur le principe de la viscosité superficielle des liquides, établi par M. J. Plateau.* (2 p.)

Ferrini (R.). — *Sur la polarisation électrostatique.*

Donnini (P.). — *Sur quelques relations qui ont lieu entre un corps et ses couches de niveau.* (5 p.)

L'auteur établit plusieurs théorèmes, dont nous citerons seulement le premier :

« Le moment par rapport à un plan de la portion d'un corps comprise entre deux couches de niveau, multiplié par le rapport constant de la masse d'une couche à celle de la partie du corps intérieur à cette couche, est égal à la différence des moments des deux couches, pris par rapport au même plan. »

Cipolletti (D.). — *Expressions générales du développement en série des coordonnées d'un corps céleste.* (5 p.)

Au moyen des équations $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{F}{r}x, \ldots$ du mouvement elliptique, l'auteur développe les valeurs de x, y, z en séries ordonnées suivant les puissances du temps, et dont les coefficients dépendent,

suivant une loi qu'il indique, des valeurs initiales des coordonnées et des composantes de la vitesse.

Liverani (P.). — *Les étoiles filantes de la période d'août.* (4 p.)

Provenzali (P.-S.-F.). — *Sur le coefficient mécanique de la chaleur.* (3 p.)

Donnini (P.). — *Sur quelques propriétés d'un anneau très-mince, de forme elliptique, et hétérogène.* (4 p.)

Luvini (G.). — *Sur la viscosité superficielle des liquides.* (4 p.)

Eccher (A. de). — *Sur la réponse du professeur G. Cantoni aux observations faites à son travail sur l'électrophore et la polarisation électrostatique.* (19 p.)

Eccher (A. de). — *Observations sur quelques expériences du professeur R. Ferrini sur la polarisation électrostatique.* (14 p.)

Bellucci (G.). — *Pluie extraordinaire d'étoiles filantes, le 27 novembre 1872.* (4 p.)

MÉLANGES.

SUR LA POSSIBILITÉ DE REPRÉSENTER UNE FONCTION PAR UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE;

Par B. RIEMANN.

Publié, d'après les papiers de l'auteur, par R. Dedekind (1).

(Traduit de l'allemand.)

Le présent travail sur les séries trigonométriques se compose de deux Parties essentiellement distinctes. La première contient une histoire des recherches et des opinions des géomètres sur les fonc-

---

(1) Ce Mémoire a été présenté par l'auteur, en 1854, à la Faculté de Philosophie pour son habilitation à l'Université de Gœttingue. Bien que l'auteur ne semble pas l'avoir destiné à la publicité, cependant l'impression de ce travail sans aucun changement de forme paraîtra suffisamment justifiée tant par l'intérêt considérable qui s'attache au sujet, que par la manière dont y sont traités les principes les plus importants de l'Analyse infinitésimale.

Brunswick, juillet 1867. R. Dedekind.

tions arbitraires données graphiquement, et sur la possibilité de les représenter par des séries trigonométriques. Le rapprochement de ces résultats m'a permis de mettre à profit quelques indications de l'illustre géomètre ([1]) à qui l'on doit le premier travail sur cet objet. Dans la seconde, je soumets la représentation d'une fonction par une série trigonométrique à un examen qui embrasse des cas qui n'ont pas encore été traités jusqu'ici. Il a été nécessaire de faire précéder cette étude d'une courte Note sur la notion d'intégrale définie, et sur l'étendue dans laquelle cette notion est applicable.

Histoire des recherches relatives à la représentation par une série trigonométrique d'une fonction donnée arbitrairement.

§ 1.

Les séries trigonométriques, ainsi appelées par Fourier, c'est-à-dire les séries de la forme

$$\begin{gathered} a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots \\ + \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \ldots, \end{gathered}$$

jouent un rôle considérable dans la partie des Mathématiques où l'on rencontre des fonctions entièrement arbitraires; on est même fondé à dire que les progrès les plus essentiels de cette partie des Mathématiques, si importante pour la Physique, ont été subordonnés à la connaissance plus exacte de la nature de ces séries. Dès les premières recherches mathématiques qui ont conduit à la considération des fonctions arbitraires, s'est posée la question de savoir si une fonction entièrement arbitraire pouvait se représenter par une série de la forme ci-dessus.

Cette question a pris naissance vers le milieu du siècle précédent, à l'occasion des recherches sur les cordes vibrantes, dont s'occupaient alors les plus célèbres géomètres. Il serait difficile d'exposer leurs vues sur ce sujet sans entrer dans les détails du problème.

Sous certaines hypothèses, qui s'accordent de très-près avec la réalité, la forme d'une corde tendue, vibrant dans son plan (en dé-

---

([1]) Lejeune-Dirichlet. (*N. du Trad.*)

suivant une loi
et des composa

LIVERANI (P

PROVENZALI
chaleur. (3 p.

DONNINI (P.
mince, de form

LUVINI (G.

ECCHER (A.
aux observati
risation électr

ECCHER (A
professeur B

BELLUCCI
27 *novembr*

SUR LA POSS

Le pr
deux P
histoir

(1) C
pour
l'avoir
ment
tache
de l'.
I

tion $f(z) = f(2l + z)$, c'est-à-dire qu'il cherche des expressions analytiques qui restent invariables lorsque z croît de $2l$.

C'est le mérite essentiel d'Euler, qui a donné, dans le volume suivant des Mémoires de Berlin ([1]), une nouvelle exposition de ces travaux de d'Alembert, d'avoir reconnu plus exactement la nature des conditions auxquelles la fonction $f(z)$ doit satisfaire. Il remarqua que, d'après la nature du problème, le mouvement de la corde est complétement déterminé si l'on donne, pour un instant quelconque, la forme de la corde et la vitesse de chaque point $\left(\text{c'est-à-dire } y \text{ et } \frac{\partial y}{\partial t}\right)$, et il fit voir que, si l'on imagine que ces deux fonctions soient définies par des courbes tracées arbitrairement, on peut toujours en déduire, par une simple construction géométrique, la fonction $f(z)$ de d'Alembert. Supposons, en effet, que l'on ait, pour $t = 0$, $y = g(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial t} = h(x)$; il vient, pour les valeurs de x entre 0 et l,

$$f(x) - f(-x) = g(x), \quad f(x) + f(-x) = \frac{1}{\alpha}\int h(x)\,dx,$$

et, par suite, on obtient la fonction $f(z)$ entre $-l$ et l. Or de là on déduit la valeur de cette fonction pour toute autre valeur de z, au moyen de l'équation $f(z) = f(2l + z)$. Telle est, en notions abstraites, mais actuellement bien connues, la détermination due à Euler de la fonction $f(z)$.

Cependant d'Alembert protesta contre cette extension donnée à sa méthode par Euler ([2]), parce que sa méthode supposait nécessairement que y pût s'exprimer analytiquement en t et en x.

Avant qu'Euler eût fait connaître sa réponse, parut un troisième travail sur ce sujet, tout différent des deux premiers et dû à Daniel Bernoulli ([3]). Déjà, avant d'Alembert, Taylor avait vu que l'on a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial y^2},$$

([1]) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1748, p. 69.

([2]) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1750, p. 358. « En effet, on ne peut, ce me semble, exprimer y analytiquement d'une manière plus générale qu'en le supposant une fonction de t et de x. Mais dans cette supposition on ne trouve la solution du problème que pour les cas où les différentes figures de la corde vibrante peuvent être renfermées dans une seule et même équation. »

([3]) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1753, p. 147.

signant par x la
mité initiale, et
à sa position
l'équation aux

x étant indé
uniforme, in
D'Alemb
de cette équ
Il a mon
place de
la formul

ainsi qu
$x + \alpha t$.

O
des
la
co
l'

$$a_1 \sin \frac{x\pi}{l} + a_2 \sin \frac{2x\pi}{l} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos \frac{x\pi}{l} + b_2 \cos \frac{2x\pi}{l} + \ldots$$

résenter, pour l'abscisse x, l'ordonnée d'une courbe
arbitraire entre o et l. Or personne, à cette époque,
doute que toutes les transformations que l'on pou-
bir à une expression analytique, qu'elle fût finie ou
fussent légitimes pour toutes les valeurs des quantités
ées, ou du moins que, si elles devenaient inapplicables,
eulement que dans des cas tout à fait spéciaux. Il sem-
impossible de représenter une courbe algébrique, ou
ent une courbe analytique donnée *non périodique* par
n périodique ci-dessus, et Euler croyait, en conséquence,
ider la question contre Bernoulli.
ant le débat entre Euler et d'Alembert n'était pas encore
ela engagea un jeune géomètre, encore peu connu alors,
à tenter la résolution du problème par une voie toute
par laquelle il arriva aux résultats d'Euler. Il entreprit [1]
iner les vibrations d'un fil sans masse, chargé d'un nombre
ié et fini de masses égales et équidistantes, et il recher-
e comment varient ces vibrations lorsque le nombre des
it à l'infini. Mais, quelque habileté, quelque richesse
analytiques qu'il eût déployée dans la première partie de
, le passage du fini à l'infini laissait encore beaucoup à
bien que d'Alembert, dans un écrit qu'il plaça en tête de
ules mathématiques, put continuer à réclamer pour sa
ution le mérite de la plus grande généralité. Les opinions
géomètres de cette époque continuèrent donc à rester
ır ce sujet; car, dans leurs travaux ultérieurs, chacun
u fond, son point de vue.
sumer, finalement, les manières de voir qu'ils ont déve-
l'occasion de ce problème touchant les fonctions arbi-
la possibilité de les représenter par une série trigono-
Euler avait, le premier, introduit ces fonctions dans

---

[1] *nea Taurinensia*, t. I. Recherches sur la nature et la propagation du son.

leur
pour exac
de la courb
le procédé gé
. au
le Calcul
ses résultats.
arbitraires, on ne
continus.
tou
mais, tandis
de Bern
qu'une
pas tou
Lagrange [4]) c

la qu
les fonctions
de F
ère s'
mathématiques, et
ses dével
remarqua que

$x)\cos nx\,dx$

applicable lorsq

XX.

art. XXV.

fonction $f(x)$ est donnée tout à fait arbitrairement; il substitua d'abord pour $f(x)$ une fonction de celles qu'on nomme discontinues (l'ordonnée d'une ligne présentant un point de rupture pour certaines valeurs de l'abscisse x), et il obtint ainsi une série qui, effectivement, donnait toujours la valeur de la fonction.

Quand Fourier, dans un de ses premiers travaux sur la chaleur, présenté à l'Académie des Sciences le 21 décembre 1807 [1], énonça pour la première fois cette proposition, qu'une fonction donnée (graphiquement) d'une manière tout à fait arbitraire pouvait s'exprimer par une série trigonométrique, cette assertion parut à Lagrange si inattendue, que l'illustre vieillard la contesta de la manière la plus formelle. Il doit exister encore [2] sur ce débat une pièce écrite dans les Archives de l'Académie de Paris. Malgré cela, Poisson, partout où il se sert des séries trigonométriques pour représenter des fonctions arbitraires, renvoie [3] à un passage des travaux de Lagrange sur les cordes vibrantes, où cette représentation doit se trouver. Pour réfuter cette allégation, qu'on ne peut expliquer qu'en se rappelant la rivalité qui existait entre Fourier et Poisson [4], nous sommes forcés de revenir encore une fois au Mémoire de Lagrange; car les Recueils publiés par l'Académie ne contiennent rien sur cet objet.

On trouve effectivement, à l'endroit cité par Poisson [5], la formule

$$\begin{aligned} y = {} & 2\int Y \sin X\pi\, dX \times \sin x\pi + 2\int Y \sin 2X\pi\, dX \times \sin 2x\pi \\ & + 2\int Y \sin 3X\pi\, dX \times \sin 3x\pi + \ldots + 2\int Y \sin nX\pi\, dX \times \sin nx\pi, \end{aligned}$$

« de sorte que, lorsque $x = X$, on aura $y = Y$, Y étant l'ordonnée qui répond à l'abscisse X. »

Cette formule a bien le même aspect que la série de Fourier, et peut, au premier coup d'œil, être confondue avec elle; mais cette apparence provient simplement de ce que Lagrange a employé le signe $\int dX$ là où nous emploierions aujourd'hui le signe $\Sigma \Delta X$.

[1] *Bulletin de la Société Philomathique*, t. I, p. 112.

[2] D'après une Communication verbale du professeur Dirichlet.

[3] Notamment dans son Ouvrage le plus répandu, son *Traité de Mécanique*, n° 323, t. I, p. 638.

[4] Le Compte rendu dans le *Bulletin des Sciences* sur le Mémoire présenté par Fourier à l'Académie est de Poisson.

[5] *Miscellanea Taurinensia*, t. III, Pars math., p. 261.

Elle donne la solution de ce problème : Déterminer la série finie de sinus

$$a_1 \sin x\pi + a_2 \sin 2x\pi + \ldots + a_n \sin nx\pi,$$

de façon que, pour les valeurs $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1}$ de x, que Lagrange désigne d'une façon indéterminée par X, elle prenne des valeurs données. Si Lagrange avait fait n infini dans cette formule, il serait bien parvenu au résultat de Fourier; mais lorsqu'on lit complétement son Mémoire, on voit qu'il est fort éloigné de croire qu'une fonction tout à fait arbitraire puisse réellement être représentée par une série infinie de sinus. Il avait, au contraire, entrepris tout son travail, parce qu'il croyait que ces fonctions arbitraires ne sont pas exprimables par une formule, et, quant à la série trigonométrique, il pensait qu'elle peut représenter toute fonction périodique donnée analytiquement. Aujourd'hui, il est vrai, nous avons peine à concevoir que Lagrange ne dût pas arriver de sa formule de sommation à la série de Fourier; mais cela s'explique par cette circonstance, que le débat entre Euler et d'Alembert avait fait naître dans son esprit une opinion arrêtée sur la voie qu'il fallait suivre. Il croyait que l'on devait commencer par résoudre complétement le problème des vibrations pour un nombre fini indéterminé de masses, avant d'employer les considérations de limites. Ces considérations exigent une étude assez étendue ([1]), qui eût été inutile s'il avait connu la série de Fourier.

C'est Fourier qui a, le premier, compris d'une manière exacte et complète la nature des séries trigonométriques ([2]). Celles-ci ont été, depuis, employées de diverses manières en Physique mathématique pour la représentation des fonctions arbitraires, et, dans chaque cas particulier, on s'est aisément convaincu que la série de Fourier convergeait effectivement vers la valeur de la fonction; mais on est resté longtemps avant de pouvoir démontrer généralement cet important théorème.

La démonstration donnée par Cauchy dans un Mémoire lu, le 27 février 1826, à l'Académie de Paris ([3]), est insuffisante, comme

([1]) *Miscellanea Taurinensia*, t. III, Pars math., p. 251.

([2]) *Bulletin des Sciences*, t. I, p. 115. « Les coefficients a, a', a'',... étant ainsi déterminés, etc. »

([3]) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VI, p. 603.

Dirichlet l'a fait voir (¹). Cauchy suppose que, si, dans une fonction périodique $f(x)$, donnée arbitrairement, on remplace x par un argument complexe $x+yi$, cette fonction est finie pour toute valeur de y; mais cela n'a lieu que pour le *seul* cas où la fonction est égale à une grandeur constante. Il est cependant facile de voir que cette supposition n'est pas nécessaire pour la suite des conclusions. Il suffit que l'on ait une fonction $\varphi(x+yi)$, qui soit finie pour toutes les valeurs positives de y, et dont la partie réelle devienne égale, pour $y=0$, à la fonction périodique donnée $f(x)$. Si l'on admet préalablement cette proposition, qui est en effet vraie (²), la voie proposée par Cauchy conduit alors au but, comme, réciproquement, cette proposition peut se déduire du théorème de Fourier.

§ 3.

En janvier 1829 parut dans le *Journal de Crelle* (³) un Mémoire de Dirichlet, où la possibilité de la représentation par les séries trigonométriques se trouvait établie en toute rigueur pour les fonctions qui sont en général susceptibles d'intégration, et qui ne présentent pas une infinité de maxima et de minima.

Il arriva à la découverte du chemin à suivre pour obtenir la solution de ce problème, par la considération que les séries infinies se partagent en deux classes, suivant qu'elles restent ou non convergentes, lorsqu'on rend tous leurs termes positifs. Dans les premières, les termes peuvent être intervertis d'une manière quelconque; dans les autres, au contraire, la valeur dépend de l'ordre des termes. Si l'on désigne, en effet, dans une série de la seconde classe, les termes positifs successifs par

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots,$$

et les termes négatifs par

$$-b_1, \quad -b_2, \quad -b_3, \ldots,$$

il est clair que Σa, ainsi que Σb, doit être infinie; car si ces deux sommes étaient finies l'une et l'autre, la série serait encore convergente lorsqu'on donnerait à tous les termes le même signe;

(¹) *Journal de Crelle*, t. 4, p. 157 et 158.

(²) La démonstration se trouve dans la Dissertation inaugurale de l'auteur.

(³) T. 4, p. 157.

si une seule était infinie, la série serait divergente. Il est clair maintenant que la série, en plaçant les termes dans un ordre convenable, pourra prendre une valeur donnée quelconque C; car, si l'on prend alternativement des termes positifs de la série jusqu'à ce que sa valeur soit plus grande que C, puis des termes négatifs jusqu'à ce que sa valeur soit moindre que C, la différence entre cette valeur et C ne surpassera jamais la valeur du terme qui précède le dernier changement de signe. Or les quantités a, aussi bien que les quantités b, finissant toujours par devenir infiniment petites pour des valeurs croissantes de l'indice, les écarts entre la somme de la série et C deviendront encore infiniment petits, lorsqu'on prolongera assez loin la série, c'est-à-dire que la série converge vers C.

C'est aux seules séries de la première classe que l'on peut appliquer les lois des sommes finies; elles seules peuvent être considérées comme l'ensemble de leurs termes; celles de la seconde classe ne le peuvent pas : circonstance qui avait échappé aux mathématiciens du siècle dernier, principalement par la raison que les séries qui procèdent suivant les puissances ascendantes d'une variable appartiennent, généralement parlant (c'est-à-dire à l'exception de certaines valeurs particulières de cette variable), à la première classe.

La série de Fourier, évidemment, n'appartient pas nécessairement à la première classe; on ne pouvait donc point, comme Cauchy l'avait vainement tenté de le faire (1), déduire sa convergence de la loi suivant laquelle les termes décroissent. Il fallait montrer, au contraire, que la série finie

$$[illegible] \sin x\,dx \sin x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin 2x\,dx \sin 2x + \dots$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx \sin nx$$

$$[illegible]\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos x\,dx \cos x$$

$$[illegible] \cos 2x\,dx \cos 2x + \dots + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx \cos nx.$$

(1) [illegible] p. [illegible] : « Quoi qu'il en soit de cette [illegible] [illegible] que j'avais. »

ou, ce qui est la même chose, que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}d\alpha$$

s'approche indéfiniment de la valeur $f(x)$, pour n croissant à l'infini.

Dirichlet fonde cette démonstration sur les deux propositions suivantes :

1° Si $0 < c \overset{=}{<} \frac{\pi}{2}$, l'intégrale $\int_0^c \varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta$, pour n croissant indéfiniment, tend vers la valeur $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$;

2° Si $0 < b < c \overset{=}{<} \frac{\pi}{2}$, l'intégrale $\int_b^c \varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta$, pour n croissant indéfiniment, tend vers la valeur zéro;

la fonction $\varphi(\beta)$ étant supposée toujours décroissante ou toujours croissante entre les limites de ces intégrales.

A l'aide de ces deux propositions, on peut évidemment, si la fonction ne passe pas un nombre infini de fois d'une marche croissante à une marche décroissante et *vice versa*, décomposer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}d\alpha$$

en un nombre *fini* de termes, dont l'un converge vers $\frac{1}{2}f(x+0)$ [1], un autre vers $f(x-0)$, et tous les autres vers 0, lorsque n croit à l'infini.

De là résulte que l'on peut représenter par une série trigonométrique toute fonction se reproduisant périodiquement après l'intervalle 2π, et

---

(1) On démontre sans difficulté que la valeur d'une fonction f, qui n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, l'argument tendant vers x, soit par des valeurs décroissantes, soit par des valeurs croissantes, doit toujours ou converger vers les valeurs finies $f(x+0)$ et $f(x-0)$ (d'après la notation de Dirichlet, *Dove's Repertorium der Physik*, t. I, p. 170), ou devenir infiniment grande.

1° Qui est généralement susceptible d'intégration;

2° Qui n'a pas un nombre infini de maxima et de minima;

3° Qui, dans le cas où sa valeur varie brusquement, prend la valeur moyenne entre les valeurs limites prises de part et d'autre de la discontinuité.

Une fonction qui jouit des deux premières propriétés, et non de la troisième, ne peut évidemment pas être représentée par une série trigonométrique : car la série trigonométrique qui la représenterait en dehors des discontinuités en différerait aux points mêmes de discontinuité; mais une fonction ne remplissant pas les deux premières conditions peut-elle, et dans quel cas peut-elle être représentée par une série trigonométrique? C'est le point que les recherches de Dirichlet laissent indécis.

Ce travail de Dirichlet a donné une base solide à un grand nombre de recherches analytiques importantes. En mettant en pleine lumière un point sur lequel Euler s'était trompé, il a réussi à éclaircir une question qui avait occupé, depuis plus de soixante-dix ans (depuis l'année 1753), tant d'éminents géomètres. En effet, pour tous les cas de la nature, les seuls dont il s'agit ici, la question était complètement résolue; car, si peu que nous sachions comment les forces et les états de la matière varient avec le lieu et avec le temps dans les infiniment petits, nous pouvons cependant admettre en toute sécurité que les fonctions auxquelles ne s'appliquent pas les recherches de Dirichlet ne se rencontrent pas dans la nature.

Toutefois, ces cas non étudiés par Dirichlet semblent, pour une double raison, mériter l'attention.

En premier lieu, comme Dirichlet lui-même le remarque à la fin de son Mémoire, cet objet est intimement lié avec les principes du Calcul infinitésimal, et peut servir à porter dans ces principes une plus grande clarté et une plus grande précision. Sous ce rapport, l'étude de cette question offre un intérêt immédiat.

Mais, en second lieu, l'application des séries de Fourier n'est pas restreinte aux seules recherches physiques; on l'emploie aussi maintenant avec succès dans une branche des Mathématiques pures, la Théorie des nombres, et ici ce sont précisément les fonctions dont Dirichlet n'a pas étudié la représentation en série trigonométrique qui semblent être les plus importantes.

A la fin de son Mémoire, Dirichlet promet bien de revenir plus tard sur ces cas; mais sa promesse est restée jusqu'ici sans effet. Les travaux de Dirksen et de Bessel sur les séries de sinus et de cosinus ne fournissent pas ce complément; ils sont, au contraire, inférieurs à celui de Dirichlet sous le rapport de la rigueur et de la généralité. Le Mémoire de Dirksen, publié presque en même temps que celui de Dirichlet ([1]), dont évidemment Dirksen n'avait pu prendre connaissance, suit en général une bonne marche; mais il contient quelques inexactitudes de détail. Sans parler, en effet, de ce que, dans un cas spécial ([2]), il trouve pour la somme de la série un résultat faux, il s'appuie, dans une étude accessoire, sur un développement en série ([3]), qui n'est possible que dans des cas particuliers, de sorte que sa démonstration n'est complète que pour les fonctions dont la première dérivée est toujours finie. Bessel ([4]) cherche à simplifier la démonstration de Dirichlet; mais les modifications apportées dans cette démonstration ne donnent aucune simplification essentielle dans les conclusions, et servent tout au plus à les revêtir d'une forme plus habituelle, ce dont la rigueur et la généralité ont notablement à souffrir.

La question de la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique n'est donc résolue, jusqu'ici, que dans ces deux hypothèses, que la fonction soit généralement susceptible d'intégration, et n'ait pas un nombre infini de maxima et de minima. Si cette dernière hypothèse n'est pas admise, les deux théorèmes d'intégration de Dirichlet ne suffisent plus pour décider la question; mais si la première hypothèse est rejetée, la règle de Fourier pour la détermination des coefficients n'est déjà plus applicable. La voie que nous allons suivre pour étudier cette question, sans faire de suppositions particulières sur la nature de la fonction, dépend de là, comme on le verra; une voie aussi directe que celle de Dirichlet n'est pas possible, par la nature même du problème.

([1]) *Journal de Crelle*, t. 4, p. 176.
([2]) *Loc. cit.*, formule (22).
([3]) *Loc. cit.*, art. 3.
([4]) Schumacher, *Astronomische Nachrichten*, nº 374 (t. 16, p. 229).

1° Qui est g[illegible]

2° Qui n'a p[illegible]

3° Qui, dan[illegible] [illegible] *l'étendue*

valeur moyen[illegible]

de la disconti[illegible]

Une fonct[illegible]

la troisième[illegible] [illegible] points fondamen[illegible]

série trigon[illegible] [illegible] à placer ici q[illegible]

terait en d[illegible] [illegible] finie, et sur la g[illegible]

de discon[illegible]

premières[illegible]

représent[illegible] $[illegible] x)dx$?

recherch[illegible]

Ce [illegible] [illegible] entre a et b [illegible]

nombr[illegible] [illegible] ordre de gra[illegible]

pleine [illegible] [illegible] a par [illegible]

à éclai[illegible] [illegible] utre, ε_i [illegible]

dix a[illegible] [illegible] la valeur [illegible]

pou[illegible] [illegible]

tion [illegible]

com[illegible]

ave[illegible] [illegible]

ad[illegible] [illegible]

qu[illegible] [illegible]

d[illegible] [illegible]

[illegible] une lim[illegible]

[illegible] tion. On [illegible]

[illegible] une [illegible]

[illegible] intégra[illegible]

[illegible] géomét[illegible]

[illegible] x s'appr[illegible]

[illegible] valle [illegible]

[illegible] de pet[illegible]

[illegible] elle [illegible]

[illegible] ce qui [illegible]

mais, si l'expression

$$\int_{a}^{c-\alpha_1} f(x)\,dx + \int_{c+\alpha_2}^{b} f(x)\,dx$$

roche, lorsque α_1 et α_2 deviennent infiniment petits, d'une
fixe, c'est cette limite que l'on désigne par $\int_a^b f(x)\,dx$.

utres extensions, dues à Cauchy, de la définition de l'intégrale
ie dans le cas où cette définition ne découle pas des notions
mentales qui précèdent, peuvent être commodes pour certaines
s de recherches, mais elles ne sont pas généralement admises,
rbitraire qui préside aux définitions de Cauchy suffirait seul à
npêcher d'être universellement acceptées.

§ 5.

herchons maintenant l'étendue et les limites de la définition
lente, et posons-nous cette question : dans quels cas une
on est-elle susceptible d'intégration? dans quels cas ne l'est-
is?

sidérons d'abord la définition de l'intégrale dans son sens le
troit, c'est-à-dire, supposons que la fonction ne devienne pas
, et que la somme S converge, quand tous les δ tendent vers
Désignons la plus grande oscillation de la fonction entre a
c'est-à-dire la différence entre sa plus grande et sa plus petite
dans cet intervalle par D_1; de même les plus grandes oscilla-
ntre x_1 et x_2 par $D_2, \ldots$, entre x_{n-1} et b par D_n; alors la

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$$

venir infiniment petite avec les quantités δ. Supposons que
grande valeur que cette somme puisse prendre, quand tous
nt plus petits que d, soit Δ; Δ sera alors une fonction de d,
ant et devenant infiniment petite avec d. Maintenant, si la
totale des intervalles pour lesquels les oscillations sont plus
s qu'une quantité σ est s, la contribution de ces intervalles à
me

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$$

[illegible] égale ou supérieure à σs. On aura donc

$$[illegible]\ \delta_1 D_1 + \dots + \delta_n D_n \overset{=}{<} \Delta, \quad \text{d'où} \quad s \overset{=}{<} \frac{\Delta}{\sigma}.$$

[illegible] être rendu infiniment petit [illegible] convenable de d; il en sera donc de même de s, et l'on [illegible] :

[illegible] tous les δ deviennent [illegible] que la fonction demeure [illegible] les intervalles pour les[illegible] quel que soit σ, [illegible] convenable de d.

[illegible] :

[illegible] par le décroissement [illegible] la grandeur totale s des [illegible] la fonction sont plus [illegible] toujours être rendue infiniment [illegible] tous les δ tendent vers [illegible].

[illegible] oscillations sont plus [illegible] $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \dots + \delta_n D_n$ [illegible] multipliée par la plus grande oscillation [illegible] qui est finie par hypothèse [illegible] dans la somme une partie [illegible] évidemment σ aussi [illegible] on peut déterminer la [illegible] que s soit aussi petit [illegible] $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 \dots + \delta_n D_n$ aussi [illegible] la somme S entre des [illegible].

[illegible] qui sont nécessaires et [illegible] quand les intervalles δ [illegible] puisse être question, dans [illegible] la fonction $f(x)$ entre les limites [illegible]

[illegible] plus haut. La notion [illegible] infinie, pour que l'inté-

gration soit possible, il faudra encore que la seconde des conditions trouvées ci-dessus soit satisfaite; mais, à la place de la première, à savoir que la fonction demeure toujours finie, il faudra faire intervenir la suivante : que la fonction ne devienne infinie que lorsque son argument s'approche de certaines valeurs particulières, et que l'on obtienne une valeur limite parfaitement déterminée, quand les limites des intégrations s'approchent indéfiniment de ces valeurs pour lesquelles la fonction devient infinie.

§ 6.

Après avoir trouvé les conditions pour la possibilité d'une intégrale définie d'une manière générale, c'est-à-dire sans hypothèse particulière sur la nature de la fonction à intégrer, nous devons en partie appliquer, en partie poursuivre cette recherche en particulier pour les fonctions qui, entre deux limites aussi rapprochées qu'on le veut, deviennent discontinues un nombre infini de fois.

Comme ces fonctions n'ont pas encore été considérées, il sera bon de partir d'un exemple particulier. Désignons, pour abréger, par (x) l'excès de x sur le nombre entier le plus voisin, ou zéro si x est à égale distance des deux nombres entiers les plus voisins. Soient d'ailleurs n un entier et p un entier impair, et formons la série

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \ldots = \sum_{1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}.$$

Cette série converge, comme il est facile de le voir, pour toutes les valeurs de x; sa valeur, toutes les fois que l'argument tend d'une manière continue vers une valeur x, soit par des valeurs décroissantes, soit par des valeurs croissantes, tend vers une limite fixe, et l'on a, si $x = \frac{p}{2n}$ (p et n étant premiers entre eux),

$$f(x+0) = f(x) - \frac{1}{2n^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots\right) = f(x) - \frac{\pi^2}{16n^2},$$

$$f(x-0) = f(x) + \frac{1}{2n^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots\right) = f(x) + \frac{\pi^2}{16n^2}.$$

Pour toutes les valeurs de x qui ne sont pas de la forme $\frac{p}{2n}$, on a

$$f(x+0)=f(x),\quad f(x-0)=f(x).$$

Cette fonction est donc discontinue pour toute valeur rationelle de x qui, réduite à sa plus simple expression, a un dénominateur pair; elle est donc discontinue un nombre infini de fois dans un intervalle, si petit qu'il soit, mais de telle manière que le nombre des variations brusques qui sont supérieures à une grandeur donnée est toujours fini. Elle est pourtant susceptible d'intégration. Cela [illegible] que, outre qu'elle est une valeur finie, cette [illegible] suivantes : que, pour chaque [illegible] une valeur limite $f(x+0)$ et [illegible] des variations brusques qui sont plus [illegible] est toujours fini. Alors, si nous [illegible], nous pourrons [illegible] dans chacun des intervalles qui ne [illegible] les oscillations soient [illegible] des intervalles qui [illegible] petite qu'on le [illegible]

[illegible]

et par suite

$$\int_x^a f(x)dx > c\left(\log\frac{1}{x} - \log\frac{1}{a}\right),$$

quantité qui croît indéfiniment quand x tend vers zéro : donc, si la fonction n'a pas un nombre infini de maxima et de minima dans le voisinage de $x = 0$, il faut nécessairement que $xf(x)$ devienne infiniment petit avec x, pour que la fonction $f(x)$ soit susceptible d'intégration. Si, d'autre part,

$$f(x)x^\alpha = \frac{f(x)dx(1-\alpha)}{d(x^{1-\alpha})},$$

pour une valeur de $\alpha < 1$, est infiniment petit avec x, il est clair que l'intégrale converge, quand sa limite inférieure tend vers zéro.

On trouve de même que, dans le cas de la convergence de l'intégrale, les fonctions

$$f(x)x\log\frac{1}{x} = \frac{f(x)dx}{-d\log\log\frac{1}{x}},$$

$$f(x)x\log\frac{1}{x}\log\log\frac{1}{x} = \frac{f(x)dx}{-d\log\log\log\frac{1}{x}}, \ldots,$$

$$f(x)x\log\frac{1}{x}\log\log\frac{1}{x}\ldots\log^{n-1}\frac{1}{x}\log^n\frac{1}{x} = \frac{f(x)dx}{-d\log^{n+1}\frac{1}{x}}$$

ne peuvent, lorsque x décroît à partir d'une limite finie jusqu'à zéro, demeurer plus grandes qu'une quantité finie, et, par suite, que, si elles n'ont pas un nombre infini de maxima et de minima, elles doivent devenir infiniment petites avec x; qu'au contraire l'intégrale converge, quand sa limite inférieure tend vers zéro, toutes les fois que l'expression

$$f(x)x\log\frac{1}{x}\ldots\log^{n-1}\frac{1}{x}\left(\log^n\frac{1}{x}\right)^\alpha = \frac{f(x)dx(1-\alpha)}{-d\left(\log^n\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha}},$$

pour $\alpha < 1$, devient infiniment petite avec x.

Mais, si la fonction $f(x)$ a, dans le voisinage de zéro, un nombre infini de maxima et de minima, on ne peut rien déterminer sur son

ordre de grandeur dans le voisinage de zéro. En effet, supposons que les valeurs absolues de la fonction et, par conséquent, son ordre de grandeur soient données. On pourra toujours disposer des signes de telle manière que l'intégrale $\int_{x}^{b} f(x)\,dx$ converge, quand sa limite inférieure décroît. On peut prendre comme exemple d'une telle fonction, qui devient infinie, et de telle manière que son ordre (l'ordre de $\frac{1}{x}$ étant pris pour unité) soit infiniment grand, la fonction suivante :

$$\frac{d\left(x \cos e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx} = \cos e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \sin e^{\frac{1}{x}}.$$

Nous nous contenterons de ce qui vient d'être dit sur cet objet, qui appartient à une autre branche de l'Analyse; nous allons maintenant aborder le problème spécial que nous nous sommes proposé, la recherche générale des conditions sous lesquelles une fonction peut être représentée par une série trigonométrique.

Étude sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique, sans faire aucune supposition sur la nature de la fonction.

§ 7.

Les travaux que nous avons signalés sur cette question avaient pour but de démontrer la série de Fourier pour les fonctions que l'on rencontre en Physique mathématique; on pouvait donc commencer la démonstration pour des fonctions tout à fait arbitraires, et ensuite soumettre la marche de la fonction à des restrictions quelconques, nécessaires pour la démonstration, si ces restrictions n'allaient pas contre le but que l'on s'était proposé, et convenaient aux fonctions que l'on avait en vue. Dans notre problème, la seule condition que nous imposerons aux fonctions, c'est de pouvoir être représentées par une série trigonométrique; nous rechercherons donc les conditions nécessaires et suffisantes pour un tel mode de développement des fonctions. Tandis que les travaux antérieurs établissaient des propositions de ce genre : si une fonction jouit de

telle et telle propriété, elle peut être développée en une série de Fourier, nous nous proposons la question inverse : si une fonction est développable en une série de Fourier, que résulte-t-il de là sur la marche de cette fonction, sur la variation de sa valeur, quand l'argument varie d'une manière continue?

A cet effet, considérons la série

$$\begin{gathered} a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots \\ + \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots, \end{gathered}$$

ou, si pour abréger nous posons

$$\frac{1}{2} b_0 = A_0, \quad a_1 \sin x + b_1 \cos x = A_1, \quad a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x = A_2, \ldots,$$

la série

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots,$$

que nous supposons donnée. Nous désignerons cette série par Ω, et sa valeur par $f(x)$, en sorte que cette fonction est déterminée seulement pour les valeurs de x qui rendent la série convergente.

Il est nécessaire, pour la convergence de la série, que ses termes finissent par devenir infiniment petits. Si les coefficients a_n, b_n tendent vers zéro pour n croissant à l'infini, les termes de la série Ω finiront par devenir infiniment petits, quel que soit x; sinon, ils ne pourront le devenir que pour des valeurs particulières de x. Les deux cas doivent être traités séparément.

§ 8.

Supposons d'abord que les termes de la série Ω finissent par devenir infiniment petits, quel que soit x.

Dans cette hypothèse, la série

$$C + C'x + A_0 \frac{x^2}{2} - A_1 - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} - \ldots = F(x)$$

qu'on déduit de Ω, en intégrant deux fois consécutivement chaque terme, sera convergente, quel que soit x. Sa valeur $F(x)$ varie d'une manière continue avec x, et cette fonction $F(x)$ est, par suite, toujours susceptible d'intégration.

Pour reconnaitre à la fois la convergence de la série et la conti-

[illegible] de la fonction $F(x)$, désignons la somme des termes jusqu'à $-\frac{A_n}{n^2}$ par N : le reste de la série, c'est-à-dire la série

$$-\frac{A_{n+1}}{(n+1)^2}-\frac{A_{n+2}}{(n+2)^2}-\dots,$$

par R, et la plus grande valeur de A_m, pour $m>n$, par ε. La valeur de R, quelque loin qu'on prolonge cette série, est évidemment plus petite, abstraction faite du signe, que

$$\varepsilon\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots\right]<\frac{\varepsilon}{n},$$

et, par suite, R peut être renfermé entre des limites aussi petites qu'on le veut, quand n prend des valeurs suffisamment grandes; donc la série est convergente. De plus, la fonction F est continue, c'est-à-dire que son accroissement peut être rendu aussi petit qu'on le veut, en assignant à x un accroissement suffisamment petit; car l'accroissement de $F(x)$ se compose de deux parties : celui de N et celui de R; or on peut prendre d'abord n assez grand pour que R, quel que soit x, soit aussi petit qu'on le veut, et, par conséquent, pour que l'accroissement de R pour chaque accroissement de x soit [illegible], et ensuite on peut prendre l'accroissement de x assez petit pour que celui de N soit au-dessous de toute quantité donnée.

[illegible] sur la fonction $F(x)$, quelques [illegible] la démonstration interromprait la suite de [illegible].

Théorème I. — Quand la série [illegible] *est convergente, l'expression*

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta},$$

[illegible] le rapport est fini, converge vers la même limite que la série.

[illegible]

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

$$= A_0 + A_1\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta}+A_2\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\cdot\frac{\sin 2\beta}{2\beta}+A_3\frac{\sin 3\alpha}{3\alpha}\cdot\frac{\sin 3\beta}{3\beta}+\dots,$$

ou, pour traiter d'abord le cas plus simple où $\alpha = \beta$,

$$\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha^2}=A_0+A_1\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2+A_2\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)^2+\ldots.$$

Si la série infinie $A_0+A_1+A_2+\ldots$ est désignée par $f(x)$, et que l'on fasse

$$A_0+A_1+\ldots+A_{n-1}=f(x)+\varepsilon_n,$$

on doit pouvoir trouver, pour une grandeur donnée à volonté δ, une valeur m de n telle que, si $n>m$, ε_n devienne plus petit que δ. Prenons maintenant α assez petit pour que $m\alpha<\pi$; transformons, par la substitution

$$A_n=\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n,$$

la série $\sum_0^\infty A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2$ dans la suivante :

$$f(x)+\sum_1^\infty \varepsilon_n\left\{\left[\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right]^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\},$$

et partageons cette série en trois parties, en réunissant :

1° Tous les termes de rang 1 à m inclusivement;

2° Les termes de rang $m+1$, jusqu'au plus grand nombre entier, que nous désignerons par s, inférieur à $\frac{\pi}{\alpha}$;

3° Depuis $s+1$ jusqu'à l'infini.

La première partie se compose de termes variant d'une manière continue, et peut être rendue, par conséquent, aussi voisine qu'on le voudra de sa valeur limite zéro, si l'on prend α suffisamment petit.

La deuxième partie, comme le facteur de ε_m est toujours positif, est évidemment plus petite, abstraction faite du signe, que

$$\delta\left[\left(\frac{\sin m\alpha}{m\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin s\alpha}{s\alpha}\right)^2\right].$$

Pour trouver enfin des limites entre lesquelles soit renfermée la troisième partie, décomposons son terme général en deux parties,

$$\varepsilon_n\left\{\left[\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right]^2-\left[\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right]^2\right\},$$

$$[illegible] \Big] - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 \Big\} = -\varepsilon_n \frac{\sin(2n-1)\alpha \sin\alpha}{(n\alpha)^2}.$$

[illegible] Il est clair que le terme général est plus petit que

$$[illegible] \left[\frac{1}{(n-1)^2\alpha^2} - \frac{1}{n^2\alpha^2}\right] + \frac{\delta}{n^2\alpha^2},$$

[illegible] depuis $s+1$ jusqu'à l'infini est plus petite [illegible]

$$[illegible] \frac{1}{s\alpha} - \frac{1}{s\alpha}\Big),$$

[illegible] petit, se transforme en

$$[illegible]$$

[illegible]

$$\sum [illegible] \Big] - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 \Big\}$$

[illegible] valeur décroissante de α, d'une valeur [illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] est nulle ; et, partant, l'expression

$$[illegible]$$

$$\sum [illegible] - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 \Big\}$$

[illegible] vers la limite $f(x)$; ce [illegible] pour $x = [illegible]$.

[illegible]

$$[illegible] = [illegible] [f(x) + \delta_1],$$

$$[illegible] = [illegible] [f(x) - \delta_2],$$

'où

$$(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)$$
$$= 4\alpha\beta f(x) + (\alpha+\beta)^2\delta_1 - (\alpha-\beta)^2\delta_2.$$

Par suite de la démonstration déjà faite, δ_1 et δ_2 sont infiniment etits quand α et β le sont : donc il en sera de même de

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta}\delta_1 - \frac{(\alpha-\beta)^2}{4\alpha\beta}\delta_2,$$

ourvu que les coefficients de δ_1 et de δ_2 ne deviennent pas infinis, e qui n'a pas lieu si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ demeure fini; et, par suite,

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

›nverge vers $f(x)$. C. Q. F. D.

Théorème II.

$$\frac{F(x+2\alpha) + F(x-2\alpha) - 2F(x)}{2\alpha}$$

t toujours infiniment petit avec α.

Pour le démontrer, partageons la série $\sum A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2$ en trois oupes, dont le premier contienne tous les premiers termes jusqu'à ı certain indice m, à partir duquel A_n demeure inférieur à ε; le cond, tous les termes suivants pour lesquels $n\alpha$ est plus petit ı'une quantité déterminée c; le troisième, tous les autres termes : la série. Il est facile de voir que, si α décroît, la somme du preier groupe fini demeure finie, c'est-à-dire plus petite qu'une quanté déterminée Q; celle du second, plus petite que $\varepsilon\frac{c}{\alpha}$; celle du oisième, plus petite que $\varepsilon\sum_{c<n\alpha}\frac{1}{n^2\alpha^2} < \frac{\varepsilon}{\alpha c}$.

ar suite,

$$\frac{F(x+2\alpha) + F(x-2\alpha) - 2F(x)}{2\alpha},$$

ui est égal à

$$2\alpha\sum A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2,$$

est inférieur à

$$2\left[Q x - \varepsilon\left(c - \frac{1}{c}\right)\right].$$

D'où résulte le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

Théorème III. — *Si l'on désigne par b et c deux constantes arbitraires, dont la plus grande est c, et par $\lambda(x)$ une fonction qui demeure finie entre b et c, et s'annule aux deux limites, dont la première dérivée ait les mêmes propriétés, et dont la seconde dérivée n'ait pas un nombre infini de maxima et de minima, l'intégrale*

$$\mu^2 \int_b^c F(x) \cos \mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx,$$

quand μ croît indéfiniment, devient plus petite que toute quantité donnée.

Remplaçons $F(x)$ par son expression en série dans l'intégrale précédente, nous obtiendrons pour cette intégrale la série

$$\mu^2 \int_b^c \left(C - C'x - A_0\frac{x^2}{2}\right)\cos \mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$

$$- \sum_1^{\infty} \frac{\mu^2}{n^2} \int_b^c A_n \cos \mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx.$$

$A_n \cos \mu(x-a)$ peut évidemment se décomposer en une somme de quatre termes,

$$\cos(\mu+n)(x-a),\quad \sin(\mu+n)(x-a),$$
$$\cos(\mu-n)(x-a),\quad \sin(\mu-n)(x-a);$$

et, si l'on désigne par $B_{\mu+n}$ la somme des deux premiers, et par $B_{\mu-n}$ celle des deux derniers, on aura

$$A_n \cos \mu(x-a) = B_{\mu+n} + B_{\mu-n},$$

$$\frac{d^2 B_{\mu+n}}{dx^2} = -(\mu+n)^2 B_{\mu+n}, \quad \frac{d^2 B_{\mu-n}}{dx^2} = -(\mu-n)^2 B_{\mu-n},$$

et $B_{\mu+n}$, $B_{\mu-n}$ deviendront infiniment petits, quand n croîtra indéfiniment.

erme général de la série (Φ),

$$-\frac{\mu^2}{n^2}\int_b^c A_n \cos\mu(x-a)\lambda(x)\,dx,$$

›nc s'écrire

$$\frac{\cdot^2}{+n)^2}\int_b^c \frac{d^2B_{\mu+n}}{dx^2}\lambda(x)\,dx + \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int_b^c \frac{d^2B_{\mu-n}}{dx^2}\lambda(x)\,dx,$$

intégrant deux fois par parties, et considérant d'abord $\lambda(x)$, $x)$ comme constantes,

$$\frac{\mu^2}{\iota+n)^2}\int_b^c B_{\mu+n}\lambda''(x)\,dx + \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int_b^c B_{\mu-n}\lambda''(x)\,dx,$$

: $\lambda(x)$ et $\lambda'(x)$ deviennent nuls aux limites de l'intégration.
'assure facilement que $\int_b^c B_{\mu\pm n}\lambda''(x)\,dx$ devient infiniment uel que soit n, si μ croît indéfiniment; car cette expression posée des intégrales

$$(\mu\pm n)(x-a)\lambda''(x)\,dx, \quad \int_b^c \sin(\mu\pm n)(x-a)\lambda''(x)\,dx.$$

n devient infini, ces intégrales deviennent infiniment pe-ı, n devenant infini avec μ, $\mu\pm n$ reste fini, ce sont, au con-les coefficients de ces intégrales dans $B_{\mu\pm n}$ qui deviennent ent petits.

la démonstration de notre théorème, il suffira donc évidem-: montrer que la somme

$$\sum \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2},$$

: à toutes les valeurs entières de n qui satisfont aux con-

$$n < -c', \quad c'' < n < \mu - c''', \quad \mu + c^{\text{iv}} < n,$$

:s valeurs positives quelconques des quantités c, reste finie, μ devient infini; car, en faisant abstraction des termes pour .s

$$-c' < n < c'', \quad \mu - c''' < n < \mu + c^{\text{iv}},$$

qui sont en nombre fini et deviennent évidemment infiniment petits, il est clair que la série (Φ) demeure plus petite que la somme précédente multipliée par la plus grande valeur de

$$\int_b^c \mathrm{B}_{\mu\pm n}\lambda''(x)\,dx,$$

qui est infiniment petite.

Maintenant, si les quantités c sont plus grandes que l'unité, la somme

$$\sum \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2} = \frac{1}{\mu}\sum \frac{\frac{1}{\mu}}{\left(1-\frac{n}{\mu}\right)^2\left(\frac{n}{\mu}\right)^2},$$

prise entre les limites précédentes, est plus petite que l'intégrale

$$\frac{1}{\mu}\int \frac{dx}{x^2(1-x)^2},$$

étendue de $-\infty$ à $-\frac{c'-1}{\mu}$, de $\frac{c''-1}{\mu}$ à $1-\frac{c'''-1}{\mu}$, de $1+\frac{c^{\text{IV}}-1}{\mu}$ à $+\infty$; car si, en partant de zéro, on sépare l'intervalle entier de $-\infty$ à $+\infty$ en intervalles de la grandeur de $\frac{1}{\mu}$, et que l'on remplace partout la fonction sous le signe $\int$ par sa plus petite valeur dans l'intervalle considéré, on obtient, puisque la fonction n'a aucun maximum entre les limites de l'intégration, tous les termes de la série.

Si l'on effectue l'intégration, on trouve

$$\frac{1}{\mu}\int \frac{dx}{x^2(1-x)^2} = \frac{1}{\mu}\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}+2\log x-2\log(1-x)\right]+\text{const.},$$

et, par suite, entre les limites déjà indiquées, une valeur qui ne devient pas infinie avec μ.

(*A suivre.*)

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

HERMITE (Ch.), membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences. — COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE. *Première Partie*, contenant le *Calcul différentiel* et les *Premiers Principes du Calcul intégral*. Un fort Volume, imprimé sur vélin, avec figures dans le texte. — Paris, Gauthier-Villars; 1873. — Prix : 14 fr. (1).

Il ne nous appartient pas de faire l'éloge d'un Livre dont l'auteur est un des géomètres éminents de notre époque, qui a contribué pour une large part aux progrès de la théorie des formes et des fonctions. Le Traité de M. Hermite est conçu au point de vue des idées nouvelles, et met en lumière les progrès les plus récents de l'Analyse; c'est donc un de ces Ouvrages dont il suffit de signaler l'apparition : aussi nous contenterons-nous d'un compte rendu très-sommaire, que nous ferons suivre de la Table des matières.

Une Introduction d'une cinquantaine de pages est consacrée au développement de plusieurs notions importantes sur les fonctions algébriques et sur le rôle des variables imaginaires dans l'étude des fonctions.

Les principes du Calcul différentiel, ainsi que les applications géométriques du Calcul différentiel et du Calcul intégral, sont exposés sous une forme concise; M. Hermite réserve son Ouvrage pour les développements de questions moins connues et renvoie, pour de plus amples détails, aux Traités de M. Bertrand et de M. J.-A. Serret. Signalons cependant la question du contact géométrique, qui est traitée avec une remarquable netteté et une grande généralité.

Le Calcul intégral est la partie la plus importante et la plus difficile du Calcul infinitésimal; c'est là que se trouve l'origine de tant de notions analytiques nouvelles et fécondes acquises de nos jours, de combinaisons analytiques que l'Algèbre ne saurait obtenir, par exemple, celle des séries qui sont convergentes et ne sont pas nécessairement continues.

C'est à cette belle étude, qui, en permettant de concevoir les fonctions dans leur sens le plus général, conduit à une infinité de

(1) La *seconde Partie* contiendra la fin du Calcul intégral.

transcendantes nouvelles et ouvre à l'Analyse un horizon infini, qu'est principalement consacré le Traité de M. Hermite.

La première Partie ne renferme que les premiers principes du Calcul intégral. L'auteur insiste d'abord, et à juste titre, sur le changement de la variable qui ramène l'intégrale proposée à une autre que l'on sait obtenir. En premier lieu, se présente la question d'énumérer et de définir les expressions rationnelles et transcendantes dont l'intégrale peut se réduire, par une substitution, à celle d'une fonction qui est rationnelle par rapport à la nouvelle variable. Cette première partie du Calcul intégral comprend environ 200 pages; là se trouvent exposées les premières notions relatives aux courbes unicursales.

La théorie des courbes unicursales, enrichie des découvertes de Clebsch, de MM. Chasles, Cayley, etc. (*Journal de Borchardt*, t. 63, p. 189, t. 64, p. 210, etc.; *Comptes rendus*, t. LXII, p. 579, etc.), est la traduction géométrique du problème d'Algèbre suivant : « Étant donnée l'équation $F(x,y) = 0$, dont le premier membre est un polynôme entier en x et y, reconnaître s'il est possible d'exprimer x et y en fonction rationnelle d'une variable auxiliaire ». On voit par là la liaison intime qui existe entre cette théorie et le problème des quadratures, puisqu'on peut ainsi connaître un changement de variables qui réduit l'intégrale $\int f(x,y)\,dx$, où y est lié à x par l'équation $F(x,y) = 0$, à celle d'une fonction rationnelle. C'est là un des plus importants et des plus beaux résultats de la méthode d'intégration par substitution; et, comme le dit M. Hermite (p. XII), « on voit dans les parties élevées du Calcul intégral toute l'importance de la considération des points multiples, et comment elle devient l'un de ces liens que la science de notre époque, et surtout les beaux travaux de Clebsch, ont révélés entre la Géométrie supérieure et l'Analyse ».

[illegible] est traitée avec étendue; [illegible] d'Analyse, des calculs [illegible] grande élégance. Nous [illegible] de la partie algé- [illegible] que l'on n'a plus besoin [illegible] si ce n'est pour former la [illegible]

Le procédé de la décomposition en éléments simples est ensuite appliqué à la recherche de l'intégrale des expressions transcendantes

$$f(\sin x, \cos x), \quad e^{\omega x} f(x), \quad e^{\omega x} f(\sin x, \cos x),$$

qui sont les seules fonctions dont on puisse aborder généralement l'intégration, f étant la caractéristique d'une fonction rationnelle. Les développements que M. Hermite fait connaître offrent une analogie complète avec la décomposition des fonctions rationnelles; l'auteur en présente un résumé très-net à la page 381 de son Ouvrage.

La première Partie du Cours de M. Hermite s'arrête aux équations différentielles; en terminant cette analyse succincte, nous devons exprimer le regret de n'avoir encore que cette première Partie.

TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE.

grale $\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n+1}}$. — Des intégrales définies $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x - a - b\sqrt{-}}$ [illegible] $\int \frac{\sin a\, dx}{[illegible]}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C}$. — Intégration des foncti[ons] algébriques qui dépendent de la racine carrée d'un polynôme. — De l'i[ntégrale] $\int \frac{[illegible]}{Ax^2 + 2Bx + C}$. — Des intégrales $\int \frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{Ax^2 + 2Bx - }}$ [illegible] Applications. — *Intégration des fonctions trans[cendantes]* [illegible]. De l'intégrale $\int (\sin x, \cos x)\, dx$. — De l'intégrale $\int e^{ax} f(x)\, dx$. De l'intégrale $\int [illegible] (\sin x, \cos x)\, dx$. — De l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sin x, \cos x) f(x)\, d$ [illegible]

[illegible] — Remarques préliminaires. — *Quadrature d*[illegible] — Courbes du second degré; cycloïde. — Courbes unicursa[les] [illegible] — *Rectification des courbes*. — Parab[ole] [illegible] Des courbes algébriques dont l'arc s'exprime par la fonction ellip[tique] [illegible] — Des fonctions algébriques dont l'intégrale est [illegible] — Volumes des corps limités par d[illegible] Quadrature des surfaces courbes quelconques. — V[illegible] — Évaluation approchée des intégrales.

L. P.

[illegible] École Normale supérieure. — [illegible]

[illegible] Prix [illegible]

[illegible]

[illegible] Sciences [illegible]

[illegible]

n'avais pu traiter avec le développement qu'elles me paraissaient mériter.

Le but principal de l'ensemble de ce travail est l'étude d'une classe remarquable de surfaces du quatrième ordre, que je propose l'appeler *cycliques*, et qui admettent une conique double spéciale, e cercle de l'infini. Ces surfaces peuvent se décomposer en un plan, e plan de l'infini, et en une surface du troisième ordre, qui conient le cercle de l'infini. Elles donnent donc, par une transformaion homographique, la surface la plus générale du quatrième ordre à conique double, et la surface du troisième ordre. J'ai dû oindre à leur étude, pour la rendre à la fois plus nette et plus complète, celle des courbes qui jouent le même rôle qu'elles dans la Géométrie à deux dimensions. Ces courbes, que j'appelle *cycliques*, sont, soit les courbes planes du quatrième ordre ayant pour points doubles les deux points à l'infini sur le cercle, soit les courbes sphériques qui résultent de l'intersection de la sphère avec une surface du second degré. Quelques propriétés relatives aux imaginaires se présentaient naturellement dans l'étude que j'avais entreprise; il m'a paru qu'il y aurait avantage à les développer avec la généralité qu'elles comportent. Ces explications justifieront, je l'espère, la composition et le plan de mon travail.

La première Partie est consacrée à l'étude de la transformation, par rayons vecteurs réciproques, des foyers et des focales. Depuis 1869, bien des recherches importantes ont été, ou mieux connues, ou publiées sur les différentes méthodes de transformation. J'ai cru devoir conserver néanmoins les développements que j'avais présentés sur ce sujet, parce qu'ils sont élémentaires, et aussi parce qu'ils se rapportent à la plus intéressante de toutes les transformations considérées jusqu'à présent. J'ai ajouté à cette Partie, au moment de l'impression, l'indication d'un moyen nouveau et très-simple de former l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée. Les théories relatives aux imaginaires expliquent nettement, ce qui n'avait pas été fait jusqu'ici, les solutions singulières de l'équation aux dérivées partielles à laquelle on est conduit.

La deuxième Partie contient une étude détaillée des cycliques planes et sphériques. J'y examine les propriétés générales, la classification des différentes espèces de cycliques, et les propriétés mé-

[illegible] à la généralisation des propositions connues [illegible]

[illegible] la plus grande analogie [illegible] par les rapports les [illegible] sur les polygones [illegible] avec quelques [illegible] en Géométrie. La [illegible] des imaginaires; [illegible] indispensables, je [illegible] pour étendre [illegible] des propositions [illegible] de signaler aussi [illegible] focales [illegible] des propositions [illegible] de la théorie de ces [illegible]. Les Notes [illegible] se rapportant [illegible] pendant [illegible] j'avais [illegible]

[illegible] analytique [illegible] plus facile [illegible]

duire à des théorèmes intéressants, et en particulier à une méthode de transformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure qui a été déjà donnée par M. Bonnet. Je généralise d'une manière assez étendue cette méthode de transformation.

Les Notes contiennent des développements relatifs à la Géométrie de M. Cayley, à la transformation par rayons vecteurs réciproques, et à un système de coordonnées qui s'applique à la fois aux points, aux plans et aux sphères. M. Lie, professeur à l'Université de Christiania, a, le premier, considéré la sphère comme un élément de l'espace, et il a su établir les relations les plus intéressantes entre la Géométrie des sphères et celle des lignes droites. Ne voulant développer ici que mes recherches personnelles, je me suis borné, dans les dernières Notes de cet Ouvrage, à l'étude des cyclides, de leurs normales, de leurs sphères tangentes et des courbes remarquables qu'on peut tracer et déterminer sur ces surfaces.

La deuxième et la quatrième Partie sont précédées d'une courte Notice historique. Quelques remarques et rectifications portant sur des travaux dont j'ai eu connaissance après avoir terminé sont placées à la fin des Notes.

Je serais heureux de voir ce travail, dont je sens autant que personne les imperfections, accueilli avec bienveillance par les géomètres. Puisse-t-il amener quelques-uns d'entre eux à des études qui forment un intermédiaire et un lien naturel entre la théorie des quadriques et celle des surfaces de degré supérieur, empruntant ainsi au rang qu'elles occupent une importance et un intérêt qu'on ne saurait méconnaitre.

TABLE DES MATIÈRES.

sphériques. — 13. De la génération des cycliques. — 14. Classification des cycliques. — 15. Propriétés générales des cycliques. — 16. Des relations entre les différents modes de génération d'une cyclique. — 17. Des différents modes de génération pour les diverses espèces de cycliques. — 18. Des cartésiennes. — 19. Des propriétés focales des cycliques. — 20. Des cycliques situées sur des cylindres. — 21. Des coniques sphériques. — 22. Des cycliques planes. — 23. Des cartésiennes. — 24. De la transformation par rayons vecteurs réciproques dans les cycliques, et des transformations de ces courbes les unes dans les autres. — 25. Du système orthogonal formé par les cycliques homofocales. — 26. Des cycliques analogues à l'ellipse de Cassini.

IIIe Partie. — *Étude de certaines propriétés des imaginaires en Géométrie, et d'une classe générale de courbes algébriques, comprenant comme cas particulier la courbe de Cassini.* — 27. Des points associés dans le plan. — 28. D'une classe générale de courbes. — 29. Du système orthogonal formé avec les courbes précédentes. — 30. Des courbes lieux des points d'où l'on voit plusieurs segments sous des angles dont la somme est nulle. — 31. Des rapports entre la théorie générale des cycliques et celle des fonctions elliptiques. — 32. De l'ellipse de Cassini. — 33. Des points associés à la surface de la sphère. — 34. Des courbes sphériques analogues aux courbes planes déjà considérées. — 35. Des courbes sphériques pour lesquelles les pôles de chaque série sont deux à deux diamétralement opposés. Propriétés correspondantes des cônes algébriques, ayant ces courbes pour base. — 36. Des courbes lieux des points desquels on voit plusieurs segments de grand cercle sous des angles dont la somme est nulle. — 37. Des systèmes orthogonaux formés à la surface de la sphère avec les courbes précédentes. — 38. Démonstrations nouvelles des théorèmes de Poncelet relatifs aux polygones inscrits et circonscrits aux coniques, déduites des principes précédents. — 39. Transformation des propositions précédentes par la méthode des figures supplémentaires.

IVe Partie. — *Étude analytique des cyclides.* — 40. Introduction. — 41. Propriétés générales des cyclides. — 42. Des sphères doublement tangentes aux cyclides. — 43. Des plans tangents doubles et des focales des cyclides. — 44. Généralités sur les surfaces anallagmatiques. — 45. D'un mode de transformation déduit de la théorie des anallagmatiques. — 46. De la forme générale des cyclides, du nombre de leurs focales et de leurs sections circulaires réelles. — 47. Du système des cyclides homofocales. — 48. Du système de cinq sphères orthogonales. — 49. Des cyclides homofocales. — 50. Du système de coordonnées curvilignes formé avec les cyclides homofocales et orthogonales. — 51. Applications aux cyclides homofocales. — 52. Applications des formules relatives aux cyclides à la surface générale du troisième ordre, et à la surface du quatrième ordre à conique double.

Ve Partie. — *Étude géométrique des cyclides.* — 53. Des focales singulières et des sections circulaires. — 54. Des relations entre les cinq modes de génération des cyclides. — 55. Classification des cyclides. — 56. De la cyclide du troisième degré. — 57. Des podaires ou réciproques des quadriques. — 58. De la cyclide de M. Dupin, ou cyclide à quatre points coniques. — 59. Des cyclides

ayant pour déférentes les surfaces inscrites dans la sphère. — 60. Des sections planes et sphériques des cyclides. — 61. Du système orthogonal formé par les cyclides homofocales, et des propriétés d'une méthode de transformation déjà définie. — 62. Généralisation des notions de normales, de focales et de lignes de courbure.

NOTES ET ADDITIONS. — I. De l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée. — II. Sur une démonstration analytique des théorèmes de Poncelet, et sur un nouveau système de coordonnées dans le plan. — III. Sur la démonstration directe des théorèmes de Géométrie sphérique exposés dans la IIIe PARTIE. — IV. Sur quelques surfaces remarquables du second degré et sur les cyclides correspondantes. — V. Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure dans la Géométrie de M. Cayley. — VI. Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques et la théorie des pôles secondaires des cyclides. — VII. Sur les différentes transformations par lesquelles on peut déduire du tore la cyclide de M. Dupin. — VIII. De la transformation, par rayons vecteurs réciproques, des surfaces anallagmatiques. — IX. Des surfaces qui demeurent invariables quand on les transforme par polaires réciproques, et des méthodes de transformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure. — X. Sur un nouveau système de coordonnées et son application à la théorie des cyclides. — XI. Application du système de coordonnées considéré dans la Note précédente à la théorie des cyclides. — XII. Sur le problème des normales aux cyclides. — XIII. Sur les cyclides homofocales et orthogonales et sur leur surface des centres de courbure. — XIV. Sur quelques propriétés de Géométrie infinitésimale relatives aux cyclides. — XV. De différents systèmes de lignes définies par des propriétés différentielles et qu'on peut déterminer sur toutes les cyclides. — XVI. De quelques analogies entre la théorie des cyclides et celle des surfaces du second ordre.

Remarques et rectifications.

Liste des Mémoires se rapportant au sujet traité dans cet Ouvrage et publiés dans ces dernières années.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH [1]. — In-4°.

T. XXVI (suite et fin); 1870-1871.

PETTIGREW (J.-B.). — *Sur la physiologie des ailes; analyse des mouvements qui produisent le vol chez l'insecte, la chauve-souris et l'oiseau.* (128 p.)

---

[1] Voir *Bulletin*, t. II, p. 200.

Dans ce Mémoire, l'auteur entre dans des détails très-complets sur les mouvements en forme de 8 que l'aile décrit dans l'espace. Il a expérimenté successivement avec des ailes *naturelles* et des ailes *artificielles*, et a fait voir, à l'aide d'un grand nombre de modèles et de dessins, qu'il est possible de construire des ailes artificielles approchant beaucoup des ailes naturelles. Ses résultats s'accordent avec ceux qu'a obtenus M. Marey.

Sang (E.). — *Note additionnelle sur le mouvement d'un corps pesant suivant la circonférence d'un cercle.* (9 p.)

Dans un Mémoire publié dans le tome XXIV du présent Recueil, l'auteur a exposé une méthode pour calculer très-rapidement le temps total de l'oscillation d'un pendule. L'objet de la Note actuelle est de montrer comment on peut calculer la durée d'une portion donnée quelconque de l'oscillation totale. Il traite la question générale suivante : « Un corps pesant étant projeté avec une vitesse connue le long de la circonférence d'un cercle, calculer le temps au bout duquel il atteindra une position donnée quelconque, ainsi que la place qu'il occupera au bout d'un temps donné quelconque ». L'auteur emploie une transformation qui n'est autre que la transformation connue des intégrales elliptiques, à l'aide de moyennes arithmétiques et géométriques alternativement, et à laquelle il parvient par la construction d'une suite indéfinie de triangles. De cette manière, il ramène l'intégration à celle d'une formule

$$dt.\sqrt{2g} = \frac{dS}{\sqrt{s^2 - r^2 \sin^2 S}},$$

dans laquelle le rapport $\frac{s}{r}$ est aussi voisin de l'unité, de l'infini ou de zéro que l'on voudra.

Sang (E.). — *Notice sur une nouvelle Table de logarithmes jusqu'à* 200000.

L'auteur donne le détail des procédés qu'il a employés pour calculer les logarithmes à 15 décimales des 200 000 premiers nombres, et pour faire imprimer sa Table, réduite à 7 décimales, avec toute la correction possible. Il rappelle, à la fin de sa Note, qu'en 1819 une proposition avait été faite à la Chambre des Communes en vue d'engager le Gouvernement anglais à s'entendre avec le Gouverne-

ment français pour la publication de grandes Tables logarithmiques et trigonométriques, extraites du manuscrit exécuté par le Bureau du Cadastre. Malheureusement il ne fut pas donné suite à cette proposition.

RANKINE (W.-J.-Macquorn). — *Sur la décomposition des forces appliquées extérieurement à un solide élastique.* (13 p.)

Les principes exposés dans ce Mémoire avaient été déjà communiqués, il y a seize ans [1], à l'Académie des Sciences de Paris, dans un travail intitulé : « De l'équilibre intérieur d'un corps solide, » élastique et homogène », portant cette devise :

Obvia conspicimus, nubem pellente Mathesi.

L'auteur rappelle d'abord un théorème découvert par lui [2], savoir : que « tout système de forces qui se font mutuellement équi- » libre, appliqué à un système de points liés entre eux, est suscep- » tible de décomposition en trois systèmes rectangulaires de forces » parallèles aux mêmes points et se faisant mutuellement équilibre » dans chaque système ».

Les composantes rectangulaires des forces étant désignées par X,..., les six sommes ou intégrales

$$\Sigma Xx,\quad \Sigma Yy,\quad \Sigma Zz,\quad \Sigma Yz = \Sigma Zy,\quad \Sigma Zx = \Sigma Xz,\quad \Sigma Xy = \Sigma Yx$$

sont ce que l'auteur appelle les *coefficients rhopimétriques* du système. Les axes principaux d'un ellipsoïde, dont l'équation est déterminée par ces coefficients, sont dits les axes *isorrhopiques*. En prenant ces axes pour axes coordonnés, les trois derniers coefficients deviennent nuls, et les trois systèmes de forces qui leur sont parallèles sont séparément en équilibre.

Ce théorème s'étend à un système en mouvement, en remplaçant X,..., par $X - m\dfrac{d^2x}{dt^2}, \ldots$. L'auteur examine les particularités correspondant aux diverses valeurs des coefficients rhopimétriques.

MAXWELL (J.-Clerk). — *Sur la distance moyenne géométrique de deux figures dans un plan.* (5 p.)

---

[1] Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 6 avril 1857, t. XLIV, p. 706.
[2] *Philosophical Magazine*, December 1855.

GLOTIN. — *De quelques moyens pratiques de diviser les angles en parties égales.* (26 p.; 1 pl.)

T. III; 1864-1865.

LE BESGUE (V.-A.). — *Tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers.* (38 p.)

BAUDRIMONT (A.). — *Deuxième Mémoire sur la structure des corps.* (92 p.)

BAUDRIMONT (A.). — *Propagation des ondes dans les milieux isaxiques et hétéraxiques.* (18 p.)

LE BESGUE (V.-A.). — *Tables donnant, pour la moindre racine primitive d'un nombre premier ou puissance d'un nombre premier : 1° les nombres qui correspondent aux indices; 2° les indices des nombres premiers et inférieurs au module.* (44 p.)

T. IV; 1866-1867.

LOBATCHEFSKY (N.-I.). — *Études géométriques sur la théorie des parallèles.* Suivi d'un *Extrait de la Correspondance de Gauss et de Schumacher.* (Traduit par J. Hoüel.) (46 p.)

PÉCHADERGNE. — *Note sur le phénomène de dépolarisation apparente de la lumière dans son passage à travers une lame cristallisée.* (3 p.)

HOÜEL (J.). — *Recueil de formules et de Tables numériques.* (LXXI-64 p.)

T. V; 1867-1868.

HOÜEL (J.). — *Théorie élémentaire des quantités complexes.* 1re Partie : *Algèbre des quantités complexes.* (64 p.)

LESPIAULT (G.). — *Théorie géométrique de la variation des éléments des planètes.* (26 p.)

BOLYAI (J.). — *La Science absolue de l'Espace.* Précédé d'une *Notice sur la vie et les travaux de* W. *et de* J. BOLYAI, *par* Fr. SCHMIDT. (Traduit par J. Hoüel.) (60 p.)

LACOLONGE (O. DE). — *Un puits doit-il être ouvert ou foncé?* (14 p.)

Lacolonge (O. de). — *Examen de divers moyens proposés pour faire contribuer la traction à l'adhérence des locomotives.* (13 p.)

Valat. — *Des polyèdres semi-réguliers, dits solides d'Archimède.* (51 p.)

Helmholtz (H.). — *Sur les faits qui servent de base à la Géométrie.* (7 p.)

Hoüel (J.). — *Sur une formule de Leibnitz.* (10 p.)

Lespiault (G.). — *Théorie géométrique des tautochrones, dans le cas où la force est fonction de l'arc à parcourir.* (6 p.)

T. VI; 1868-1870.

Hoüel (J.). — *Théorie élémentaire des quantités complexes.* 2e Partie : *Théorie des fonctions uniformes.* (144 p.)

Collins (M.). — *Mélanges de Géométrie.* (14 p., 2 pl.; angl.)

Linder. — *Du nombre des freins qu'il convient d'introduire dans les trains de chemin de fer.* (32 p.)

Frenet (F.). — *Sur une formule de Gauss.* (8 p.)

Expression de la mesure de la courbure d'une surface en coordonnées curvilignes.

T. VII; 1869.

Linder. — *Note sur les variations séculaires du magnétisme terrestre.* (20 p.)

T. VIII; 1870-1872.

Hoüel (J.). — *Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles dit* postulatum *d'Euclide.* (8 p.)

Abria. — *Sur les couleurs des lames cristallisées dans la lumière polarisée.* (21 p.)

Abria. — *Observations sur les variations horaires de la déclinaison de l'aiguille aimantée, du lundi 29 au mardi 30 août 1870.*

Houel (J.). — *Théorie élémentaire des quantités complexes. 3e Partie : Théorie des fonctions multiformes.* (79 p.)

Cette nouvelle Partie de l'Ouvrage de M. Houël, dont il a été fait, comme des autres, un tirage à part, comprend l'étude des fonctions multiformes, et nous allons mettre sous les yeux de nos lecteurs le tableau des principales divisions de l'Ouvrage de notre collaborateur.

Chapitre Ier. Transformation d'une fonction multiforme en fonction uniforme, au moyen des surfaces de Riemann. — § I. Introduction. § II. Des fonctions multiformes en général. § III. Représentation des fonctions multiformes à plusieurs points de ramification. § IV. Des points de ramification à l'infini.

Chapitre II. Étude d'une fonction multiforme dans le voisinage d'un point donné. — § I. De la déformation continue des surfaces. § II. Résidus et indices des points de ramification.

Chapitre III. Intégrales des fonctions multiformes. — § I. Ordre de connexion des surfaces. § II. Nombre des contours d'une surface d'un ordre de connexion donné. Détermination de l'ordre de connexion d'une sphère multiple. § III. Réduction à une sphère simplement connexe de la sphère correspondant à la fonction $\sqrt{(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_m)}$. § IV. Intégrale d'une différentielle uniforme et continue sur une portion donnée de la sphère de Riemann.

Chapitre IV. Application des principes précédents à la théorie des fonctions elliptiques. — § I. Propriétés fondamentales des fonctions ϑ d'un seul argument. § II. Inversion de l'intégrale elliptique de première espèce.

Frenet (F.). — *Note sur la fonction Θ de Jacobi.* (11 p.)

Voici comment l'auteur expose le but et les résultats de son étude : « Dans l'intéressant Ouvrage qu'il a consacré à la théorie des fonctions elliptiques [1], M. Schellbach, s'inspirant des leçons et de l'exemple de Jacobi, a pris pour point de départ la fonction Θ, que le grand géomètre a introduite dans l'Analyse. A l'aide d'un petit nombre de notions simples, il parvient rapidement à cette

---

[1] *Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen.* Berlin, 1864. 1 vol. in-8°.

6. Mémoire sur le mouvement d'une ligne d'air et sur le mouvement des ondes dans le cas où les vitesses des molécules ne sont pas supposées très-petites [1813]. T. XX. 1811-1812. (21 p.)

7. Sur la latitude et la longitude de l'Observatoire de Turin. T. XXII, 1813-1814. (55 p.)

III. *Memorie della R. Accademia delle Scienze di* Torino. In-4°.

8. Mémoire sur les intégrales définies. T. XXIII, 1818. (46 p.)

9. Observations astronomiques faites à l'Observatoire de l'Académie de Turin. T. XXIII, 1818. (55 p.)

10. Solution de différents problèmes relatifs à la loi de la résultante de l'attraction exercée sur un point matériel par le cercle, les couches cylindriques, et quelques autres corps qui en dépendent par la forme de leurs éléments. T. XXIV, 1819. (62 p.)

11. Note sur la théorie des ondes donnée par Poisson. T. XXV, 1820. (42 p.)

12. Note sur une nouvelle expression analytique des nombres bernoulliens, propre à exprimer en termes finis la formule générale pour la sommation des suites. T. XXV, 1820. (16 p.)

13. Note sur l'intégration de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} + gx^m y = 0$. T. XXVI, 1821. (2 Art., 20-10 p.)

14. Recherches analytiques sur la densité des couches de l'atmosphère et la théorie des réfractions astronomiques [1822]. T. XXVI, 1823. (180 p.)

15. Relazione delle operazioni astronomiche eseguite in Savoia dai due astronomi Plana e Carlini, per la misura di un parallelo terrestre. T. XXVIII, 1824.

16. Rapport sur les travaux entrepris pour comparer avec le mètre l'ancienne coudée trouvée à Memphis, etc. (avec Bidone). T. XXX, 1826.

17. Note sur un Mémoire de M. de Laplace, ayant pour titre : « Sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne », imprimé dans la *Connaissance des Tems* pour l'année 1829. — Remarques sur les formules relatives au mouvement du dernier satellite de Saturne, obtenues par M. de Laplace dans la page 13 de son Mémoire « Sur divers points de Mécanique céleste », imprimé dans la *Connaissance des Tems* pour l'année 1829. — Remarque

l'inégalité de Mercure à longue période. — T. XXXI, 1827. 8 p.)

8. Sur l'intégration de l'équation linéaire $\frac{d^n y}{dx^n}+\ldots$, dans le particulier où le polynôme $Z = z^n + \ldots$, renferme un nombre lconque de racines égales [1828]. T. XXXI, 1827. (23 p.)

9. Observations astronomiques faites, en 1822-1825, à l'Obserire Royal de Turin, précédées d'un Mémoire sur les réfractions onomiques. T. XXXII, 1828.

0. Méthode élémentaire pour découvrir et démontrer la possité des nouveaux théorèmes sur la théorie des transcendantes ptiques, publiés par M. Jacobi dans le n° 123 du Journal *Astronische Nachrichten* [1828]. T. XXXIII, 1829. (24 p.)

21. Mémoire sur la partie du coefficient de la grande inégalité Jupiter et Saturne, qui dépend du carré de la force perturbace [1828]. — Note relative au cinquième article du Mémoire inulé : « Sur la partie du coefficient de la grande inégalité, etc. » XXXIV, 1830. (43–2 p.)

22. Note sur le calcul de la partie du coefficient de la grande égalité de Jupiter et Saturne, qui dépend du carré de la force erturbatrice [1829]. T. XXXV, 1831. (76 p.)

23. Mémoire sur le développement des termes du cinquième rdre, qui font partie du coefficient de la grande inégalité de Juiter et Saturne [1832]. T. XXXVI, 1833. (136 p.)

24. Passaggio della cometa di Biela pel suo perielio. T. XXXVII, 834.

25. Mémoire sur le mouvement d'un pendule dans un milieu ésistant. T. XXXVIII, 1835. (167 p.)

IV. *Memorie della R. Accademia di* Torino. *Serie II^a*. In-4°.

26. Mémoire sur la chaleur des gaz permanents. T. V, 1843. 84 p.) (1).

27. Mémoire sur la découverte de la loi du choc direct des corps lurs, publiée en 1667 par Alphonse Borelli, et sur les formules générales du choc excentrique des corps durs ou élastiques, avec la

(1) Voir *Rendiconto delle adunanze e de' lavori della Reale Accademia delle Scienze* Napoli. T. IV, 1845. (In-4°, 10 p.)

'une autre sphère conductrice électrisée que l'on tient isolée dans : cavité [1854]. T. XVI, 1857. (40 p.)

39. Démonstration nouvelle de l'équation

$$(t+x\sqrt{-1})+\varphi(t-x\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}\alpha\varphi(t)+\alpha'[\varphi(t+x)+\varphi(t-x)] + \alpha''[\varphi(t+2x)-\varphi(t-2x)] + \alpha'''[\varphi(t+3x)+\varphi(t-3x)]+\ldots$$

onnée par Lagrange pour exprimer la valeur réelle de la somme e deux quantités imaginaires, en supposant connues les valeurs e $\varphi(t)$ par le moyen d'une courbe. T. XVI, 1857. (14 p.)

40. Mémoire sur l'application du principe de l'équilibre magnéque à la détermination du mouvement qu'une plaque horizontale e cuivre, tournant uniformément sur elle-même, imprime, par action, ou à une aiguille aimantée assujettie à lui demeurer rallèle, ou à une aiguille d'inclinaison mobile dans un plan vercal fixe. T. XVII, 1858. (98 p.)

41. Note sur la théorie de la lumière polarisée. T. XVIII, 1859. p.)

42. Mémoire sur l'équation séculaire du moyen mouvement de Lune. T. XVIII, 1859. (59 p.)

43. Recherches historiques sur la première explication de l'équaon séculaire du moyen mouvement de la Lune, d'après le prinpe de la gravitation universelle. T. XVIII, 1859. (77 p.)

44. Note sur le procès de Galilée [1858]. T. XVIII, 1859. (12 p.)

45. Mémoire sur un rapprochement nouveau entre la théorie oderne de la propagation linéaire du son, dans un tuyau cylinique horizontal d'une longueur indéfinie, et la théorie des puls, exposée par Newton dans les deux propositions XLVII XLIX du 2e Livre des *Principes* [1857]. T. XVIII, 1859. (83 p.)

46. Mémoire sur le mouvement conique, à double courbure, pendule simple, dans le vide, abstraction faite de la rotation ne de la Terre [1857]. T. XVIII, 1859. (36 p.)

47. Note sur les pages 68, 69 et 75 du second Volume des *Opus- analytica* d'Euler, publié en 1785. T. XVIII, 1859. (4 p.)

48. Mémoire sur les formules propres à déterminer la parallaxe nuelle des étoiles simples ou optiquement doubles [1858]. XVIII, 1859. (16 p.)

49. Note sur un passage de la Préface à la seconde édition des *Principia mathematica* de Newton, composée en 1713 par Roger Cotes. T. XIX, 1861. (4 p.)

50. Mémoire sur la célèbre expérience de Newton contre la possibilité de l'achromatisme par la réfraction de la lumière à travers deux substances différentes [1858]. T. XIX, 1861. (18 p.)

51. Mémoire sur l'observation de l'éclipse partielle du Soleil du 15 mars 1858 [1858]. T. XIX, 1861. (8 p.)

52. Sur la Théorie de la Lune : Lettres à M. Lubbock [1860]. T. XIX, 1861. (24 p.)

53. Note sur un cas particulier du mouvement elliptique [1860]. T. XIX, 1861. (14 p.)

54. Sur les coefficients théoriques déterminés par Tobie Mayer relativement aux deux inégalités lunaires en longitude ayant pour arguments $(2E - 2g - c'm)nt$, $(2E - 2g - c'm)nt$. T. XIX, 1861. (6 p.) (1).

55. Nota sull'ecclisse parziale del Sole visibile in Torino, nel giorno 18 Luglio 1860. T. XX, 1863. (2 p.)

56. Lettre à M. Poisson avec sa réponse [1823]. T. XX, 1863. (1 p.)

57. Osservazione del passaggio di Mercurio sul disco del Sole, fatta al R. Osservatorio di Torino, la mattina del 12 Novembre 1861. T. XX, 1863. (2 p.)

58. Mémoire sur le mouvement du centre de gravité d'un corps solide lancé vers la Terre, entre les centres de la Lune et de la Terre, supposés fixes immédiatement après l'impulsion [1859]. T. XX, 1863. (86 p.)

59. Réflexions sur la Préface d'un Mémoire de Lagrange intitulé : « Solution d'un problème d'Arithmétique », publié dans le t. IV des *Miscellanea Taurinensia*. T. XX, 1863. (2 art., 22-4 p.)

60. Mémoire sur la théorie des nombres [1859]. T. XX, 1863. (38 p.)

---

(1) Ce Mémoire et le précédent sont indiqués dans la Table des matières du Volume sous le titre commun de :

53-54. Mémoire sur l'expression analytique des deux inégalités à longue période produites par l'attraction de Vénus sur la longitude de la Lune [1860]. (20 p.)

Le Mémoire n° 54 avait déjà paru dans les *Astronomische Nachrichten*. Voir n° 138.

1. Réflexions sur les objections soulevées par Arago contre la
rité de Galilée, pour la double découverte des taches solaires
es et de la rotation uniforme du globe du Soleil [1860]. T. XX,
3. (38 p.)
2. Mémoire sur la théorie des transcendantes elliptiques [1860].
X, 1863. (106 p.)
3. Note sur l'origine de la fonction W définie au commence-
it du premier paragraphe du « Mémoire sur la théorie des trans-
dantes elliptiques. » T. XX, 1863. (8 p.)
4. Mémoire sur l'intégration des équations différentielles rela-
s au mouvement des comètes, établies suivant l'hypothèse de la
e répulsive définie par M. Faye, et suivant l'hypothèse d'un
ieu résistant dans l'espace [1861]. T. XXI, 1864. (18 p.)
5. Mémoire sur un état hypothétique des surfaces de niveau
is les nébulosités qui entourent le noyau des comètes, supposé
de et sphérique [1862]. T. XXI, 1864. (37 p.)
6. Mémoire sur l'expression du rapport qui (abstraction faite
la chaleur solaire) existe, en vertu de la chaleur d'origine, entre
efroidissement de la masse totale du globe terrestre et le refroi-
ement de sa surface [1863]. T. XXII, 1865. (78 p.)
7. Mémoire sur la loi du refroidissement des corps sphériques
ur l'expression de la chaleur solaire dans les latitudes circom-
ires de la Terre [1863]. T. XXII, 1865.
8. Mémoire sur les formules du mouvement circulaire et du
ivement elliptique [1864]. T. XXIV, 1868. (44 p.)

Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, residente in Modena. In-4°.

9. Memoria sulla teoria dell' attrazione degli sferoidi ellittici.
XV, 1811. (21 p.)
0. Memoria sopra la costruzione della curva nella quale l'arco s
ato in funzione di $\frac{dy}{dx}$. T. XVI, 1813.
1. Soluzione generale di un problema di probabilità. T. XVIII,
18. (15 p.)
2. Sopra il movimento di un punto materiale attratto da due
tri fissi, l'uno di questi essendo supposto infinitamente lontano.
XIX, 1821. (17 p.)

73. Memoria intorno al raggio assoluto del circolo osculatore ed alle evolute delle curve a doppia curvatura descritte sopra la superficie della sfera. T. XXIV, 1848. (19 p.)

VI. *Annales de Mathématiques pures et appliquées, par* J.-D. GERGONNE. Nîmes. In-4°.

74. Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques homogènes. T. III, 1812-1813. (7 p.)

75. Sur le développement des puissances des cosinus en cosinus d'arcs multiples. T. XI, 1820-1821. (6 p.)

76. Éclaircissements sur la théorie de l'intégrale $\int \frac{dx}{\log x}$, prise depuis $x = 0$. T. XII, 1821-1822. (13 p.)

VII. *Journal de l'École Polytechnique*. Paris. In-4°.

77. Mémoire sur les oscillations des lames élastiques. T. X, 1815. (2 art., 47-2 p.)

VIII. *Biblioteca Italiana, ossia Giornale di Litteratura, Scienze, etc.* Milano. In-8°.

78. Riflessioni sopra la 1ª Parte dell' Opera del Sig. Ant. Tadini intitolata : « Del movimento e della misura delle acque correnti ». T. III, 1816. (20 p.)

IX. *Zeitschrift für Astronomie; von* B. LINDENAU *und* J. G. F. BOHNENBERGER. In-8°.

79. Ueber die durch die Secular-Bewegung der Ebene der Ecliptik bewirkten Veränderungen in der Lage der Fixsterne. T. IV, 1817. (21 p.)

80. Sternbedeckungen. T. V, 1818. (2 p.)

81. Allgemeine Formeln um nach der Methode der kleinsten Quadrate die Verbesserungen von 6 Elementen zu berechnen und zugleich das jeder derselben zukommende Gewicht zu bestimmen. T. VI, 1818. (16 p.)

X. *Effemeridi astronomiche di* Milano. In-4°.

82. Metodo analitico per determinare la figura apparente dell' annello di Saturno e la configurazione de' suoi satelliti. 1819. (15 p.)

XI. *Correspondance astronomique, géographique, hydrographique et statistique;* par FR. VON ZACH. Gênes. In-8°.

83. Résultat des observations solsticiales de l'année 1818. T. II, 1819. (6 p.)

84. Lettre : Distances méridiennes du Soleil au zénith observées à Turin, etc. T. III, 1819. (6 p.)

85. Note sur la densité et la pression des couches du sphéroïde terrestre. T. V, 1821. (2 Art., 12-2 p.)

86. Réflexions sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des fluides qui recouvrent un sphéroïde solide à peu près sphérique. T. V, 1821. (2 Art., 29-24 p.)

87. Explication de la méthode du capitaine Elford pour réduire en distances vraies les distances apparentes de la Lune au Soleil ou à une étoile. T. V, 1822. (10 p.)

88. Note sur la proposition XLV du Ier Livre des *Principes* de Newton, où il cherche le mouvement des apsides dans les orbes qui approchent beaucoup des orbes circulaires. T. IX, 1823. (16 p.)

89. Remarques sur une formule donnée dans la *Mécanique céleste* (T. I, p. 262), pour développer les perturbations de la latitude des planètes. T. XII, 1825. (9 p.)

90. Démonstration de la formule propre à calculer la latitude d'un lieu par les distances au zénith de la polaire observées dans un point quelconque de son parallèle. T. XII, 1825. (7 p.)

91. Intégration des formules propres à déterminer les équations séculaires des éléments des planètes et des comètes produites par la résistance d'un milieu très-rare. T. XIII, 1825. (19 p.)

92. Note sur le mouvement sidéral du nœud formé par l'orbite de Vénus et le plan variable de l'écliptique. T. XIII, 1825. (4 p.)

93. Note sur une formule publiée dans la page 339 du Livre XV de la *Mécanique céleste*. T. XIII, 1825. (6 p.)

94. Occultations derrière la Lune observées à Turin, depuis 1812 jusqu'à 1817. T. XIII, 1825. (2 p.)

95. Lettre sur la question « si la théorie peut établir *a priori* la division de l'anneau de Saturne en plusieurs anneaux concentriques ». T. XIII, 1825. (5 p.)

96. Sur la correction thermométrique de la réfraction moyenne. T. XIII, 1825. (12 p.)

l'ellipsoïde dont les trois axes sont inégaux, et sur l'évaluation de la surface d'une voûte symétrique, à la base rectangulaire, retranchée dans la moitié du même ellipsoïde. T. XVII, 1837. (18 p.)

118. Mémoire sur différents procédés d'intégration par lesquels on obtient l'attraction d'un ellipsoïde homogène, dont les trois axes sont inégaux, sur un point extérieur. T. XX, 1840. (82 p.) T. XXVI, 1843. (15 p.)

119. Note sur l'intégrale $\int \frac{dM}{r} = V$, qui exprime la somme des éléments de la masse d'un ellipsoïde divisés respectivement par leur distance d'un point attiré. T. XX, 1840. (12 p.)

120. Nouvelle formule pour réduire l'intégrale $V = \int \frac{T\,dx}{\sqrt{X}}$ à la forme trigonométrique des transcendantes elliptiques, les polynômes T et X ayant cette forme :

$$T = G + G'x + G''x^2 + \frac{H + H'\sqrt{-1}}{1 + (K + K'\sqrt{-1})x} + \frac{H - H'\sqrt{-1}}{1 + (K - K'\sqrt{-1})x},$$

$$X = x^4 + \lambda x^3 + Ax^2 + Bx + D.$$

T. XXXVI, 1848. (74 p.)

XVIII. *Giornale Arcadico di Scienze, etc.* Roma. In-8°.

121. Nota sopra lo sviluppo in serie del radicale

$$[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-\frac{1}{2}},$$

esprimente il valore inverso della distanza fra due punti situat nello spazio. T. CIV, 1845. (30 p.)

122. Memoria sulla dimostrazione dell' equazione $1 - n - 2k = 0$ che lega le due n e k nella formola di Ampère, per la quale s esprime la forza motrice fra due elementi di correnti voltaiche Principali consequenze inerenti all' esistenza di questa equazione T. CX, 1847. (40 p.)

123. Sopra una nuova serie esprimente la forza motrice fra du correnti voltaiche situate nel medesimo piano per il caso in cu sono entrambe circolari, oppure una ellittica, e l'altra circolare

XIX. *Raccolta di Lettere, etc., intorno alla Fisica ed alle Matematiche; dal* C. PALOMBA. Roma. In-8°.

124. Confronto delle formole pubblicate nel 1751, da Eulero, con quelle pubblicate nel 1826, da Legendre, per ridurre la quadratura di una superficie alla rettificazione di una curva piana. T. II, 1846. (7-7 p.)

125. Dimostrazione analitica del teorema scoperto da Landen nel 1771, per esprimere la lunghezza di un dato arco iperbolico mediante una linea retta e la differenza fra due archi ellittici di diversa eccentricità. T. II, 1846. (8 p.)

126. Riduzione di una data quadratura alla rettificazione della somma di due archi, pertinenti a due curve piane descritte sopra la medesima ascissa con ordinate ortogonali diverse. T. II, 1846. (4 p.)

127. Sopra le formole matematiche atte a risolvere i problemi relativi all' azione emanata dalle correnti voltaiche circolari. T. III, 1847. (4 art., 9-8-7-12 p.)

128. Intorno alle formole atte a paragonare colla teoria le osservazioni fatte sull' azione che le correnti terrestri esercitano sopra i conduttori voltaici perfettamente mobili nell' ipotesi che queste correnti fossero di figura circolare. T. III, 1847. (12 p.)

XX. *Astronomische Nachrichten.* Altona. In-4°.

129. Mémoire sur la direction probable que M. Galloway assigne au mouvement propre du système solaire dans son écrit présenté le 15 avril de l'année 1847 à la Société Royale de Londres. T. XXXIV, 1852. (26 col.)

130. Note sur la manière de calculer le décroissement d'intensité que la photosphère du Soleil subit en traversant l'atmosphère qui l'entoure. T. XXXIV, 1852. (6 col.)

131. Note sur la densité moyenne de l'écorce superficielle de la Terre. T. XXXV, 1853. (16 col.) (¹).

132. Note sur la figure de la Terre et la loi de la pesanteur à sa

(¹) Voir *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society of* London. T. XIII, 1852-53. (In-8°, 2 p.) — *The Edinburgh New Philosophical Journal,* by ROB. JAMESON. T. LV, 1853. (In-8°, 2 p.)

surface, d'après l'hypothèse d'Huygens, publiée en 1690. T. XXXV, 1853. (8 col.)

133. Mémoire sur la théorie mathématique de la figure de la Terre, publiée par Newton en 1687, et sur l'état d'ellipsoïde fluide à trois axes inégaux. T. XXXVI, 1853. (28 col.)

134. Mémoire sur la loi des pressions et la loi des ellipticités des couches terrestres, en supposant leur densité uniformément croissante depuis la surface jusqu'au centre. T. XXXVI, 1853. (22 col.)

135. Mémoire sur la loi de la pesanteur à la surface de la mer, dans son état d'équilibre. T. XXXVIII, 1854. (14 col.)

136. Mémoire sur la théorie du magnétisme. T. XXXIX, 1855. (16-4 col.). T. XLII, 1856. (44 col.)

137. Formules relatives au mouvement d'un point soumis à l'action d'une force centrale R, dont la loi, à la distance r, est exprimée par $R = \frac{A}{r^2} + Er$. Remarque sur le mouvement du périgée de la Lune calculé par Newton. T. XLIII, 1856. (8 col.)

138. Note sur les coefficients théoriques, déterminés par Tobie Mayer, relativement aux inégalités lunaires ayant pour argument $(2E - 2g + c'm)nt$, $(2E - 2g - c'm)nt$. T. XLIV, 1856 (4 col.) (¹).

139. Sur l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune. T. XLIV, 1856. (6 col.)

140. Mémoire sur les formules propres à déterminer la parallaxe annuelle des étoiles simples ou optiquement doubles. T. XLIX, 1859. (14 col.)

XXI. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society of* London. In-8°.

141. Note sur les pages 60 et 61 du Ier volume de sa *Théorie du mouvement de la Lune*. T. XVI, 1855-56. (5 p.)

XXII. *Il Nuovo Cimento*. Pisa. In-8°.

142. Mémoire sur l'application, etc. (*Voir* n° 40). T. II, 1855. (20 p.)

143. Nota sulla probabile formazione della moltitudine di aste-

(¹) *Voir* la Note relative au n° 54.

roidi che circolano intorno al Sole tra Marte e Giove. T. III, 1856. (5 p.) (¹).

144. Nota sulla formazione probabile della moltitudine degli asteroidi, che tra Marte e Giove circolano intorno al Sole. T. XIII, 1861. (6 p.)

145. Nota sulla configurazione originaria degli annelli, la cui materia esiste attualmente nello spazio, trasformata in varii pianeti circolanti attorno al Sole tra Marte e Giove. T. XIII, 1861. (9 p.)

146. Nota sulla fulgentissima Cometa veduta da Torino la notte del 30 Giugno 1861. T. XIV, 1861. (5 p.)

SUR LA POSSIBILITÉ DE REPRÉSENTER UNE FONCTION PAR UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE;

PAR B. RIEMANN.

(Suite.)

§ 9.

A l'aide de ces trois théorèmes, on peut énoncer les propositions suivantes sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique dont les termes finissent par devenir infiniment petits pour toute valeur de l'argument.

I. Pour qu'une fonction périodique, ayant 2π pour période, puisse être représentée par une série trigonométrique dont les termes finissent par devenir infiniment petits pour toute valeur de x, il faut qu'il existe une fonction continue $F(x)$, dont $f(x)$ dépende de telle manière que l'expression

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta},$$

où α et β sont des infiniment petits dont le rapport est fini, converge vers $f(x)$.

(¹) Voir *Corrispondenza scientifica in Roma per l'avanzamento delle Scienze.* T. IV, 1856. (In-4°, 2 p.)

Il faut, de plus, que l'intégrale

$$\mu^2 \int_b^c F(x) \cos \mu (x-a) \lambda(x)\, dx,$$

lorsque $\lambda(x)$ et $\lambda'(x)$ sont nuls aux limites b, c, et demeurent finis entre ces limites, et que $\lambda''(x)$ n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, devienne infiniment petite quand μ augmente indéfiniment.

II. Réciproquement, si ces conditions sont satisfaites, il y a une série trigonométrique, dans laquelle les coefficients finissent par devenir infiniment petits, et qui représente la fonction toutes les fois qu'elle est convergente.

Déterminons, en effet, les quantités C', A_0, de telle manière que $F(x) - C'x - A_0 \frac{x^2}{2}$ soit une fonction périodique, de période 2π, et développons cette fonction d'après la méthode de Fourier dans la série trigonométrique

$$C - \frac{A_1}{1} - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} - \ldots,$$

en faisant

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[F(t) - C't - A_0 \frac{t^2}{2} \right] dt = C,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[F(t) - C't - A_0 \frac{t^2}{2} \right] \cos n (x-t)\, dt = -\frac{A_n}{n^2}:$$

alors, d'après ce qui précède,

$$A_n = -\frac{n^2}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[F(t) - C't - A_0 \frac{t^2}{2} \right] \cos n (x-t)\, dt$$

deviendra toujours infiniment petit quand n croîtra, et, par suite, il résulte, du théorème I de l'article précédent, que la série

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots,$$

toutes les fois qu'elle sera convergente, aura pour somme $f(x)$.

III. Soit $b < x < c$, et $\rho(t)$ une fonction telle que $\rho(t)$ et $\rho'(t)$ aient, pour $t = b$ et pour $t = c$, la valeur zéro, et qu'elles soient continues entre ces limites; que $\rho''(t)$ n'ait pas un nombre infini de maxima et de minima, et que d'ailleurs, pour $t = x$, on ait

$\rho(t) = 1$, $\rho'(t) = 0$, $\rho''(t) = 0$, $\rho'''(t)$ et $\rho^{\text{iv}}(t)$ demeurant finies et continues; alors la différence entre la série $A_0 + A_1 + \ldots + A_n$ et l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\,\frac{d^2\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\rho(t)\,dt$$

devient toujours infiniment petite, quand n croît indéfiniment. La série sera donc convergente ou divergente, suivant que l'intégrale précédente tendra ou ne tendra pas vers une limite fixe, quand n croîtra indéfiniment.

Pour établir cette proposition, remarquons que l'on a

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(t) - C't - \frac{A_0 t^2}{2}\right]\sum_1^n - n^2\cos n(x-t)\,dt,$$

ou, à cause de

$$2\sum_1^n - n^2\cos n(x-t) = 2\sum_1^n \frac{d^2\cos n(x-t)}{dt^2}$$
$$= \frac{d^2\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2},$$

$$A_1 + \ldots + A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(t) - C't - \frac{A_0 t^2}{2}\right]\frac{d^2\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\,dt.$$

Or, d'après le théorème III de l'article précédent, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(t) - C't - A_0\frac{t^2}{2}\right]\frac{d^2\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\lambda(t)\,dt$$

devient infiniment petite quand n croît indéfiniment, si $\lambda(t)$ demeure continue, ainsi que sa première dérivée, si $\lambda''(t)$ n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, et si, pour $t = x$, on a $\lambda(t) = 0$, $\lambda'(t) = 0$, $\lambda''(t) = 0$, $\lambda'''(t)$ et $\lambda^{\text{iv}}(t)$ demeurant finies et continues.

Cela posé, si l'on prend $\lambda(t)$ égal à 1, en dehors des limites b, c, et à $1 - \rho(t)$, entre ces limites, ce qui est évidemment permis, il résulte de là que la différence entre la série $A_1 + \ldots + A_n$ et l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c \left[F(t) - C't - A_0\frac{t^2}{2}\right] \frac{d^2 \dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\, \rho(t)\, dt$$

devient toujours infiniment petite, quand n croît indéfiniment. On vérifie facilement, au moyen d'une intégration par parties, que le terme

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c \left(C't + A_0\frac{t^2}{2}\right) \frac{d^2 \dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\, \rho(t)\, dt$$

tend vers A_0, quand n devient infini, d'où résulte la démonstration du théorème proposé.

§ 10.

Il résulte des recherches précédentes que, si les coefficients de la série Ω finissent par devenir infiniment petits avec $\frac{1}{n}$, la convergence de la série, pour une valeur déterminée de x, dépend seulement de la manière dont se comporte la fonction dans le voisinage immédiat de cette valeur.

Pour reconnaître si les coefficients de la série deviennent toujours infiniment petits, on ne pourra pas toujours partir de leur expression par des intégrales définies, et l'on devra avoir recours à d'autres méthodes. Il importe cependant de considérer à part un cas où cette propriété résulte immédiatement de la nature de la fonction,

à savoir : celui où la fonction $f(x)$ demeure toujours finie et est susceptible d'intégration.

Dans ce cas, si l'on sépare l'intervalle complet de $-\pi$ à $+\pi$ en petits intervalles de grandeurs δ_1, δ_2, $\delta_3, \ldots$, et si l'on désigne par D_1, D_2, $D_3, \ldots$ les plus grandes oscillations de la fonction dans ces intervalles, la somme

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \delta_3 D_3 + \ldots$$

devra devenir infiniment petite, quand tous les δ tendront vers zéro.

Cela posé, si l'on partage l'intégrale $\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin n(x-a)\,dx$, qui représente, au facteur $\frac{1}{\pi}$ près, les différents coefficients de la série, ou, ce qui est la même chose, l'intégrale

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) \sin n(x-a)\,dx,$$

prise à partir de $x = a$, en intégrales partielles correspondant à des intervalles égaux à $\frac{2\pi}{n}$, alors chacune d'elles fournit à la somme une portion plus petite que $\frac{2}{n}$ multiplié par la plus grande oscillation dans son intervalle, et leur somme est plus petite qu'une grandeur qui, d'après les hypothèses, devient infiniment petite avec $\frac{2\pi}{n}$.

En effet, ces intégrales sont de la forme

$$\int_{a+s\frac{\pi}{n}}^{a+(s+1)\frac{\pi}{n}} f(x) \sin n(x-a)\,dx.$$

Le sinus est positif dans la première moitié de l'intervalle, et négatif dans la seconde. Si donc on désigne par M la plus grande valeur de $f(x)$ dans cet intervalle, par m la plus petite, il est clair qu'on augmente l'intégrale si, dans la première moitié de l'intervalle, on remplace $f(x)$ par M, et dans la seconde moitié par m, et que l'on diminue l'intégrale si, dans la première moitié, on rem-

place $f(x)$ par m, et dans la seconde par M. Dans le premier c:
on obtient

$$\frac{2}{n}(\mathrm{M}-m),$$

et, dans le second,

$$\frac{2}{n}(m-\mathrm{M}).$$

L'intégrale, abstraction faite du signe, est donc plus petite qu
$\frac{2}{n}(\mathrm{M}-m)$, et, par suite, l'intégrale $\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin n(x-a)d$:
est plus petite que

$$\frac{2}{n}(\mathrm{M}_1-m_1)+\frac{2}{n}(\mathrm{M}_2-m_2)+\ldots,$$

si l'on désigne par M_s et m_s la plus grande et la plus petite valeu
de $f(x)$ dans le $s^{\text{ième}}$ intervalle. Cette somme, puisque $f(x)$ est sus-
ceptible d'intégration, doit devenir infiniment petite toutes les foi
que l'intervalle $\frac{2\pi}{n}$ tend vers zéro.

Donc, dans le cas que nous avons supposé, les termes deviendron
infiniment petits avec $\frac{1}{n}$, quel que soit x.

§ 11.

Il reste encore à examiner le cas où les termes de la série Ω de-
viennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour une valeur de l'argument x
sans que cela ait lieu pour toute valeur de cet argument. Ce ca
peut se ramener au précédent.

Si, dans les séries relatives aux valeurs de l'argument $x+t$ e
$x-t$, on ajoute les termes de même rang, on obtient la série

$$2\mathrm{A}_0+2\mathrm{A}_1\cos t+2\mathrm{A}_2\cos 2t+\ldots,$$

dans laquelle les termes deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pou
toute valeur de t, et à laquelle on peut, par conséquent, applique
les méthodes des articles précédents.

Désignons, pour cela, par $G(t)$ la valeur de la série infinie

$$C + C'x + A_0\frac{x^2}{2} + A_0\frac{t^2}{2} - A_1\frac{\cos t}{1} - A_2\frac{\cos 2t}{4} - A_3\frac{\cos 3t}{9} - \ldots,$$

de telle manière que $\dfrac{F(x+t)+F(x-t)}{2}$ soit égal à $G(t)$ pour toutes les valeurs de t pour lesquelles les séries qui représentent $F(x+t)$ et $F(x-t)$ sont convergentes. On aura alors les propositions suivantes :

I. Si les termes de la série Ω deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour toute valeur de x, alors la fonction

$$\mu^2 \int_c^b G(t)\cos\mu(t-a)\lambda(t)\,dt,$$

$\lambda(t)$ étant une fonction définie comme précédemment (§ 9), devient infiniment petite quand μ croît au delà de toute limite. La valeur de l'intégrale se compose de deux parties

$$\frac{\mu^2}{2}\int_c^b F(x+t)\cos\mu(t-a)\lambda(t)\,dt,\quad \frac{\mu^2}{2}\int_c^b F(x-t)\cos\mu(t-a)\lambda(t)\,dt,$$

toutes les fois que ces deux intégrales ont une valeur déterminée. La valeur de l'intégrale est donc rendue infiniment petite par la manière dont se comporte la fonction F en deux points situés symétriquement au-dessus et au-dessous de x. Il faut d'ailleurs remarquer qu'il doit exister, dans le cas actuel, des points pour lesquels chacune de ces parties, considérée en elle-même, ne devient pas infiniment petite; car autrement tous les termes de la série Ω finiraient par devenir infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour toute valeur de l'argument x. Par conséquent, les valeurs correspondant à ces deux points, situés symétriquement par rapport à x, doivent alors se détruire en partie, de manière que leur somme tende vers zéro quand μ croît indéfiniment. Il s'ensuit que la série Ω ne peut être convergente que pour des valeurs de la quantité x pour lesquelles les points où

$$\mu^2 \int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\lambda(x)\,dx$$

lieu, dès que l'on suppose que la fonction à représenter est susceptible d'intégration; mais cette hypothèse n'est pas nécessaire.

Nous avons vu plus haut que, si les termes de la série Ω deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour toute valeur de x, la fonction $F(x)$, dont $f(x)$ est la seconde dérivée, doit être finie et continue, et que

$$\frac{F(x+\alpha)-2F(x)+F(x-\alpha)}{\alpha}$$

est toujours infiniment petit avec α. Si maintenant la fonction

$$F'(x+t)-F'(x-t)$$

n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, alors, quand t deviendra nul, elle devra tendre vers une limite finie L ou devenir infinie, et il est évident que

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha [F'(x+t)-F'(x-t)]\,dt=\frac{F(x+\alpha)-2F(x)+F(x-\alpha)}{\alpha}$$

devra de même converger vers L ou vers l'infini, et, par suite, que cette expression ne deviendra infiniment petite que si

$$F'(x+t)-F'(x-t)$$

a zéro pour limite. D'après cela, si $f(x)$ devient infini pour $x=a$, il faut que l'on puisse toujours intégrer $f(a+t)+f(a-t)$ jusqu'à $t=0$. Cela suffit pour que

$$\left(\int_b^{a-\varepsilon}+\int_{a+\varepsilon}^{c}\right)dx f(x)\cos n(x-a)$$

converge lorsque ε tend vers zéro, et devienne infiniment petit quand n croît. Comme d'ailleurs la fonction $F(x)$ est finie et continue, $F'(x)$ doit être susceptible d'intégration jusqu'à $x=a$, et $(x-a)F'(x)$ devenir infiniment petit avec $x-a$, si cette fonction n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, d'où il suit que

$$\frac{d.(x-a)F'(x)}{dx}=(x-a)f(x)+F'(x),$$

et, partant, que $(x-a)f(x)$ pourra aussi être intégré jusqu'à $x=a$. D'après cela, $\int f(x) \sin n(x-a)\,dx$ peut aussi être intégré jusqu'à $x=a$, et, pour que les coefficients de la série finissent par devenir infiniment petits, il suffira évidemment que l'intégrale $\int_b^c f(x) \sin n(x-a)\,dx$, où $b<a<c$, devienne infiniment petite, quand n croît. Posons $f(x)(x-a)=\varphi(x)$; alors, si cette fonction, comme on le suppose, n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, on aura, pour n infini,

$$\int_b^c f(x) \sin n(x-a)\,dx = \int_b^c \frac{\varphi(x)}{x-a} \sin n(x-a)\,dx$$

$$= \frac{\varphi(a+0)+\varphi(a-0)}{2},$$

comme Dirichlet l'a prouvé. En conséquence,

$$\varphi(a+t)+\varphi(a-t)=f(a+t).t-f(a-t).t$$

doit devenir infiniment petit avec t, et comme

$$f(a+t)+f(a-t)$$

peut être intégré jusqu'à $t=0$ et que, par suite,

$$f(a+t).t+f(a-t).t$$

est infiniment petit avec t, on voit que $f(a+t).t$ et aussi $f(a-t).t$ doivent être infiniment petits avec t. En faisant abstraction des fonctions qui ont un nombre infini de maxima et de minima, nous voyons qu'il est nécessaire et suffisant, pour la représentation d'une fonction par une série trigonométrique dont les termes sont infiniment petits avec $\frac{1}{n}$, que, si elle devient infinie pour $x=a$, $f(a+t).t$ et $f(a-t).t$ soient infiniment petits avec t, et que $f(a+t)+f(a-t)$ puisse être intégré jusqu'à $t=0$.

Une série trigonométrique dont les coefficients ne finissent pas par devenir infiniment petits ne peut représenter que pour un nombre fini de valeurs de x une fonction qui n'a pas un nombre

$$\frac{\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{2\sqrt{\psi''(\alpha)}}$$

$^{-\frac{\mu}{2}}$, et, par suite, ne sera pas infiniment petit, énéral, si $x\psi'(x)$ ou, ce qui est la même chose, ìniment grand pour x infiniment petit, on ›isir $\varphi(x)$ de telle manière que $x\varphi(x)$ soit inr, et que

$$= \frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\frac{d}{dx}\frac{1}{\psi'(x)}}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\lim\frac{1}{x\psi'(x)}}}$$

t grand, et, par suite, l'intégrale $\int_x f(x)\,dx$ tir de zéro, sans que $\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx$ petite quand n croît indéfiniment. Comme on $\int_x f(x)\,dx$, les accroissements de l'intégrale, :ro, se compensent, quoique leur rapport à la se très-rapidement pendant les rapides chan- e la fonction; par l'introduction du facteur ient ce résultat, que les accroissements de l'invaleur les uns aux autres.

s venons de voir que, pour une fonction tou- ıtégration, la série de Fourier peut n'être pas es termes de cette série peuvent devenir infi- z, de même aussi on peut indiquer des fonc- is susceptibles d'intégration, et pour lesquelles ou : infinité de valeurs de x prises entre ›1 s qu'on le veut.

e cas dans la fonction représentée

petit. On a d'ailleurs

$$\frac{dy}{dx} = \psi''(\alpha)(x-\alpha) = \pm$$

suivant que $x - \alpha \gtrless 0$, et

$$-\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(x)\psi'(x)\sin y\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{\beta+\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon^2}{2}}^{\beta} - \int_{\beta}^{\beta+\psi''}\right.$$

$$= -\int_0^{\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon^2}{2}} \sin(y+\beta)$$

Si l'on fait décroître la quantité
que $\psi''(\alpha)\varepsilon^2$ devienne infini, alo

$$\int_0^{\infty} \sin($$

qui est égal, comme on sait, à,
en faisant abstraction de quan

$$-\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(x)\psi'(x$$

$$= -\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)$$

Si donc cette dernière gran
comme l'intégrale relative a
rapport de $\int_0^{2\pi} f(x)\cos n$
vergera vers l'unité.

Si l'on suppose que φ
petit, du même ordre qu
de l'ordre de x^n, $\psi'(x)$ d

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

THOMAE (J.). — Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen. *Zweite vermehrte Auflage.* Mit 20 in den Text gedruckten Holzschnitten. — Halle, Louis Nebert, 1873. In-8°. 1 Thlr. 22½ Sg

VACQUANT (C.). — Leçons d'Algèbre élémentaire. In-8°, 451 p. Paris, Delagrave, 1872.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

VERDET (E.). — ŒUVRES. 8 volumes grand in-8°, avec figures. — Paris, Imprimerie Nationale; 1868-1873. — Prix : 75 fr.

En livrant à la publicité les Mémoires scientifiques de M. Verdet et les Cours professés par lui, il importe de faire connaître au lecteur le plan qui a été suivi et les motifs qui en ont déterminé le choix.

L'héritage scientifique de ce savant comprend surtout des notes et des rédactions de Cours ; sans doute, elles auraient pu lui servir à préparer un Traité général de Physique; mais, pour réaliser une œuvre pareille, aucune collaboration ne pouvait le remplacer. On a dû se borner à reproduire dans le meilleur ordre possible les leçons recueillies par ses élèves, en évitant les répétitions qu'aurait entraînées la publication de Cours faits sur les mêmes sujets à des auditoires différents. Il est résulté de là une série d'études d'inégale importance ; mais chacune des parties est complète, suivant un programme déterminé, et il a paru que, telle qu'elle est, cette publication ne serait pas inutile à la science ou indigne de la mémoire de M. Verdet. On y retrouvera certainement l'empreinte de cette haute érudition, de cette méthode sûre, de cette exposition limpide qui caractérisaient son enseignement.

C'est aux élèves de M. Verdet qu'il appartenait de reconstruire l'œuvre du maître : les souvenirs récents de son enseignement et de sa méthode, leurs relations personnelles avec lui rendaient leur coopération indispensable. Les travaux dus à plusieurs d'entre eux, devenus aussi des maîtres, ne pouvaient laisser aucun doute sur la manière dont ils s'acquitteraient de cette tâche. Ils l'ont prise à cœur dans un sentiment de généreuse et touchante affection, mettant le soin le plus scrupuleux à s'effacer eux-mêmes pour reproduire, avec les idées propres à l'auteur, sa forme littéraire simple et large, concise et forte.

Avant de fixer la part que chacun d'eux a prise à l'œuvre générale, qu'il nous soit permis de leur associer dans le sentiment d'une vive et profonde reconnaissance MM. Henri Sainte-Claire Deville,

de la Rive, Pasteur, Briot, Bertin, Bertrand, Gavarret, Grandeau, Cornu, L. Fresnel, dont les conseils, les témoignages d'intérêt ou le concours dévoué ont facilité le choix d'un plan définitif et la préparation de cette entreprise délicate.

L'ensemble de la publication comprend huit Volumes.

Le tome Ier renferme, avec la notice que M. de la Rive a consacrée à la mémoire de l'auteur et à l'appréciation de ses œuvres, les travaux originaux de M. Verdet, dispersés dans divers Recueils, depuis sa thèse de docteur ès sciences jusqu'à l'Introduction aux œuvres de A. Fresnel, dont il avait terminé le manuscrit peu de temps avant sa mort. Publiée avec l'édition des œuvres de A. Fresnel sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, cette Introduction avait été imprimée par les soins de MM. L. Fresnel, Gavarret et Cornu. M. Mascart, ancien élève de l'École Normale, s'est chargé de revoir les épreuves de ce Volume.

Les tomes II et III comprennent le Cours de l'École Polytechnique. Ce Cours suit un programme déterminé, qui est complet en deux années; il avait été autographié pour les élèves de l'École, sur des rédactions fournies par M. Verdet. Certaines parties de ces rédactions étaient trop sommaires pour être livrées telles quelles au public. En effet, le professeur ne se contentait pas d'exposer l'état de la Science, souvent il supposait connus les résultats définitivement acquis, et n'insistait que sur les questions en litige, d'où un jugement ferme et une critique sûre pouvaient faire jaillir quelque lumière nouvelle (1).

M. Fernet, répétiteur à l'École Polytechnique et ancien élève de l'École Normale, s'est chargé de revoir ces deux Volumes ; il a cherché à mettre dans l'ensemble une harmonie qui en rendît la lecture facile à d'autres qu'aux seuls auditeurs du Cours ; ses retouches ont été faites avec un soin minutieux et un grand respect de la forme adoptée par l'auteur.

Les nécessités d'un programme rédigé en vue de certaines applications ne permettaient pas au professeur de l'École Polytechnique de donner un égal développement à toutes les questions qui sont du domaine de la Physique ; on a donc pensé qu'il serait utile de

(1) C'est par là surtout que cette publication aura sa place marquée à côté des Traités classiques antérieurs.

compléter ces deux Volumes par un troisième comprenant des conférences données à l'École Normale sur des questions qui n'auraient pas reçu de développement dans les deux précédents ; M. Gernez, ancien élève de l'École Normale et professeur de Physique au Lycée Saint-Louis, a accepté cette tâche, dont on appréciera certainement l'utilité.

Les tomes V et VI forment un Cours de Physique supérieure et traitent de l'Optique physique. Ils ont été confiés à M. Levistal, docteur ès sciences, ancien élève de l'École Normale, qui a rendu un si remarquable hommage à la mémoire de son maître, dans la séance annuelle de la Société des Amis des Sciences. M. Levistal a rattaché avec bonheur dans un même ensemble un Cours professé par M. Verdet à la Sorbonne et deux Cours faits à l'École Normale.

Enfin les tomes VII et VIII comprennent l'exposé de la Théorie mécanique de la chaleur. Les deux leçons faites par M. Verdet, à la Société Chimique, en 1862, ont été réimprimées en tête du Volume comme une Introduction naturelle. MM. Prudhon et Violle, anciens élèves de l'École Normale, ont mis tous leurs soins à cette œuvre de prédilection de M. Verdet. Ils se sont servis de notes détaillées prises par eux aux Cours professés par M. Verdet à la Sorbonne en 1864 et en 1865, et dont la rédaction avait été faite d'après le désir de leur maître, pour servir à une publication qu'il se proposait de faire tout de suite à cause de l'actualité du sujet.

On trouvera en tête de chaque Partie un avant-propos qui fixera d'une manière précise la part de travail personnel de chaque collaborateur, soit dans le texte lui-même, soit sous forme de notes ou de bibliographies.

Tous ceux qui ont connu M. Verdet trouveront peut-être une lacune dans cette publication. Le savant seul y est mis en lumière. Avec la mémoire de ses contemporains s'éteindra le souvenir de ses connaissances encyclopédiques qu'éclairaient un goût si fin, une si remarquable lucidité. Ce qu'il savait, jugeait, critiquait et comparait si bien, M. Verdet le livrait à la conversation. Quelques lettres, des notes à peine rédigées n'auraient pu donner une idée suffisante de ce côté de son esprit. On avait eu aussi la pensée de réunir les plus importants de ses articles de critique et d'analyse des travaux étrangers publiés dans les *Annales de Chimie et de*

Physique, articles dont un de ses biographes a pu dire avec vérité qu'ils constituaient sa véritable originalité et qu'ils avaient tenu en haleine la science française ; mais la nature transitoire d'une pareille œuvre, déjà connue par les savants et destinée à perdre d'année en année son intérêt d'actualité, a empêché l'exécution de ce dessein. La publication dont on vient d'indiquer le plan, tout en servant les intérêts de la Science, sera ainsi en harmonie avec le caractère de l'auteur, trop consciencieux et trop droit pour ne pas redouter même l'apparence d'une amplification donnée à ses titres scientifiques.

J. S.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, INSCRIPTIONS ET BELLES-LETTRES DE TOULOUSE. Septième Série (¹).

T. I; 1869.

DESPEYROUS. — *De six opérations fondamentales des Mathématiques sur la quantité composée relative à trois dimensions; applications.* (23 p.)

Dans les précédents Volumes du même Recueil, l'auteur a publié un travail sur la *quantité composée* relative à deux dimensions, dans lequel il développe par des considérations géométriques la théorie connue d'Argand et de Cauchy. Dans le présent Mémoire, M. Despeyrous renouvelle l'essai, plusieurs fois tenté (²), d'une représentation des points de l'espace au moyen de quantités complexes dépendant de deux unités imaginaires seulement. On parvient ainsi à un système pour lequel on peut bien définir l'addition et la soustraction de manière que ces opérations soient soumises aux mêmes règles que les quantités réelles et les quantités com-

---

(¹) Paraissent annuellement par volumes grand in-8°.

(²) *Voir*, par exemple, MATZKA, *Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra u. s. w.* Prag, 1850. — SCHEFFLER, *Der Situationskalkul.* Braunschweig, 1851. — DILLNER, *Geometrisk Kalkyl.* Upsala, 1860. Etc.

présente la coordonnée parallèle à l'axe des z par e^{..}.jz,
e cette coordonnée ne puisse être affectée en rien par le fac-
, qui correspond à une rotation autour de l'axe des z, et c'est
ce facteur que la multiplication devient une opération *com-
·e*. Mais si l'un des facteurs d'un produit contient un élé-
bitraire, l'opération inverse, c'est-à-dire la division, est par
e affectée d'indétermination, comme cela a lieu aussi dans
cas singuliers de la théorie des quaternions. Il y aurait éga-
lieu de voir si les nouvelles quantités complexes sont compa-
'ec les autres propriétés essentielles de la multiplication,
ropriété *distributive* surtout, à laquelle Hamilton a reconnu
it nécessaire de sacrifier la propriété commutative. M. Des-
déduit directement de sa méthode de représentation les for-
e la Trigonométrie tant plane que sphérique, et la transfor-
des coordonnées dans le plan et dans l'espace.

:870.

INE (E.). — *Sur les équations linéaires aux différences*
4 p.)

uit que les coefficients d'une équation différentielle linéaire
s'exprimer au moyen d'un nombre d'intégrales particu-
istinctes égal à l'ordre de l'équation, comme M. Brassine l'a
·é dans une Note ajoutée au *Cours d'Analyse* de Sturm
ion). L'objet de la présente Note est l'extension de ce ré-
ıx équations linéaires aux différences finies.

ʒUE (F.). — *Sur la pénétration des bulles d'air dans les*
·. (7 p.)

l'étendant aux trois dimensions, le théorème de Cauchy sur le nombre des racines d'une équation comprises dans un contour donné, et il en déduit les théorèmes de Sturm, de Fourier et de Descartes.

Brassine (E.). — *Mémoire de Balistique.* (22 p.)

Ce Mémoire comprend deux Parties. La première est relative au mouvement du centre de gravité des projectiles. La seconde, qui est publiée dans le tome suivant, présente un essai de Balistique appliquée au mouvement des projectiles cylindro-ogivaux de l'artillerie rayée. M. Brassine propose de faire la résistance de l'air égale au carré de la vitesse multiplié par une fonction $f(s)$ de l'arc décrit, que l'on peut supposer, dans la pratique, égale à $\frac{1}{1+ks}$. On peut alors intégrer les équations du mouvement. Cette partie du Mémoire se termine par une application numérique, dont les résultats sont comparés à ceux de l'observation.

Laroque (F.). — *Sur la forme de la surface terminale d'un liquide en contact avec une paroi solide.* (6 p.)

Gatien-Arnoult. — *Polémique de Descartes et de Fermat durant les années* 1637 *et* 1638. (19 p.)

T. III; 1871.

Brassine (E.). — *Mémoire de Balistique* (suite). (15 p.)

Despeyrous. — *Des méthodes géométriques en général, et en particulier de la méthode du rayon vecteur.* (22 p.)

La méthode du rayon vecteur a été exposée par Cauchy dans le tome III des *Exercices de Mathématiques*. M. Despeyrous fait voir que cette méthode peut être employée exclusivement dans l'étude des figures qui résultent de la combinaison d'une ligne ou d'une surface avec une ou plusieurs lignes droites.

MONTHLY NOTICES OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON [1].

T. XXXI (nº supplémentaire); 1871.

LASSELL (W.). — *Sur la variabilité de la grande nébuleuse voisine de l'étoile η d'Argus.*

L'étude des nébuleuses, qui n'est suivie, en France, que par M. Stephan, à l'Observatoire de Marseille, préoccupe, au contraire, beaucoup les astronomes anglais. Leur observation consciencieuse paraît, en effet, pouvoir seule donner des notions certaines sur la formation du monde céleste.

La grande nébuleuse voisine de η d'Argus avait été cataloguée par J. Herschel, en 1837, comme de grandeur 1,2 (notation d'Herschel); en 1871, M. H.-C. Russell, astronome du Gouvernement à Sydney (Nouvelle-Galles du Sud), la classe comme de 7ᵉ grandeur.

M. Lassell recherche si d'autres observateurs n'avaient point, avant M. Russell, signalé de variation dans l'éclat de cette nébuleuse.

En juin 1863, M. F. Abbott, de l'Observatoire de Hobart-Town, a étudié cette nébuleuse avec le plus grand soin : il signalait des changements de forme comparativement au dessin donné par Herschel dans sa *Monographie du Cap.*

En 1865, le même astronome croit reconnaître une diminution très-faible d'éclat par rapport à ses observations antérieures.

En 1864, M. E.-B. Powell observe la même nébuleuse à Madras; mais elle lui paraît toujours très-belle et de 1ʳᵉ ou 2ᵉ grandeur. De même, en juin 1868, sir John Herschel, qui se trouvait alors à Collingwood, ne constate aucun changement dans la nébuleuse. Plus tard, il l'observe de nouveau à Bengalou, et ses impressions sont les mêmes.

D'après M. Lassell, la variabilité de cette nébuleuse serait donc encore à démontrer. C'est là un beau sujet d'observation, que nous recommandons à l'attention des astronomes de Marseille.

PROCTOR (R.-A.). — *Considérations théoriques sur la couronne.*

Les idées que M. Proctor émet dans cet Article nous paraissent peu concordantes avec l'ensemble des observations faites depuis.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. III, p. 245.

SPEAR (J.-R.). — *Observations de Saturne et de Mars.*

Ces observations se rapportent surtout à des occultations de ces planètes par la Lune.

WACKERBARTH (A.-D.). — *Logarithmes hyperboliques et népériens.*

NEWCOMB. — *Mémoire sur la théorie de la Lune.*

Nos lecteurs trouveront une analyse de ce beau Mémoire dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 3 avril 1871

T. XXXII; 1872.

PROCTOR (R.-A.). — *Sur la construction d'une carte d 324198 étoiles.*

CAYLEY (A.). — *Sur les valeurs des coefficients l, g, h, adoptée par M. Delaunay.*

HERSCHEL (A.-S.). — *Sur un micromètre enregistreur.*

STEPHAN. — *Nébuleuses découvertes et observées à Marseill avec le télescope de Foucault de* $0^m,80$.

HERSCHEL (F.-W.). — *Questions relatives aux étoiles double.*

Cette Note, publiée par la Commission chargée de l'examen de l « *General History of Double Stars* » de F.-W. Herschel, renferme une liste de toutes les étoiles dont le caractère multiple a par douteux.

GRANT. — *Sur les observations télescopiques des phénomène vus au contact du bord de la Lune pendant les éclipses de Solei et les résultats qu'on en a déduits.*

L'application du spectroscope aux observations de l'enveloppe d matière rouge qui entoure la photosphère solaire donne un certai intérêt aux observations anciennes des éclipses du Soleil et aux re marques faites autrefois par les astronomes sur le même sujet, in térêt qui a décidé le professeur Grant [1] à relire la plupart de relations publiées sur ces éclipses.

La première trace de l'enveloppe rouge se trouve dans une obser vation de Halley en 1715; mais c'est surtout à partir de l'éclipse d

---

[1] M. Grant est directeur de l'Observatoire de Glasgow.

ı qu'elle fut bien étudiée, par Schumacher à Vienne, Radman à ɔue, Guérin à Visan et le capitaine de marine Bérard à Toulon. ırès ce dernier, « pendant tout le temps de l'éclipse totale, on u delà du bord de la Lune, près de la région où le Soleil émergea, bande rouge très-mince, dentelée irrégulièrement, ou comme ınée çà et là de crevasses, les points lumineux s'étendant sur ·c d'environ la sixième partie de la circonférence lunaire ».

:puis, bien des travaux ont été faits sur ce sujet. Ils sont trop us pour que nous croyions devoir en parler.

OWNING (J.). — *Sur un équatorial universel.*

Browning présente un projet d'instrument parallactique, pouservir à toute latitude.

ɔCTOR (R.-A.). — *Sur le mouvement de la matière projetée e Soleil.*

ıY (G.-B.). — *Sur un point spécial de la détermination des ɔnts de l'orbite de la Lune au moyen d'observations mériıes de cet astre.*

discutant les observations méridiennes faites à Greenwich de à 1830, M. Airy a trouvé dans l'inclinaison une inégalité nouexprimée par

$$-2'',02 \times \text{sinus longitude du nœud.}$$

YLEY (A.). — *Sur les lignes géodésiques d'un ellipsoïde.*

ient a, b, c les demi-axes d'un ellipsoïde $(a > b > c)$, h et k ordonnées elliptiques d'un point, β une constante arbitraire; ation différentielle d'une ligne géodésique est

$$\text{const.} = \int dh \sqrt{\frac{h}{(a+h)(b+h)(c+h)(\beta+h)}} + \int dk \sqrt{\frac{k}{(a+k)(b+k)(c+k)(\beta+k)}},$$

ongueur d'un arc de la courbe a pour expression

$$\int dh \sqrt{\frac{h(\beta+h)}{(a+h)(b+h)(c+h)}} + \int dk \sqrt{\frac{k(\beta+k)}{(a+k)(b+k)(c+k)}}.$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] pas [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] Obse[illegible]

[illegible]

[illegible] propose [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] d

Supposons qu'on ait réduit, d'après la méthode de Herschel [1], s positions pour six époques équidistantes, et soient

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_6$ les distances,
$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6$ les angles de position.

ésignons par m_{rs} l'aire triangulaire décrite sur le plan de proction et comprise entre les distances ρ_r et ρ_s. Nous avons

$$m_{rs} = \tfrac{1}{2}\rho_r\,\rho_s \sin(\varphi_r - \varphi_s).$$

Ceci étant posé, considérons l'aire m_{rs}, décrite dans le plan de rbite, comme une fonction du rayon vecteur et de ses dérivées, et veloppons-la en nous arrêtant aux termes du sixième ordre par pport au temps; nous aurons, pour déterminer les rapports des yons vecteurs r_2, r_3 et r_4, les deux équations

$$= \frac{42m_{23} - 50m_{34} - 6m_{45} - 18m_{24} + 13m_{35} - 11m_{46} + 40m_{56} + 2m_{25}}{42m_{12} - 50m_{23} - 6m_{34} - 18m_{13} + 13m_{24} - 11m_{35} + 40m_{45} + 2m_{14}},$$

$$= \frac{42m_{45} - 50m_{34} - 6m_{23} - 18m_{35} + 13m_{24} - 11m_{13} + 40m_{12} + 2m_{25}}{42m_{23} - 50m_{34} - 6m_{45} - 18m_{24} + 13m_{35} - 11m_{46} + 40m_{56} + 2m_{25}}.$$

es rapports une fois connus, le calcul direct des éléments est facile exécuter, puisqu'en réalité les numérateurs et les dénominateurs nt des quantités du troisième ordre.

C'est pourquoi il est bon de se servir de *six* positions (quatre ffiraient à la rigueur); on diminue ainsi les erreurs d'observation, faisant usage d'un plus grand nombre de données bien choies [2].

WEBB (T.-W.). — *Note sur l'étoile variable* S *d'Orion*.

HUNT (G.). — *Sur l'identité de l'étoile triple* H *i* 13.

CAYLEY (A.). — *Sur deux équations différentielles de la théorie la Lune*.

CAYLEY (A.). — *Sur les variations de la position de l'orbite ns la théorie planétaire*.

---

[1] *Memoirs of the Royal Astronomical Society*, vol. V.
[2] Voir *Atti dell' Accademia delle Scienze di Napoli*, vol. VI.

Noble (W.). — *Sur la mesure des angles de position avec le télescope.*

Browning (J.). — *Sur un spectroscope automatique universel.*

Browning (J.). — *Sur le micromètre à double image.*

Après un long usage des micromètres à double image, M. Browning recommande surtout celui que l'on obtient en coupant par moitié une lentille ordinaire de Barlow, et manœuvrant chacune des moitiés au moyen d'une vis micrométrique.

Key (H.-C.). — *Sur la comète d'Encke.*

Cette Note contient trois dessins remarquables de la comète d'Encke, faits les 5 et 8 novembre et le 3 décembre 1871.

Struve (O.). — *Préparatifs des astronomes russes pour l'observation du passage de Vénus en* 1874.

Le nombre des stations sera de *vingt-quatre,* chacune d'elles étant munie d'un instrument pour l'observation du passage.

Les instruments commandés sont :

Trois héliomètres de 4 pouces;

Trois photohéliographes;

Huit lunettes équatoriales, d'ouvertures variant entre 4 et 6 pouces, munies d'un mouvement d'horlogerie, d'un micromètre à fil et d'un spectroscope;

Dix lunettes de 4 pouces, spécialement destinées à l'observation des contacts.

Les observations photographiques se feront en deux stations différentes : à Vilna, sous la direction du colonel Smysloff; à Rothkans, dans le Holstein, par le Dr Vogel.

Russell (H.-O.). — *Rapport de l'expédition australienne sur l'éclipse de décembre* 1871.

Ce Rapport est fait par l'astronome du Gouvernement à Sydney.

Walker (J.-T.). — *Détermination de la longitude de Téhéran.*

La longitude de Téhéran a été déterminée l'automne dernier par le colonel Walker, directeur du Bureau géodésique de l'Inde, et le major St. John, de la Compagnie télégraphique de Perse, au moyen du réseau indo-européen.

Les signaux étaient envoyés de Londres à Téhéran au moyen de

štablis à Emden, Berlin, Gitomis, Kertch et Tiflis, villes dont tances, exprimées en kilomètres, sont les suivantes :

Londres-Emden............	722
Emden-Berlin.............	611
Berlin-Gitomis.............	1574
Gitomis-Kertch.............	1481
Kertch-Tiflis...............	1296
Tiflis-Téhéran.............	1481
Total.........	7165

.e magnifique opération, la plus belle qu'on ait encore essayée, une différence de longitude Est entre Greenwich et Téhéran

$$= 51^\circ 24' 56''.$$

PHAN. — *Nébuleuses découvertes et observées à Marseille.*

HUNTER (I.). — *Sur la proposition* 38 *du troisième Livre* incipes *de Newton.*

ıs cette proposition, Newton cherche à obtenir la figure de la en la supposant fluide et uniquement soumise à l'action de re. Il néglige complétement la rotation de la Lune autour de e et son mouvement commun avec la Terre autour du Soleil. :nt M et m les masses de la Terre et de la Lune, et supposons ous l'action de la Lune, la Terre, complétement fluide et ho- ıe, ait pris la forme d'un ellipsoïde de révolution autour de and axe H; soit k la distance des centres de la Lune et de la ; on a aisément, si B est le petit axe de la Terre et B + H le axe (H étant petit par rapport à B),

$$H = \frac{15}{4} \frac{m}{M} \frac{B^4}{k^3}.$$

me, si b est le petit axe et $b + h$ le grand axe de l'ellipsoïde olution que deviendrait la Lune sous l'action perturbatrice de re, on a

$$h = \frac{15}{4} \frac{M}{m} \frac{b^4}{k^3},$$

$$\frac{h}{H} = \left(\frac{M}{m}\right)^2 \left(\frac{b}{B}\right)^4.$$

Au lieu de cette relation, Newton emploie, dans les *Principes*, la formule

$$(2) \qquad \frac{h}{H} = \frac{M}{m} \frac{b}{B},$$

sans donner aucune raison de ce changement ni une démonstration directe de la formule (2). Il y a une lacune qu'il convenait de signaler.

HALL (M.). — *Source de la chaleur solaire.*

STRANGE (A.). — *Sur l'insuffisance des Observatoires d'Angleterre.*

Le colonel Strange propose la création d'un grand Observatoire d'Astronomie physique.

GLAISHER (B.-A.). — *Sur la loi de fréquence des erreurs d'observation, et sur la méthode des moindres carrés.*

M. Glaisher critique les démonstrations qui ont été données jusqu'ici du principe même de la méthode des moindres carrés.

PROCTOR (R.-A.). — *Sur le grand nombre des étoiles visibles à l'œil nu dans l'hémisphère austral.*

TENNANT (R.-E.). — *Rapport sur les observations faites par ordre du gouvernement de l'Inde pendant l'éclipse totale du* 11 *décembre* 1871.

Les conclusions du lieutenant-colonel Tennant sont les suivantes : « Le Soleil a un noyau formé de gaz très-denses qui donnent une lumière blanche continue, analogue à celle d'un liquide ou d'un solide incandescent. Au-dessus de ce noyau se trouve une couche de vapeurs épaisses extrêmement chaudes, mais moins chaudes néanmoins que celles du noyau, et rangées dans l'état d'équilibre par ordre de densités décroissantes. Plus loin, on rencontre une couche d'hydrogène incandescent, très-raréfié, et accompagné d'un gaz encore inconnu, donnant lieu à la raie brillante D_3. Plus haut encore, l'hydrogène se refroidit et se mélange avec une nouvelle substance inconnue, produisant la ligne verte 1474 de l'échelle de Kirchhoff; après quoi il forme seul l'atmosphère extérieure du Soleil. »

Quelques-unes de ces conclusions nous paraissent exactes; mais

l'ensemble donne au Soleil une structure très-compliqué. Ne vaut-il pas mieux considérer, avec les astronomes français, le Soleil comme une immense agrégat de matières gazeuses, où la distribution, d'ailleurs fort irrégulière, est déterminée par les réactions chimiques et les températures qui en résultent?

GLAISHER (J.-W.-L.). — *Liste de quelques erreurs des Tables de logarithmes à 10 décimales de Vlacq.*

PROCTOR (R.-A.). — *Histoire de la découverte du second satellite de Saturne.*

De l'étude faite par cet astronome des papiers de W. Herschel, il résulte que la découverte du second satellite de Saturne date du 20 août 1789, et qu'elle a été faite avec le télescope de 40 pieds.

PROCTOR (R.-A.). — *Sur les densités des satellites de Jupiter.*

Ces densités sont d'ordinaire données fort inexactement dans les divers Traités d'Astronomie : M. Proctor indique les nombres suivants comme étant les plus exacts aujourd'hui :

1er satellite	....	1,148
2e »	....	2,167
3e »	....	1,883
4e »	....	1,468

La densité de la planète Jupiter étant de 1,36, il résulte de ces nombres que, sauf le premier, les satellites ont une *densité moyenne plus forte* que celle de la planète. La densité de la Lune est, au contraire, moitié moindre que celle de la Terre.

WILSON (J.-M.). — *Sur l'orbite de l'étoile double de Castor.*

ZENGER (C.-V.). — *Description du nutoscope, appareil propre à montrer graphiquement les phénomènes de la précession et de la nutation.*

WILSON (J.-M.). — *Sur l'étoile ζ du Cancer.*

PÉCHULE (M.). — *Éléments de la planète* (129).

Cette planète a été découverte le 8 avril 1872, par M. Watson, à Ann-Arbor.

NOBLE (W.). — *Éclipse du troisième satellite de Jupiter, du 11 avril 1872.*

RANYARD (A.-C.). — *Sur la valeur du stéréoscope comme instrument destiné à examiner les photographies du Soleil prises pendant les éclipses.*

Il résulte de l'étude faite par M. Ranyard que l'emploi de cet instrument n'offrirait dans ces circonstances aucun avantage ; une pareille conclusion était assez évidente *a priori.*

MAGUIRE (J.). — *Sur les Tables des satellites de Jupiter.*

Cet astronome insiste sur la nécessité de poursuivre assidûment l'observation des satellites de Jupiter, avant de construire de nouvelles Tables de ces astres.

M. Airy avait déjà émis un avis identique : il y a certainement là un sujet de travail fort utile pour l'Astronomie d'observation.

CRESPIGNY (C.-C. DE). — *Sur les unités astronomiques.*

SMYTH (C. Piazzi). — *Observations spectroscopiques de la lumière zodiacale, faites à l'Observatoire royal de Palerme.*

A l'aide d'un spectroscope construit en vue spéciale de ces recherches, et grâce à la transparence remarquable du ciel d'Italie, M. Smyth (¹) a constaté que :

1° Avec une fente étroite, la lumière zodiacale ne donne aucune espèce de spectre ; les rayons émis par cette lumière ne sont donc pas résolubles par le prisme en un petit nombre de lignes brillantes, mais ils donnent un spectre continu très-faible ;

2° Avec une fente large, on voit une petite portion d'un spectre continu, portion d'autant plus brillante que la fente est plus large ;

3° Cette bande lumineuse n'est pas nettement terminée ; son maximum de lumière correspond à une longueur d'onde d'environ 5350. (La ligne la plus brillante de la couronne des éclipses a pour longueur d'onde 5322, et la ligne principale du spectre de l'aurore boréale, 5579.)

GLAISHER (J.-W.-L.). — *Suite des erreurs trouvées dans les Tables de logarithmes de Vlacq.*

(¹) M. Piazzi Smyth est astronome royal pour l'Écosse et dirige l'Observatoire d'Édimbourg. L'Observatoire de Palerme est dirigé par le professeur Tacchini.

Brothers (A.). — *La photographie des éclipses de Soleil.*

Depuis juillet 1860, les astronomes ont bien souvent, à l'exemple : M. Warren de la Rue et du P. Secchi, cherché à photographier s phénomènes lumineux qui se produisent autour de la Lune penmt une éclipse totale de Soleil. Les épreuves reproduisent alors silhouette des protubérances, et une partie plus ou moins grande : la couronne et des gloires. Ce qui a préoccupé M. Brothers, ce ont précisément les différences remarquables que l'on rencontre à : dernier point de vue dans les diverses photographies d'une même :lipse. Sur quelques-unes, la couronne est nettement représentée; ır d'autres elle est indiquée; sur quelques-unes enfin elle manque omplétement.

Prenons, par exemple, les épreuves obtenues à Békul (Indes anlaises) en décembre 1871 : la première, faite en 15 secondes, ıdique une couronne s'étendant à 15 minutes d'arc au-dessus de ı Lune; dans la seconde, faite en 10 secondes, la couronne ne étend plus qu'à 10 minutes d'arc; dans la quatrième, également btenue en 10 secondes, certains rayons de la couronne sont visibles ısqu'à 20 minutes au delà du bord lunaire.

Le temps de l'exposition intervient donc pour quelque chose ans la grandeur des couronnes obtenues, mais son action seule ne ıffit pas à expliquer les différences que présentent les épreuves.

M. Brothers a prouvé que, quand il s'agissait de photographier es objets aussi délicats que les rayons de la couronne, le résultat btenu variait avec l'intensité du développement de l'image. Après voir préparé avec grand soin, et d'après des photographies, un essin de l'éclipse, obtenu à Syracuse en décembre 1871, il en a ré, avec un même temps de pose de 5 secondes et dans des condions identiques de lumière, trois photographies. La première, ıiblement développée, ne montre que les parties les plus brillantes e la couronne; la seconde, un peu plus développée, est identique u dessin original; sur la troisième, où le développement a été oussé beaucoup plus loin, presque toute trace du phénomène a isparu.

Lors des futures éclipses, les astronomes auront donc à se préoccuper, non-seulement du temps de pose, mais aussi de la manière ı plus convenable de développer les épreuves pour obtenir la couonne avec la plus grande étendue possible.

Brett (J.). — *Nouvelle monture altazimutale* de télescope *destinée aux astronomes en mission.*

Cette monture n'offre rien que ne puisse imaginer tout astronome ayant un peu l'habitude des observations.

Brett (J.). — *Sur la zone lumineuse qui entoure le disque solaire vu dans une lunette.*

Loin de se détacher sur une zone obscure, identique au fond du ciel, le disque solaire parait entouré d'une espèce de couronne lumineuse verdâtre, dont l'éclat décroît rapidement. Ce phénomène a été remarqué par tous les observateurs consciencieux : Cassini I[er] l'avait fort souvent observé.

Langdon (R.). — *Observations de la planète Vénus.*

Six dessins, qui accompagnent cette Note, montrent que le disque de Vénus, convenablement observé, est, comme celui de Mars, couvert de taches : Vénus aurait donc, comme Mars et la Terre, sa surface en partie occupée par de vastes nappes d'eau ?

Newcomb (S.). — *Nouvelles Tables d'Uranus.*

Ces Tables, auxquelles M. Newcomb travaille depuis douze ans, sont fondées sur toutes les observations de la planète, faites depuis sa découverte par Herschel jusqu'à la fin de 1872.

M. Newcomb conclut de cette vaste discussion qu'il n'y aurait point de planète au delà de Neptune. Il sera curieux de comparer ces Tables avec celles dont M. Le Verrier a récemment calculé les éléments.

Main (R.). — *Occultations d'étoiles et éclipses des satellites de Jupiter en* 1871 *et* 1872.

M. Main donne le résultat d'un certain nombre d'observations faites dans ces deux années à l'Observatoire d'Oxford.

Slatter (J.). — *L'aurore du* 4 *février* 1872.

Secchi (le P.). — *Observations des protubérances solaires.*

C'est la traduction de la Note du célèbre directeur de l'Observatoire du Collége Romain, insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 29 avril 1872.

Browning (J.). — *Sur quelques observations de Jupiter, faites en* 1871 *et* 1872.

. surface de cette planète est diversement colorée, suivant les ·des. A l'équateur, il existe une large bande bistre, presque ·ur de tan. De part et d'autre de cette bande la surface de la ·te paraît assez semblable à l'aspect que nous offre parfois le lorsqu'il est parsemé de cumulus blancs, précurseurs d'un ·.

: Verrier (J.-U.). — *Sur les masses des planètes et la paral- · du Soleil.*

·tte Note est la reproduction de celle que M. Le Verrier ·érée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* · 1872 (séance du 22 juillet).

·ow (N.-A.). — *Observations faites pendant l'éclipse du 6 juin* ·.

·tte Note est surtout relative à des observations météorologiques ·s pendant l'éclipse. Elles y sont résumées en un tableau qui : avoir un certain intérêt.

·ogson (N.-R.). — *Observations faites pendant l'éclipse du ·in 1872, par l'astronome du gouvernement de Madras.*

·hnson (S.-S.). — *Sur les futures éclipses de Soleil.*

·ontinuant l'œuvre de l'astronome français du Vaucel ([1]), Johnson a calculé les époques de toutes les éclipses solaires ·bles en Angleterre de 1900 à 2200.

·all (R.-S.). — *Sur l'orbite de l'étoile double ξ de la Grande ·rse.*

·'orbite de cette étoile double a déjà été déterminée par plu- ·rs astronomes ; Savary, Herschel II, Mädler et M. Villarceau ·n sont successivement occupés. En désignant par

e l'excentricité de l'orbite ;

☊ la position du nœud ;

γ l'inclinaison ;

λ l'angle du grand axe avec la ligne des nœuds ;

P la période en années ;

: le passage au périhélie ;

([1]) Du Vaucel a donné, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1768, ·ableau de toutes les éclipses visibles à Paris de 1767 à 1900.

de deux étoiles, ayant des mouvements propres dans des directions à peu près opposées; on a pu, par suite, constater une fois leur rapprochement, mais un pareil rapprochement ne pourra plus être trouvé désormais. »

Proctor (R.-A.). — *Sur la nécessité d'observer les météores de novembre.*

La discussion des observations faites par MM. Parnisetti, Maggi, Garibaldi et Denza à Alexandrie, Volpeglino, Gênes et Milan, prouve que, au passage de l'année dernière (1871), l'amas météorique non-seulement a été beaucoup moins abondant, mais que sa position a été *troublée;* car la partie que traverse actuellement la Terre n'est qu'un résidu et, pour ainsi dire, une queue ténue, située en arrière du groupe central beaucoup plus ramassé et beaucoup plus dense. Il importe donc d'observer chaque année les phénomènes météoriques de novembre : on connaîtra ainsi la durée pendant laquelle ils se produiront, et par suite le degré d'allongement que l'essaim a déjà éprouvé sous l'influence de la Terre.

Greg (R.-P.). — *Tableau comparatif des points radiants et durées des averses météoriques.*

Depuis que les magnifiques travaux de M. Schiaparelli ont montré les relations qui existent entre les comètes et les averses météoriques, l'étude de ces phénomènes a pris une importance considérable et qu'on ne pouvait soupçonner autrefois. En France, les averses d'août et de novembre sont régulièrement suivies; en Angleterre, l'Association Britannique a chargé une de ses Commissions de la mise en œuvre d'un système continu d'observations; en Italie, MM. Schiaparelli, Zezioli, Denza et Serpieri font des étoiles filantes le principal sujet de leurs travaux; en Allemagne, M. Heis a publié sur le même sujet des Mémoires fort curieux.

Il résulte de toutes ces études que les météores lumineux paraissent venir d'un grand nombre de points radiants : M. Schiaparelli en admet 189; Herschel et le *Comité des météores lumineux* en comptent 150. M. Greg soumet l'existence de tous ces centres de radiation à une discussion nouvelle. D'après lui, il faut les réduire au plus à 132, et même l'existence d'un certain nombre d'entre eux lui semble être douteuse et demander confirmation. Il joint d'ailleurs à son nouveau catalogue un élément important, et

que cependant on n'avait point encore considéré jusqu'ici, « le temps pendant lequel la chute correspondant à un point radiant déterminé persiste chaque année. » Certains d'entre eux subsistent pendant près d'un mois et demi.

HERSCHEL (A.-S.). — *Observations des averses météoriques supposées en relation avec la comète de Biéla.*

Malgré les encouragements donnés à l'étude des averses météoriques par l'Association Scientifique de France, il n'a été rien fait en France à cet égard au point de vue théorique. Un astronome de Vienne, M. Weiss (1), a complété la solution esquissée par M. Schiaparelli. Le Mémoire de M. Weiss inspire au professeur Herschel les réflexions suivantes : « D'après les observations d'Olbers, le noyau de la comète de Biéla a passé, le 3 décembre 1833, à une très-faible distance de la Terre (20 000 milles anglais ou environ 40 000 kilomètres). Une portion de cette comète n'a-t-elle pas été à cette époque détournée de son chemin? Une partie de cet amas d'astéroïdes, réunis jusqu'alors entre eux par les lois de la gravitation, n'a-t-elle pas été détachée par l'attraction plus puissante de la Terre? »

En 1832, Olbers a calculé exactement la position du périhélie de cette comète, et depuis cette époque, en effet, à divers intervalles, dans la nuit du 6 au 7 décembre, plusieurs astronomes ont observé les averses de météorites ayant pour point radiant la position assignée par Olbers au périhélie de la comète de Biéla (point situé entre les constellations de Cassiopée et d'Andromède). Ce phénomène a été aperçu en France, en Belgique et aux États-Unis dans l'année 1838; en 1847 par M. Heis, à Aix-la-Chapelle; par les astronomes italiens MM. Zezioli et Schiaparelli en 1867, environ un an après le passage de la comète par son nœud descendant.

La comète de Biéla doit passer par ce point de son orbite à la fin de 1872; il faudra donc observer avec soin les étoiles filantes du mois de novembre, ainsi que celles du commencement de décembre 1873.

HUGGINS (R.-H.). — *Observations spectroscopiques d'étoiles et de nébuleuses.*

(1) *Beiträge zur Kenntniss der Sternschnuppen.* (*Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. LVII, 1868.)

De même que la hauteur d'un son augmente ou diminue selon que le corps sonore qui l'émet se rapproche ou s'éloigne de l'auditeur, de même les lignes du spectre d'un astre doivent se rapprocher de plus en plus du rouge à mesure que la vitesse avec laquelle cet astre se rapproche de notre système planétaire augmente.

Les observations fondées sur cet ordre de faits sont fécondes en résultats. M. Brünnow, l'un des astronomes qui s'occupent le plus de la détermination des mouvements propres des étoiles, considère cette méthode comme au moins égale en valeur, dans un grand nombre de cas, à celle qui emploie les anciens procédés de mesure (micrométriques, héliométriques).

M. Huggins s'attache surtout à l'étude de la raie F du spectre de l'étoile (2e ligne du spectre de l'hydrogène), et mesure le déplacement de cette ligne soit vers le violet, soit vers le rouge.

Le tableau suivant résume quelques-uns des résultats principaux obtenus par lui :

ÉTOILES s'éloignant du Soleil.	MILLES parcourus par seconde.	ÉTOILES se rapprochant du Soleil.	MILLES parcourus par seconde.
Sirius.............	18 à 22	Arcturus...........	55
Betelgeuse..........	22	Véga...............	44 à 54
Rigel.............	15	α Cygne...........	39
Castor............	25 à 28	Pollux.............	49
Régulus...........	12 à 17	α Grande Ourse....	46 à 61

Ch. A.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

T. LXXV, 2e semestre 1872 (*fin*).

N° 27. Séance du 30 décembre 1872.

Faye. — *Explication des taches du Soleil* (suite).

Cayley (A.). — *Sur la condition pour qu'une famille de surfaces fasse partie d'un système orthogonal.*

M. Cayley revient sur la question dont il s'était déjà occupé dans les séances du 22 et du 29 juillet 1872, et l'aborde par une autre méthode qui le conduit à l'équation déjà obtenue.

DOUTRELAINE. — *Sur les indications données, dès* 1859, *par M. Laussedat, concernant le projet de la prolongation de la méridienne de France en Espagne et en Algérie.*

BAILLAUD. — *Suite de l'éphéméride de la planète* (127).

T. LXXVI, 1er semestre 1873.

N° 1. Séance du 6 janvier 1873.

CALIGNY (A. DE). — *Sur les coups de bélier de la houle contre les plages inclinées.*

BORRELLY. — *Observations de la planète* (128), *faites à l'Observatoire de Marseille.*

BOSSERT. — *Éléments et éphémérides de la planète* (128).

DARBOUX (G.). — *Sur l'équation du troisième ordre dont dépend le problème des surfaces orthogonales.*

FONVIELLE (W. DE). — *Note sur l'observation faite par Hévélius en* 1652.

N° 2. Séance du 13 janvier 1873.

MOUCHEZ (E.). — *Note sur le levé des côtes de l'Algérie.*

RESAL (H.) — *Mémoire sur la théorie des effets observés par Savart sur l'influence mutuelle de deux pendules.*

DARBOUX (G.). — *Sur l'équation du troisième ordre dont dépend le problème des surfaces orthogonales* (suite).

M. Darboux avait démontré (*Annales de l'École Normale*, t. III) que, dans un système de surfaces orthogonales, le paramètre d'une quelconque de ces surfaces, considéré comme fonction des coordonnées rectangles, devait vérifier une seule équation aux différences partielles du troisième ordre; M. Cayley a présenté la formation de cette équation dans les *Comptes rendus* du 22 juillet 1872. M. Darboux reprend cette détermination, et obtient l'équation générale sous une forme symétrique; il en déduit plusieurs conséquences, celle-ci entre autres : « On a un système orthogonal

dont peut faire partie toute surface, en considérant des surfaces qui ont pour trajectoires orthogonales des cercles normaux à une sphère fixe, et l'on peut toujours obtenir le système dont fait partie une surface donnée à l'avance sans aucune intégration. »

N° 3. Séance du 20 janvier 1873.

CHASLES. — *Note relative à la détermination du nombre des points d'intersection de deux courbes d'ordre quelconque, qui se trouvent à distance finie.*

M. Chasles avait déjà démontré, dans le numéro du 30 septembre 1872 (*Comptes rendus*), la proposition relative au nombre des points d'intersection de deux courbes, en s'appuyant sur le principe de correspondance et en faisant intervenir la propriété caractéristique d'une courbe d'être rencontrée par une droite quelconque en un nombre constant de points; M. Chasles donne ici deux nouvelles démonstrations également simples, qui reposent sur la considération soit des tangentes, soit des normales.

PÉPIN (le P.). — *Sur les résidus de cinquième puissance.*

L'auteur se propose d'établir pour les résidus de cinquième puissance une loi de réciprocité analogue à celles que Gauss et Jacobi ont trouvées, le premier pour les résidus biquadratiques, et le second pour les résidus cubiques; il fait suivre sa Note de plusieurs théorèmes sur les nombres triangulaires.

BORRELLY. — *Observations de la planète* (128), *et découverte d'une nouvelle étoile variable.*

DARBOUX (G.). — *Sur le problème des surfaces orthogonales.*

Après avoir donné, à des points de vue différents, plusieurs extensions à sa Communication précédente, M. Darboux termine sa Note par la proposition suivante : « On prend une sphère fixe (S) et une surface fixe (Σ). Toutes les sphères qui coupent (S) sous un angle constant α, et suivant un cercle dont le plan est tangent à (Σ), enveloppent une surface (N_α). L'ensemble des surfaces (N_α), correspondant à toutes les valeurs de l'angle α, constitue une famille de surfaces faisant partie d'un système triple de surfaces orthogonales. Les surfaces (N_α) ont pour trajectoires des cercles orthogonaux à (S) ».

FAÀ DE BRUNO (Fr.). — *Note sur les fonctions symétriques.*

Meier Hirsch a publié, en 1809, des Tables numériques pour effectuer le calcul des fonctions symétriques des racines des équations jusqu'au dixième degré inclusivement; M. Faà de Bruno donne à ces Tables une disposition un peu différente, et met ainsi en évidence certaines propriétés des coefficients numériques signalées par Cayley; il indique, en outre, les diverses simplifications qu'on peut apporter dans le calcul de ces Tables.

N° 4. Séance du 27 janvier 1873.

CALIGNY (A. DE). — *Sur les manœuvres de l'écluse de l'Aubois et sur les propriétés de cet appareil.*

HEIS (E.). — *Atlas cœlestis novus. Stellæ per mediam Europam solis oculis conspicuæ, secundum veras lucis magnitudines e cœlo ipso descriptæ.*

Ce nouvel Atlas céleste, dit l'auteur, qui n'est, pour ainsi dire, que la suite et l'amplification de l'Ouvrage connu d'Argelander, *Uranometria nova,* 1843, est le résultat de vingt-sept années de travail.

N° 5. Séance du 3 février 1873.

SECCHI (le P.). — *Sur les protubérances et les taches solaires.*

Résumé des observations des protubérances solaires faites du 13 août à la fin de l'année 1872.

MORIN (le général). — *Rapport sur un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences par* M. BERTIN, *Ingénieur de la Marine, et ayant pour titre : « Étude sur la ventilation d'un transport-écurie ».*

BOSSERT. — *Éphéméride de la planète* (128).

BORRELLY. — *Observations de la planète* (128).

MARTIN DE BRETTES. — *Note sur la pénétration des projectiles oblongs dans les milieux résistants.*

Dans une première Note (*Comptes rendus,* 16 décembre 1872), l'auteur avait comparé les pénétrations de deux projectiles lancés avec la même vitesse; il suppose ici qu'ils possèdent des vitesses inégales, mais assez peu différentes pour que la loi de la résistance du milieu soit pratiquement la même pour les deux projectiles.

N° 6. Séance du 10 février 1873.

FAYE. — *Explication des taches solaires; réponse à une critique des « Memorie degli Spettroscopisti italiani »*.

CALIGNY (A. DE). — *Note sur les moyens de faire fonctionner d'eux-mêmes plusieurs systèmes de barrages mobiles.*

LOCKYER (J.-N.) et SEABROHE (G.-M.). — *Nouvelle méthode pour observer la chromosphère.*

N° 7. Séance du 17 février 1873.

FAYE. — *Explication des taches solaires* (fin de la réponse aux critiques de MM. *Tacchini* et *Secchi*).

CALIGNY (A. DE). — *Note sur l'écoulement de l'eau des marais d'Ostie, en vertu de la baisse alternative des vagues, et sur la destruction d'un banc de sable.*

LEVRET (le colonel). — *Détermination des positions géographiques sur un ellipsoïde quelconque.*

HUGO (L.). — *Note sur deux dodécaèdres antiques du Musée du Louvre.*

TACCHINI. — *Sur quelques phénomènes particuliers offerts par la planète Jupiter pendant le mois de janvier 1873.*

WEYR (Ed.). — *Classification des courbes du sixième ordre dans l'espace.*

BOURGET (J.). — *Théorie mathématique des expériences de Pinaud, relatives aux sons rendus par les tubes chauffés.*

M. Bourget s'est proposé de trouver les véritables lois des phénomènes observés par Pinaud et Sondhaus, en les rattachant à la théorie générale des tuyaux sonores, d'après les principes donnés par Duhamel dans son Mémoire *Sur les tuyaux à cheminée.*

CORNU (A.) et MERCADIER. — *Sur la mesure des intervalles musicaux.*

N° 8. Séance du 24 février 1873.

CALIGNY (A. DE). — *Note sur une propriété essentielle de l'appareil établi à l'écluse de l'Aubois.*

WEYR (Ed.). — *Sur la classification des courbes du sixième ordre* (suite).

RIBAUCOUR. — *Sur les systèmes cycliques.*

L'auteur se propose de montrer qu'il suffit de connaître trois surfaces trajectoires d'une famille de cercles pour construire toutes les autres sans intégration préalable; il nomme *système cyclique* un système triplement orthogonal, dont une famille a pour trajectoires des cercles. Il fait en outre remarquer qu'il avait aussi indiqué avant M. Darboux un système triple orthogonal obtenu sans intégration dont peut faire partie une surface quelconque, ce système étant différent de celui des surfaces parallèles et de son transformé par rayons vecteurs réciproques.

PERRY (G.). — *Sur le troisième rayon dans le cas général des cristaux triréfringents.* — *Sur la variabilité des coefficients d'élasticité et la dispersion.*

Notes prises par M. Perry au cours de Lamé en 1861-1862 et 1863-1864; la dernière Note est, comme le dit l'auteur, copiée presque textuellement sur les feuilles données par Lamé en 1863-1864.

N° 9. Séance du 3 mars 1873.

FAYE. — *Note sur l'oscillation elliptique des cyclones solaires.*

SECCHI (le P.). — *Sur la nature et l'origine des taches solaires.*

PHILLIPS. — *Rapport sur un Mémoire de M. Kretz, ayant pour titre : « De l'élasticité dans les machines en mouvement ».*

Le Mémoire dont il s'agit est particulièrement consacré à l'étude de l'influence exercée par l'élasticité des courroies sans fin : d'une part, sur les rapports des vitesses angulaires des arbres tournants, et, d'autre part, sur leurs actions mutuelles. Ces recherches sont fondées sur les lois relatives à l'élasticité et à la résistance des courroies, telles qu'elles résultent d'expériences faites par M. Kretz lui-même il y a environ douze ans. Voici l'énoncé du problème général que l'auteur s'est proposé de résoudre : « Une série d'arbres qui se transmettent le mouvement de l'un à l'autre, à l'aide de roues d'engrenage, de poulies et de courroies, sont sollicités par des forces extérieures, supposées connues : trouver les vitesses angulaires des diverses roues et les tensions des organes de transmis-

sion, en tenant compte de l'élasticité des courroies, de la torsion des arbres, de la flexion des bras. »

M. Phillips conclut en ces termes : « En résumé, l'auteur est parvenu, dans une question présentant de grandes difficultés, à des résultats exacts dans les limites auxquelles il était permis de prétendre, et susceptibles, dans nombreuses circonstances, d'applications utiles.... En conséquence, votre Commission est d'avis que le Mémoire de M. Kretz est très-digne de l'approbation de l'Académie, et elle a l'honneur de vous proposer d'en ordonner l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers*. »

Levret (H.). — *Influence, sur le résultat des opérations géodésiques, de la substitution des arcs de plus courte distance aux sections planes de l'ellipsoïde; expression de la correction qui doit être faite à toutes les valeurs des mesures d'angle.*

Mannheim (A.). — *Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace.*

Weyr (Ed.). — *Sur les courbes du sixième ordre à double courbure* (suite et fin; *voir* les séances des 17 et 24 février).

Les diverses espèces de courbes dans l'espace ont été énumérées, pour les cinq premiers ordres, par MM. *Salmon* et *Cayley* (*Cambridge and Dublin Math. Journal*, t. V, p. 23; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LVIII, p. 994). M. Weyr donne, en suivant la marche de ces géomètres, une classification des courbes gauches du sixième ordre. Voici le résumé général de cette classification :

Désignons par C_6 une courbe non plane du sixième ordre.

1re classe : courbe $C_6^{(2.3)}$.

Ce sont les courbes d'intersection complète d'une surface du second ordre avec une surface du troisième ordre; elles ont six points doubles apparents. Il n'y a qu'une seule espèce. Elles sont aussi données par l'intersection de deux surfaces du troisième ordre ayant en commun une courbe plane du troisième ordre.

2e classe : courbes $C_6^{(3)}$.

Ce sont les courbes qui ne sont jamais situées sur une surface du second ordre; elles sont l'intersection d'une surface du troisième ordre et d'une surface du quatrième ordre; elles peuvent avoir six,

pt, huit, neuf ou dix points doubles apparents, et donnent ainsi lieu cinq espèces. Une courbe d'une quelconque de ces espèces forme, ec une courbe de même espèce, l'intersection complète d'une rface du troisième ordre et d'une surface du quatrième ordre. 'espèce correspondant à neuf points doubles apparents peut être onnée aussi par l'intersection de deux surfaces du troisième ordre, ii ont en commun trois droites ne se rencontrant pas.

3e CLASSE : courbes $C_6^{(2)}$.

Ce sont les courbes qui se trouvent toujours sur une surface du cond ordre, et par lesquelles on ne peut pas faire passer des surces du troisième ordre. Il y en a deux espèces : la première possède pt points doubles apparents, et est l'intersection partielle d'une rface du second ordre et d'une surface du quatrième ordre ayant commun deux droites qui ne se rencontrent pas ; la seconde posde dix points doubles apparents, et est l'intersection partielle une surface du second ordre et d'une surface du cinquième ordre ant en commun quatre droites qui ne se rencontrent pas.

Dans cette nomenclature, les sous-espèces ne sont pas énumérées.

HALPHEN. — *Note relative à une Communication sur les courbes auches algébriques.*

M. CHASLES, en déposant sur le bureau le premier numéro du *ulletin de la Société Mathématique de France,* présente les conidérations suivantes :

« Les Mathématiques théoriques, base fondamentale, dans outes leurs parties, des travaux techniques, avaient à désirer une ssociation spéciale, telle que celle qui a été fondée dans ces derières années, en Angleterre, à l'imitation de la Société Astronoique de Londres, qui, depuis les premiers temps de ce siècle, a ontribué aux progrès des diverses parties de la Mécanique céleste, t à l'émulation entre les Observatoires nombreux de la Granderetagne et ceux de notre continent et de l'Amérique. Indépendament de la Société Mathématique de Londres, nous pouvons citer elles qui viennent de se former récemment à Moscou et à Prague. Nous sommes heureux de pouvoir dire à l'Académie que notre ciété *Mathématique* compte à sa naissance cent cinquante embres, et a la confiance que ses efforts mériteront le concours les encouragements de tous ceux qui reconnaissent l'importance

et la haute nécessité, à tous égards, de la culture incessante de toutes les branches des Sciences mathématiques. »

N° 10. Séance du 10 mars 1873.

Faye. — *Sur la nouvelle hypothèse du P. Secchi.*

Faye. — *Sur la circulation de l'hydrogène solaire, avec une réponse à un point de la Note de M. Tacchini.*

Puiseux (V.). — *Rapport sur deux Mémoires présentés à l'Académie par M.* Maximilien Marie, *et ayant pour titres, l'un* : « *Détermination des points critiques où est limitée la région de convergence de la série de Taylor* »; *l'autre* : « *Construction du périmètre de la région de convergence de la série de Taylor* »

« Lorsqu'une fonction y d'une variable imaginaire x doit satisfaire à une équation algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

elle a généralement plusieurs valeurs pour chaque valeur de x Concevons que x varie d'une manière continue à partir d'une certaine valeur initiale a; choisissons, pour la valeur initiale b de y, une racine de l'équation

$$f(a, y) = 0,$$

que nous supposerons n'être ni multiple ni infinie, et enfin assujettissons y à varier d'une manière continue avec x. Alors y ne cessera pas d'être une fonction finie et déterminée de x, si toutefois on évite de faire prendre à cette variable certaines valeurs critiques dont la définition n'a pas toujours été donnée avec une précision suffisante.

» On peut, en multipliant l'inconnue y par une fonction entière de x, faire en sorte que la nouvelle inconnue ne devienne plus infinie pour aucune valeur finie de x. Cette supposition admise, on a souvent dit que les valeurs critiques de x sont celles pour lesquelles la fonction y devient une racine multiple de l'équation proposée.

» Cette définition est exacte en général; en effet, pour une telle valeur c de x et pour la valeur correspondante de y, on a

$$\frac{df}{dy} = 0;$$

mais généralement on n'aura pas en même temps

$$\frac{df}{dx} = 0.$$

Alors la racine considérée fera partie d'un groupe de fonctions qui échangent circulairement leurs valeurs lorsque le point M, correspondant à la variable x [1], décrit un cercle infiniment petit autour du point C correspondant à c. Lors donc que le point mobile M suivra un chemin passant par le point C, la valeur de y cessera au delà de ce point d'être complétement déterminée; car, si l'on déforme un peu le chemin sans en changer les extrémités, la valeur finale de y sera différente, selon que le point M aura passé d'un côté ou de l'autre du point C.

» Mais si au point C on avait à la fois

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0,$$

il pourrait arriver que la fonction y ne s'échangeât avec aucune autre autour de ce point, et restât par conséquent déterminée, lorsqu'on le franchirait; c'est ce qui aurait lieu, par exemple, si les dérivées partielles $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^2f}{dy^2}$ n'étaient nulles ni l'une ni l'autre, non plus que l'expression

$$\frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2} - \left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2.$$

Dans ce cas, la valeur c de x ne serait pas véritablement critique.

» Pour éviter les exceptions que comporte la définition précédente, M. Marie appelle *valeurs critiques de x* les valeurs qui rendent infinie y ou l'une de ses dérivées. Cette définition nous semble préférable à l'autre, surtout quand on se propose d'étudier les conditions de possibilité du développement de la fonction y par la série de Taylor.

» M. Marie s'est occupé spécialement de ce dernier problème, que l'on peut poser comme il suit : Étant données la valeur initiale a de x et la valeur correspondante b de y, trouver dans quelles

---

[1] Nous entendons par là, suivant l'usage, le point qui a pour coordonnées rectangulaires la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la valeur de x.

limites la fonction y peut être développée en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de $x - a$.

» On sait par les travaux de Cauchy qu'un tel développement subsiste tant que le point mobile M, correspondant à x, reste dans l'intérieur d'un cercle, qui a pour centre le point A correspondant à a et qui ne renferme aucun point critique, c'est-à-dire aucun point correspondant à une valeur critique de x.

» Mais il convient de faire ici une distinction sur laquelle M. Marie insiste dans son premier Mémoire. Le point M, décrivant un chemin continu à partir de la position initiale A, peut arriver dans une position C qui soit critique pour quelques-unes des valeurs de y, que détermine l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

et qui ne le soit pas pour les autres. Dans ce cas, la circonférence décrite du point A comme centre avec AC pour rayon ne limitera la convergence de la série que si le point C est critique pour la racine particulière y que l'on considère. Il ne serait donc pas exact de dire d'une manière générale que la convergence est limitée par la circonférence dont le rayon est la distance du point A au plus voisin de tous les points critiques répondant aux diverses racines de l'équation

$$f(x, y) = 0.$$

» Cette distinction n'a sans doute pas échappé à la plupart des géomètres qui se sont occupés de ces questions ; cependant elle n'a pas toujours été formulée assez nettement, et le rapporteur pourrait citer un passage de ses propres écrits d'où il semblerait résulter que la circonférence de moindre rayon donne toujours la limite de la convergence. Il est vrai que cette interprétation se trouve démentie par un autre passage du même Mémoire ; mais enfin on doit reconnaître que, si l'erreur n'a pas existé dans l'esprit de l'auteur, son langage n'a pas été suffisamment correct. Quoi qu'il en soit, M. Marie a eu raison d'insister sur la nécessité de faire cesser la confusion qui pourrait rester à cet égard dans quelques esprits [1].

---

[1] Dans le préambule de son travail, M. Marie signale plusieurs auteurs comme n'ayant pas connu la vraie limite de la région de convergence; à notre avis, on peut tout au plus leur reprocher des inexactitudes de rédaction qui s'expliquent par cette circonstance que la limitation précise de la convergence était inutile aux recherches

» Cette remarque faite, M. Marie s'est proposé de traiter la question suivante :

» Une équation

$$f(x, y) = 0$$

étant donnée, et une fonction particulière y étant choisie parmi celles que détermine l'équation, assigner le rayon du cercle de convergence correspondant à une valeur initiale donnée de x.

» On voit aisément que ce problème se ramène à celui-ci :

» Étant donnés deux points A et B correspondant à des valeurs a et b de x, étant donnée de plus, parmi les racines de l'équation

$$f(a, y) = 0,$$

celle qu'on regarde comme la valeur initiale de y, assigner, parmi les racines de l'équation

$$f(b, y) = 0,$$

celle qui est la valeur finale de y, en supposant connu le chemin par lequel le point mobile correspondant à la variable x est allé de A en B.

» La solution générale de ce problème dépasse sans doute les forces actuelles de l'Analyse, et les procédés qu'on peut imaginer pour le traiter ne sont pratiquement applicables qu'à des équations d'une simplicité exceptionnelle. La méthode que M. Marie propose de suivre, et qu'il a effectivement appliquée à plusieurs exemples, repose sur un mode de représentation des imaginaires qui lui est propre et qui consiste à considérer les valeurs

$$x = \alpha + \beta i, \quad y = \alpha' + \beta' i,$$

satisfaisant à l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

comme répondant à un point réel, ayant $\alpha + \beta$ pour abscisse et $\alpha' + \beta'$ pour ordonnée. Il arrive ainsi à représenter la marche des solutions imaginaires d'une équation

$$f(x, y) = 0,$$

de ces géomètres. Quant à MM. Briot et Bouquet, que M. Marie comprend dans ses critiques, nous n'avons aperçu dans leurs Ouvrages aucun passage qui y donnât prise.

à l'aide d'une suite de courbes réelles auxquelles il donne le nom de *conjuguées*. Il fait connaître diverses propriétés de ces lignes, et c'est par une discussion fondée sur leur forme et leur situation qu'il cherche à établir la correspondance entre les valeurs initiales et finales de la fonction.

» Vos commissaires n'ont vu là ni une solution complète du problème, ni un moyen de l'aborder plus facilement : quelques-uns des exemples particuliers auxquels l'auteur applique sa méthode ont été traités par l'un de nous à l'aide du mode de représentation ordinaire de la variable x, et il nous a semblé qu'on arrivait ainsi plus simplement et plus naturellement au but.

» Pour justifier notre manière de voir, il faudrait entrer dans des développements qui donneraient à ce Rapport une étendue exagérée. Nous nous bornerons donc à proposer à l'Académie de remercier M. Marie de ses Communications, dans lesquelles il insiste avec raison sur des distinctions qui n'avaient pas été faites avec assez de précision, tout en déclarant que les méthodes de l'auteur ne nous paraissent pas avoir une supériorité réelle sur celles dont les géomètres ont jusqu'ici fait usage. »

Tacchini. — *Sur la théorie des taches solaires*. Réponse à deux Notes précédentes de M. Faye.

Mannheim (A.). — *Propriétés relatives aux trajectoires des points d'une figure de forme invariable* (suite ; *voir* la séance du 3 mars).

On sait que, dans le déplacement d'une droite sur un plan, à un instant quelconque du déplacement, les tangentes aux trajectoires de tous les points de la droite enveloppent une parabole ; que les centres de courbure de ces trajectoires appartiennent à une conique, et qu'il existe, en général, deux points de la droite qui sont des points d'inflexion sur leurs trajectoires.

M. Mannheim s'est proposé d'étudier ce qui est relatif au déplacement d'une droite dans l'espace ; il démontre un certain nombre de propositions dont voici les principales :

« Les tangentes aux trajectoires de tous les points d'une droite D appartiennent à un paraboloïde hyperbolique dont un plan directeur est perpendiculaire à la droite Δ, conjuguée de D. »

« A un instant quelconque du déplacement d'une droite D, les

plans osculateurs des trajectoires des points de cette droite enveloppent une surface développable du quatrième ordre et de la troisième classe. Les axes de courbure appartiennent à une surface du second ordre. La surface formée par les normales principales est une surface du quatrième ordre, qui possède une droite triple. Le lieu des centres de courbure est une courbe du cinquième ordre. Les centres des sphères osculatrices sont sur une cubique gauche. »

« En général, il n'y a pas sur une droite mobile un point qui soit point d'inflexion sur la trajectoire. Si, à un instant quelconque du déplacement, un point de la droite est un point d'inflexion sur sa trajectoire, les plans osculateurs des trajectoires de tous les points de la droite mobile enveloppent une surface cylindrique. »

N° 11. Séance du 17 mars 1873.

Le Verrier. — *Théorie du mouvement de Jupiter.*

M. Le Verrier présente à l'Académie la théorie complète de Jupiter, constituant le Chapitre XX des *Recherches astronomiques.*

Janssen (J.). — *Passage de Vénus; méthode pour obtenir photographiquement l'instant des contacts, avec les circonstances physiques qu'ils présentent.*

Caligny (A. de). — *Note sur des applications nouvelles des principes des écluses de navigation à colonnes liquides oscillantes.*

Marie (Max.). — *Classification des intégrales quadratrices des courbes algébriques.*

Il s'agit du nombre des périodes de la quadratrice de la courbe la plus générale de degré m et des conditions dans lesquelles ce nombre se réduit, question en partie traitée par Riemann et par Clebsch; les travaux de Riemann sur ce sujet avaient été publiés en 1857.

Vicaire (E.). — *Observations sur la théorie des cyclones solaires.*

Perry (G.). — *Sur les concamérations polyédriques;* notes prises au Cours de Lamé en 1860-1861, 1861-1862 et 1863-1864 (*voir* la séance du 24 février).

La présente Note complète les indications données par M. Lamé,

dans la treizième des *Leçons sur l'Élasticité,* dans le discours pré liminaire, la fin de la onzième et la seizième des *Leçons sur l Théorie analytique de la Chaleur*. Dans ces passages, M. Lamé signalé l'importance des concamérations polyédriques, mais il n point publié ses idées sur le rôle des concamérations en Chimie, si la nécessité d'étudier les formes cubiques des nombres entiers po mener à bonne fin les recherches de cette nature, sur les alvéol courbes qui peuvent exister dans l'intérieur des concamération

N° 12. Séance du 24 mars 1873.

Faye. — *Note sur quelques points de la théorie des cyclon solaires, en réponse à une critique de M. Vicaire.*

Marie (Max.). — *Des conditions sous lesquelles quelqu périodes de la quadratrice d'une courbe de degré m disp raissent, en devenant nulles ou infinies.*

Noel (Ch.). — *Sur un nouveau micromètre à double imag*

N° 13. Séance du 31 mars 1873.

Caligny (A. de). — *Note sur des appareils proposés po faire des épuisements ou pour élever de l'eau, au moyen d vagues, sur les bords de la Méditerranée.*

Roger (E.). — *Théorie des phénomènes capillaires* (quatrièn Mémoire).

Marcel Desprez. — *Sur un nouveau procédé permettant d déterminer optiquement la vitesse des projectiles.*

Tacchini. — *Sur quelques points de la théorie émise p M. Faye, pour l'explication des taches solaires.*

Ribaucour. — *Note sur les faisceaux de cercles.*

N° 14. Séance du 7 avril 1873.

Villarceau (Yvon). — *Nouveau mode d'application du tro sième théorème sur les attractions locales au contrôle des réseau géodésiques et à la détermination de la vraie figure de la Terr*

M. Villarceau, en présentant, dans la séance du 2 octobre 187 une deuxième solution du problème des surfaces de niveau, ava donné sous une forme simple l'équation différentielle de la surfa de niveau et en avait déduit l'équation de condition qui constit

e troisième théorème sur les attractions locales. Dans la Communication actuelle, M. Villarceau revient sur l'intégration de l'équation différentielle, et se propose de résoudre le problème suivant : « Les stations astronomiques étant, par exemple, à peu près équidistantes, dans le sens des méridiens et des parallèles, déterminer la figure des surfaces de niveau, dans une étendue comprenant un nombre restreint de points, tel que cinq au moins, et neuf à treize tout au plus, au moyen de l'altitude supposée connue d'un point central... »

Chasles. — *Note sur la découverte de la variation par Aboul-Wefâ.*

Marie (Max.). — *D'une réduction accessoire, dans le nombre des périodes, qui se produit par juxtaposition, lors de la formation d'un point double.*

N° 15. Séance du 14 avril 1873.

Chasles. — *Explication du texte d'Aboul-Wefâ sur la troisième inégalité de la Lune.*

M. Bertrand répond à M. Chasles.

L'Académie décide que le texte original d'Aboul-Wefâ, sur lequel porte la discussion actuelle, sera inséré aux *Comptes rendus*.

Secchi (le P.). — *Sur la théorie des taches solaires ; réponse à M. Faye.*

Faye. — *Réponse au P. Secchi et à M. Vicaire.*

Saint-Venant (de). — *Rapport sur un Mémoire de M. Boussinesq, présenté le 28 octobre 1872 et intitulé : « Essai sur la théorie des eaux courantes ».*

Ce long Rapport, de 19 à 20 pages, est terminé par la conclusion suivante :

« Ces nombreux résultats d'une analyse élevée, fondés sur une discussion circonstanciée, ainsi que sur des comparaisons judicieuses de quantités de divers ordres de petitesse, tantôt à conserver, tantôt à négliger ou abstraire, et leur constante conformité aux résultats obtenus par les expérimentateurs et les observateurs les plus soigneux, nous ont paru des plus remarquables.

» Ce qui sert de fondement, savoir les formules dont on a parlé

dans la première partie de ce Rapport,..., nous paraît résoudre d'une manière nouvelle et heureuse, avec l'approximation désirable, autant qu'il est possible d'en juger dans l'état actuel de nos connaissances, des questions importantes, intéressant la pratique, et qui ont été souvent l'objet de longs et stériles tâtonnements. »

MARIE (Max.). — *Des résidus relatifs aux asymptotes. Classification des quadratrices des courbes algébriques.*

Voici quelques-unes des propositions énoncées par l'auteur :

Les courbes de degré m quarrables algébriquement sont celles qui ont $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles et que leurs asymptotes coupent toutes en trois points situés à l'infini.

Les courbes de degré m quarrables au moyen de fonctions circulaires seulement sont celles qui ont $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, etc., etc.

VICAIRE (E.). — *Nouvelles observations sur la théorie des cyclones solaires.*

JORDAN (C.). — *Mémoire sur les substitutions.*

Voici en quels termes l'auteur définit le principal objet de son Mémoire :

« Nous avons démontré (*Journal de Liouville*, t. XVI, 2ᵉ série) que le degré d'un groupe primitif G, ne renfermant pas le groupe alterné, mais contenant une substitution donnée A, qui déplace N lettres, ne saurait dépasser une certaine limite $L = N + M$. La quantité M est une fonction F (N) du nombre N, et nous avons donné une formule récurrente qui peut servir à la déterminer; mais la limite ainsi trouvée est trop élevée, et il conviendra, dans chaque cas, de recourir, pour la resserrer, à des considérations spéciales. Nous examinons aujourd'hui le cas où l'ordre de A est un nombre premier p. Tous les autres cas peuvent se ramener à celui-là; car une substitution quelconque, élevée à une puissance convenable, donne une substitution d'ordre premier. Nous arrivons à ce résultat remarquable, qu'*on peut assigner à* M *une limite qui ne dépend pas du nombre* p, *mais seulement du nombre des cycles de* A. »

CORNU (A.) et BAILLE (J.). — *Détermination nouvelle de la constante de l'attraction et de la densité moyenne de la Terre.*

Les expérimentateurs concluent de leurs premières recherches ue la densité moyenne de la Terre est représentée par 5,56.

N° 16. Séance du 21 avril 1873.

Faye. — *Réponse finale au P. Secchi.*

Belgrand. — *Sur les conditions qu'on a dû chercher à réaliser dans le choix de sources destinées à l'alimentation de la ville de Paris.*

Graeff. — *Sur l'application des courbes des débits à l'étude du régime des rivières et au calcul des effets produits par un système multiple de réservoirs.*

Stephan (E.). — *Sur les franges d'interférence observées avec de grands instruments dirigés sur Sirius et sur plusieurs autres étoiles; conséquences qui peuvent en résulter, relativement au diamètre angulaire de ces astres.*

N° 17. Séance du 28 avril 1873.

Secchi (le P.). — *Sur quelques observations spectroscopiques particulières.*

Hirn (G.-A.). — *Application du pandynamomètre à la mesure du travail d'une machine à vapeur, d'après la flexion du balancier.*

Ce nouveau dynamomètre, imaginé par M. Hirn en 1867, a été exposé en 1867, et décrit dans les *Annales des Mines*. L'auteur, pensant que cet instrument peut intéresser toutes les personnes qui s'occupent de Mécanique appliquée, croit devoir en donner à l'Académie une description.

Lévy (M.). — *Mémoire sur l'application de la théorie mathématique de l'élasticité à l'étude des systèmes articulés formés de verges élastiques.*

La plupart des constructions en bois ou en métal sont formées de pièces droites rigides, assemblées entre elles de façon à ne supporter que des forces élastiques dirigées dans le sens de leur longueur. L'auteur se propose d'indiquer, d'une manière générale, dans quels cas la Statique pure suffit à calculer ces forces élastiques, dans quels cas elle devient insuffisante, et de montrer comment alors les principes les plus élémentaires de la théorie mathématique

de l'élasticité permettent, sans hypothèse aucune et très-simplement, de compléter les indications fournies par la Statique. Il indique ensuite plusieurs conséquences intéressantes relatives au célèbre problème des *solides d'égale résistance*.

Stephan (E.). — *Nébuleuses découvertes et observées à l'Observatoire de Marseille*.

Halphen. — *Note sur les caractéristiques, dans la théorie des coniques, sur le plan et dans l'espace, et des surfaces du second ordre*.

L'auteur écrit la formule générale donnée par M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LXII, p. 405) sous la forme symbolique d'un produit, et parvient ainsi à simplifier les calculs pour la détermination du nombre des coniques (ou des surfaces) qui satisfont à des conditions simples ou multiples. L. P.

MÉLANGES.

NOTE SUR L'INTERSECTION DE DEUX COURBES;

PAR M. PAINVIN.

1. Lorsque deux courbes ont en commun un point O multiple, d'ordre p pour l'une, et d'ordre q pour l'autre, on sait que les deux courbes ont pq points communs coïncidant avec le point O, pourvu que les deux courbes n'aient pas de tangentes communes en ce point; cette proposition est facile à démontrer.

Mais lorsque les deux courbes ont des tangentes communes au point considéré, le nombre des points communs coïncidant avec O peut dépasser pq, et la détermination exacte de ce nombre est très-importante dans l'étude des courbes et des surfaces. Je dois signaler un Article de M. Halphen sur le même sujet, publié dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. I, p. 133.

Le point multiple étant pris pour origine des coordonnées, l'axe des y étant la tangente commune, la question peut être posée ainsi:

Trouver le nombre des points coïncidant avec l'origine et communs aux deux courbes

$$x^{i_0}\varphi_{p-i_0} + x^{i_1}\varphi_{p-i_1+1} + x^{i_2}\varphi_{p-i_2+2} + \ldots = 0,$$
$$x^{j_0}\psi_{q-j_0} + x^{j_1}\psi_{q-j_1+1} + x^{j_2}\psi_{q-j_2+2} + \ldots = 0,$$

les lettres φ_i et ψ_i désignant des fonctions homogènes en x et y, et du degré i.

2. La méthode que je vais indiquer permet toujours de résoudre la question, lorsque les exposants $i_0, i_1, i_2, \ldots, j_0, j_1, \ldots$ sont donnés numériquement, et cela sans difficulté et sans calculs pénibles.

Mais peut-on avoir une réponse générale, qui dispense de faire ces calculs, lorsqu'on laisse aux exposants leurs valeurs indéterminées?

Jusqu'à présent, je n'ai pu résoudre la question de cette manière générale, que dans le cas particulier où l'une des équations ne renferme le facteur x qu'à son premier terme.

Ainsi l'on peut énoncer la proposition suivante :

Soient les deux courbes

$$(1)\quad \begin{cases} C = x^{i_0}\varphi_{p-i_0} + x^{i_1}\varphi_{p-i_1+1} + x^{i_2}\varphi_{p-i_2+2} + \ldots + x^{i_k}\varphi_{p-i_k+k} \\ \qquad + \varphi_{p+k+1} + \ldots = 0, \\ D = x^{j_0}\psi_{q-j_0} + \psi_{q+1} + \ldots = 0; \end{cases}$$

le nombre des points coïncidant avec l'origine O *et communs aux deux courbes* C *et* D *est égal à*

$$pq + \text{le plus petit des nombres } \{rj_0 + i_r\},$$

i_r étant nul, lorsque r est supérieur à k.

On suppose que les fonctions φ_{p+k+1} et ψ_{q+1} ne renferment pas le facteur x. C'est cette proposition que je vais démontrer. Je l'ai déjà énoncée dans ce *Bulletin*, t. IV, p. 131.

3. Je vais d'abord montrer que le théorème est vrai pour $k = 0$; j'établirai ensuite que, si la proposition est admise pour une valeur quelconque de k, elle sera vraie pour la valeur $k+1$.

N. B. Pour abréger, je désignerai par N((C, D)) le nombre des points coïncidant avec O et communs aux courbes C et D.

urbes

$$
)\quad \left\{\begin{aligned} C &= x^{i_0}\varphi_{p-i_0} + x^{i_1}\varphi_{p-i_1+1} + x^{i_2}\varphi_{p-i_2+2} + \ldots + x^{i_k}\varphi_{p-i_k+k} \\ &\qquad + \varphi_{p+k+1} + \ldots = 0, \\ D &= x^{j_0}\psi_{q-j_0} + \psi_{q+1} + \ldots = 0, \end{aligned}\right.
$$

s fonctions φ_{p+k+1} et ψ_{q+1} ne renferment pas le facteur x.

Nous admettons que le théorème énoncé au n° 2 est vrai, rsque l'équation de la courbe (C) renferme k termes consécutifs ui, à partir du terme du moindre degré, sont divisibles par x, équation de la courbe (D) n'admettant toujours le facteur x qu'à on premier terme; je dis que le théorème est encore vrai, lorsque 'équation de la courbe (C) renfermera $(k+1)$ termes consécutifs livisibles par x, à partir du premier, l'équation de la courbe (D) ne renfermant toujours x qu'à son premier terme.

Soit d'abord $i_0 < j_0$.

Formons la combinaison

$$
2)\qquad \Sigma = C.x^{j_0-i_0}\psi_{q-j_0} - D.\varphi_{p-i_0},
$$

c'est-à-dire

$$
3)\quad \Sigma = [x^{i_1+j_0-i_0}\psi_{q-j_0}\varphi_{p-i_1+1} - \psi_{q+1}\varphi_{p-i_0}] + [\ldots] + \ldots.
$$

D'après l'identité (2), on a

$$
4)\qquad N((C,\Sigma)) = N((C,D)) + N((C,\varphi_{p-i_0}));
$$

or, en raisonnant comme on vient de le faire au n° 3, on trouve

$$
N((C,\Sigma)) = p(p+q+1-i_0);\quad N((C,\varphi_{p-i_0})) = (p+1)(p-i_0),
$$

d'où il résulte

$$
5)\qquad N((C,D)) = pq + i_0.
$$

Ce calcul et cette conclusion conviennent encore au cas où $i_0 = j_0$.

Soit en second lieu $i_0 > j_0$.

Formons la combinaison

$$
6)\qquad \Sigma_1 = C.\psi_{q-j_0} - D.x^{i_0-j_0}\varphi_{p-j_0},
$$

c'est-à-dire

$$
7)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma_1 = {} & [x^{i_1}\varphi_{p-i_1+1}\psi_{q-j_0} - x^{i_0-j_0}\psi_{q+1}\varphi_{p-i_0}] \\ & + [x^{i_2}\varphi_{p-i_2+2}\psi_{q-j_0} - x^{i_0-j_0}\psi_{q+2}\varphi_{p-i_0}] + \ldots \\ & + [x^{i_k}\varphi_{p-i_k+k}\psi_{q-j_0} - x^{i_0-j_0}\psi_{q+k}\varphi_{p-i_0}] \\ & + [\varphi_{p+k+1}\psi_{q-j_0} - x^{i_0-j_0}\psi_{q+k+1}\varphi_{p-i_0}] + \ldots. \end{aligned}\right.
$$

D'après l'identité (6), on a

$$N((D,\Sigma_1)) = N((D,C)) + N((D,\psi_{q-j_0})),$$

d'où l'on déduit

$$(8) \qquad N((C,D)) = N((D,\Sigma_1)) - N((D,\psi_{q-j_0})).$$

On a d'abord

$$(9) \qquad N((D,\psi_{q-j_0})) = (q+1)(q-j_0).$$

Déterminons maintenant $N((D,\Sigma_1))$.

Remarquons que l'équation de la courbe Σ_1 (7) renferme le facteur x à ses k premiers termes, et l'équation de la courbe (D) ne le renferme qu'à son premier terme; le théorème admis est donc applicable au cas actuel, et l'on a

$$(10) \quad N((D,\Sigma_1)) = q(p+q+1-j_0) + \text{le plus petit des nombres } (\rho j_0 + h_\rho),$$

h_ρ désignant, dans l'équation de Σ_1, l'exposant de x facteur dans le terme qui en a ρ avant lui; ρ peut avoir les valeurs 0, 1, 2,..., $k-1$, k, en admettant l'hypothèse $h_k = 0$.

Eu égard aux valeurs (9) et (10), l'égalité (8) donne

$$\begin{aligned} N((C,D)) &= pq + j_0 + \text{le plus petit des nombres } (\rho j_0 + h_\rho) \\ &= pq + \text{le plus petit des nombres } [(\rho+1)j_0 + h_\rho]; \end{aligned}$$

ou, en remplaçant $\rho + 1$ par r

$$(11) \quad N((C,D)) = pq + \text{le plus petit des nombres } (rj_0 + h_{r-1}).$$

On voit, par l'équation (7) de la courbe Σ_1, que l'on devra prendre

$$(11\,bis) \quad \begin{cases} h_{r-1} = i_r, & \text{si} \quad i_r < i_0 - j_0, \\ h_{r-1} = i_0 - j_0 + g_r, & \text{si} \quad i_r > i_0 - j_0 + g_r; \end{cases}$$

g_r est l'exposant de x qui peut se trouver en facteur dans le terme ψ_{q+r}.

D'après la remarque qui termine l'alinéa précédent, r ne devra avoir que les valeurs 1, 2, 3, ..., k, $k+1$, avec l'hypothèse $i_{k+1} = 0$; quant à g_r, l'indice r ne peut jamais être inférieur à 2, puisque le terme ψ_{q+1} n'admet pas le facteur x.

J'observe de suite que, si $i_0 < j_0$, tous les nombres $(rj_0 + h_{r-1})$ sont supérieurs à i_0, qui est un des nombres contenus dans cette formule. En effet, les nombres renfermés dans cette formule ne peuvent être que

$$rj_0 + i_r \quad \text{ou} \quad rj_0 + i_0 - j_0 + g_r;$$

premiers sont plus grands que j_0, et *a fortiori* seront plus que i_0, puisque l'on suppose $j_0 > i_0$; quant aux seconds, ils siblement supérieurs à i_0; car la plus petite valeur de r est 1, cas on trouve i_0, puisque $g_1 = 0$. Ainsi, lorsqu'on suppose , i_0 est le plus petit des nombres que puisse fournir la for- $rj_0 + h_{r-1}$). Donc la formule (5), trouvée dans le premier ut être renfermée dans la formule (11).

:marque maintenant que les nombres donnés par la formule h_{r-1}) sont, d'après les conditions (11 *bis*) : ou de la forme

$$r'j_0 + i_{r'}, \qquad \text{si} \quad i_{r'} < i_0 - j_0,$$

a forme

$$r''j_0 + i_0 - j_0 + g_{r''}, \quad \text{si} \quad i_{r''} > i_0 - j_0 + g_{r''};$$

nbres r' et r'' ne doivent jamais avoir les mêmes valeurs et vent prendre que les valeurs de la suite 1, 2, 3,..., k, $k+1$. onsidérons d'abord les nombres de la suite (2°); le nombre ·ra prendre une ou plusieurs des valeurs de la suite 1, 2,..., 1; et alors les deux cas suivants pourront se présenter : ou parmi les valeurs que devra prendre r'', une d'elles sera ou bien toutes les valeurs que prendra r'' seront supérieures é.

; le premier cas, la suite (2°) renfermera le nombre i_0 cor- lant à $r'' = 1$, puisque $g_1 = 0$; et tous les autres nombres urra donner la suite (2°) seront évidemment supérieurs à i_0, : les autres valeurs de r'', s'il y en a, seront plus grandes

· le second cas, on trouvera toujours dans la suite (1°) un : inférieur au plus petit des nombres que pourra fournir la 1°); soit, en effet, r_1 la valeur de r'' à laquelle correspond le tit des nombres de la suite (2°); r_1 est, d'après notre hypo- plus grand que 1; par conséquent la suite (1°) renfermera le : correspondant à $r' = 1$, c'est-à-dire $j_0 + i_1$; et alors $- j_0$; on a donc

$$i_1 < j_0 + (i_0 - j_0), \quad \text{et } \textit{a fortiori} \quad < r_1 j_0 + (i_0 - j_0) + g_{r_1};$$

dire que le nombre $(j_0 + i_1)$ de la suite (1°) est inférieur à · $i_0 - j_0 + g_{r_1}$), qui est, par hypothèse, le plus petit des :s de la suite (2°).

Ainsi i_0 est le seul des nombres de la suite (2°) pour lequel il n'y en ait pas un inférieur renfermé dans la suite (1°); on peut donc laisser de côté tous les nombres de la suite (2°), sauf le nombre i_0. Mais remarquons que la suite (1°) renfermera ce nombre i_0, si nous convenons d'attribuer à r' la valeur o qui jusqu'à présent se trouvait exclue; il en résulte alors que le plus petit des nombres fournis par l'une ou l'autre des suites (1°) et (2°) sera nécessairement renfermé dans la formule $(rj_0 + i_r)$, où r devra avoir maintenant les valeurs $0, 1, 2, \ldots, k, k+1$, avec la condition $i_{k+1} = 0$.

La proposition énoncée est donc complétement démontrée.

5. J'indiquerai les exemples suivants :

$$(1°) \quad \begin{cases} C = x^3 + x\varphi_3 + x^2\theta_3 + x^3\chi_3 + x^6\varphi_1 + \varphi_8 + \ldots = 0, \\ D = x^2 + \psi_3 + \ldots = 0, \end{cases}$$

$$N((C, D)) = 2.3 + 3 = 9.$$

$$(2°) \begin{cases} C = x^7 + x^6\varphi_2 + x^5\varphi_4 + x^4\varphi_6 + x^3\varphi_8 + x^2\varphi_{10} + x\varphi_{12} + \varphi_{14} + \ldots = 0, \\ D = x + \psi_2 + \ldots = 0, \end{cases}$$

$$N((C, D)) = 1.7 + 7 = 14.$$

$$(3°) \quad \begin{cases} C = x^9 + x^7\varphi_3 + x^2\varphi_9 + x^{12} + x\varphi_{12} + \varphi_{14} + \ldots = 0, \\ D = x^2 + \psi_3 + \ldots = 0, \end{cases}$$

$$N((C, D)) = 2.9 + 6 = 24.$$

$$(4°) \quad \begin{cases} C = x + x^2 + x^3 + x^4 + \varphi_5 + \ldots = 0, \\ D = x + \psi_2 + \ldots = 0, \end{cases}$$

$$N((C, D)) = 1.1 + 1 = 2.$$

Ces résultats ont été obtenus à l'aide de la formule générale que nous venons d'établir, et vérifiés en appliquant directement la méthode qui nous a servi à démontrer cette formule.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

)BI (C.-G.-J.). — VORLESUNGEN ÜBER DYNAMIK, NEBST FÜNF HINTERLAS-NEN ABHANDLUNGEN DESSELBEN, herausgegeben von A. CLEBSCH. — Berlin, ruck und Verlag von Georg Reimer, 1866. — 1 vol. in-4°. Prix : 6⅔ Thlr.

'important Ouvrage dont nous voulons ici donner très-som-rement l'analyse est l'une des plus belles productions de son stre auteur. La Mécanique analytique n'avait fait, depuis range, aucun progrès comparable à celui-là, et, comme à une e hauteur les voies les plus diverses semblent se réunir et se fondre, le Calcul intégral, en même temps, a reçu du Livre thume de Jacobi un accroissement important, qui éclaire, en la plifiant, une de ses théories les plus vastes et les plus difficiles. 'exposition des méthodes nouvelles forme un Cours de Méca-ue professé à Königsberg en 1843, dont M. Clebsch, dix ans ès la mort de Jacobi, nous présente la rédaction exacte en lui servant la forme de Leçons.

es idées principales s'étaient répandues parmi les géomètres; obi lui-même en avait, à plusieurs reprises, esquissé les traits ncipaux. Dans un Mémoire justement admiré, imprimé en 1837 s le tome 17 du *Journal de Crelle,* plusieurs résultats impor-ts, qui se retrouvent dans les *Vorlesungen,* sont énoncés et en tie démontrés. Jacobi, malgré sa mort prématurée, avait d'ail-rs assuré aux géomètres ce précieux héritage; un Mémoire écrit lui-même et retrouvé dans ses papiers forme, en effet, l'exposi-ı presque complète de la théorie nouvelle. La publication de Clebsch la présente avec plus d'ensemble, en donnant, sur que point, d'abondants exemples et de minutieux détails; elle tera classique, tout le fait présumer, car à l'importance du fond oint un rare mérite d'exposition et une netteté bien rarement inte dans la discussion de théories aussi difficiles.

agrange, dans la *Mécanique analytique,* a donné aux équations mouvement d'un système une forme élégante et générale, sim-iée presque aussitôt par une heureuse transformation de Poisson, t Hamilton, le premier, a montré le résultat final sous la forme arquable qui doit conserver son nom. En restreignant son

étude au cas fort étendu auquel s'applique le principe des forces vives, Hamilton introduit dans les équations une seule fonction des variables inconnues, dont les dérivées partielles, par rapport à ces variables, sont égales aux dérivées de celles-ci par rapport au temps ou à leurs valeurs changées de signes. Cette forme symétrique, indépendante de la nature du problème, et sous laquelle les questions les plus diverses ne se distinguent les unes des autres que par la forme d'une fonction homogène du second degré, dans tous les cas, par rapport à la moitié des variables, semble déjà un fait analytique bien remarquable. Hamilton y a joint une autre remarque qui, grâce aux commentaires de Jacobi, rendra son nom immortel. Les équations différentielles dont la formation dépend d'une seule fonction peuvent toujours s'intégrer aussi à l'aide d'une seule fonction supposée connue, que Hamilton nomme *fonction caractéristique*, et dont les dérivées partielles par rapport aux constantes qu'elle renferme, égalées à d'autres constantes, donnent les intégrales du problème.

Ce beau théorème, malheureusement, restait sans application utile; car la formation de la fonction caractéristique, telle que la définit Hamilton, suppose la résolution préalable du problème. Hamilton, il est vrai, a indiqué deux équations différentielles auxquelles satisfait sa fonction caractéristique, et dont la solution commune pourrait être recherchée indépendamment de l'étude directe du problème primitif; mais, sur cette question difficile, les méthodes connues n'avaient pas prise, et Hamilton n'a donné aucune ouverture.

Tel était l'état de la question lorsque pour la première fois, en 1837, elle attira l'attention de Jacobi. L'étude du Mémoire d'Hamilton lui révéla une généralisation qui transforme toute la théorie. La fonction caractéristique n'est pas unique, comme l'avait indiqué Hamilton; elle peut être remplacée par toutes les solutions complètes, en nombre infini, comme on sait, de l'une des deux équations données par l'illustre géomètre de Dublin. La seconde de ces équations devient inutile.

Cette importante généralisation devait naître nécessairement de l'étude du Mémoire d'Hamilton; l'éminent inventeur, en effet, ayant donné les deux équations qui définissent pour lui la fonction caractéristique, les géomètres ne pouvaient manquer de s'exercer

r la réciproque, en cherchant si toute solution commune
ıations possède les propriétés de la fonction caractéristique.
roblème ainsi posé ne présente aucune difficulté, et les
s tentatives devaient montrer qu'une seule équation est
; dans la démonstration, qui s'offre d'elle-même, la se-
joue aucun rôle.

omètre beaucoup moins habile que Jacobi aurait donc pu
ment se trouver conduit à la belle découverte sur laquelle
ujourd'hui l'une des plus admirables théories du Calcul
; mais le résultat que nous venons d'énoncer ne forme,
u'en soit l'élégance, qu'une faible partie de l'œuvre nou-
est dans l'étude de ses conséquences que se révèle presque
page un génie qu'on serait tenté de nommer incomparable,
siècle n'avait produit déjà des géomètres tels que Gauss
ıy. Après avoir ramené la solution d'un problème de Méca-
la recherche d'une solution d'une seule équation différen-
rtielle, Jacobi s'est demandé tout d'abord comment les
connues peuvent conduire à une telle solution. La seule
générale dont il eût alors connaissance était celle de
n l'appliquant au nouveau problème, on est ramené tout
au système primitif d'équations, dont la solution dès lors
le aucunement avancée. Il y a plus, le problème semble
être compliqué, puisque la solution complète devient une
préparation à celle de la question nouvelle, dans laquelle
ransformé. De moins habiles sans doute, satisfaits de cette
judicieuse et incontestable, auraient cru leur œuvre ter-
La théorie d'Hamilton semble, en effet, approfondie, jugée
et condamnée sans retour.

le renoncer à l'étude dont il avait, au contraire, aperçu
nportance, Jacobi, dans la remarque que nous venons de
, vit la condamnation de la théorie de Pfaff bien plus en-
de celle d'Hamilton. Quand deux problèmes, en effet, se
t l'un à l'autre, les solutions directes de chacun d'eux ont,
le même degré de complication, et, si l'un d'eux exige des
notablement plus compliqués que l'autre, le géomètre doit
ır certain qu'il est possible de les simplifier.

moire de 1837 se termine, en effet, par une exposition de
e de Pfaff, perfectionnée et simplifiée par la suppression,

dans le cas général, de toutes les opérations qui, dans l'étude des problèmes de Mécanique, sembleraient donner à la question transformée une complication supérieure à celle du problème primitif.

L'identité de deux problèmes tenus jusque-là pour distincts étant constatée, on pourrait croire que l'on peut, de deux manières seulement, tirer parti de cette belle remarque, en ramenant la première question à la seconde, ou la seconde à la première. Jacobi cependant, dès sa première Communication à l'Académie des Sciences de Paris, en [illegible], appelait l'attention sur une combinaison remarquable des deux problèmes, qui frappa vivement les géomètres. Dans un grand nombre de cas, en effet, pour obtenir la fonction caractéristique d'Hamilton, il n'est pas nécessaire d'avoir intégré complètement les équations différentielles du problème de Mécanique : la moitié des intégrales peut suffire : dès qu'elles sont connues, on peut immédiatement obtenir les autres. C'est ce qui a lieu en particulier toutes les fois qu'on étudie le mouvement d'un point dans un plan : une seule intégrale, outre celle des forces vives, permet alors de former la fonction caractéristique pour en déduire, par de simples différentiations, les deux intégrales qui complètent la solution. MM. Liouville et Poisson suppléèrent bien aisément à la démonstration que Jacobi n'avait pas donnée, et [illegible] théorie générale, fut introduit aussitôt dans notre enseignement classique à la Faculté des Sciences de Paris [illegible].

[illegible] l'occasion de la mort de Poisson [illegible] un beau théorème [illegible] géomètre [illegible] suivant [illegible] résultat réellement [illegible] dans la Science. [illegible]

[illegible] problème de Mécanique [illegible] et facile. [illegible] avec les [illegible] et [illegible] à la solution complète.

[illegible] insurmontable des

ntégrations, et la facilité avec laquelle, au contraire, les premières ntégrales s'obtiennent dans chaque cas, l'admiration de Jacobi emble justifiée, et le théorème, tel que nous l'énonçons, est vériblement prodigieux.

Il faut malheureusement en rabattre dans les applications, et énoncé, Jacobi ne l'ignorait pas, laisse subsister des cas d'exception dont le nombre est tel, qu'aucun problème, jusqu'ici, n'a pu tre résolu par l'application pure et simple du théorème de Poisson deux intégrales primitivement obtenues. La proposition générale n'est pas pour cela en défaut : l'équation donnée par Poisson est exacte dans tous les cas ; mais elle se réduit souvent à une identité et souvent aussi à une relation qui n'apprend rien, parce qu'elle rentre dans les précédents.

C'est après la mort de Jacobi, mais plusieurs années avant la publication des *Vorlesungen*, que le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de Berlin (*Journal de Crelle*, tome 60) a publié son beau Mémoire sur l'intégration des équations différentielles partielles. La théorie des équations de la Mécanique, généralisée et transformée, a ramené l'esprit de l'illustre auteur sur un sujet déjà plus d'une fois abordé par lui et en apparence bien différent. Le théorème de Poisson, généralisé également suivant les besoins de la théorie nouvelle, y joue un rôle considérable, et c'est précisément un des cas particuliers dans lesquels on peut le considérer comme en défaut qui forme, en se reproduisant sans cesse, le pivot en quelque sorte et le nœud de la méthode. Notre intention n'est pas d'analyser ici ce chef-d'œuvre, qui, publié depuis dix ans déjà, est aujourd'hui connu de tous les géomètres.

L'Ouvrage publié par M. Clebsch contient la rédaction, fort élégamment écrite par le digne élève d'un si grand maître, de trente-quatre Leçons professées à Königsberg pendant les années 1842 et 1843. Plusieurs belles découvertes, révélées dès cette époque à ses élèves, avaient été seulement indiquées au public; quelques-unes même étaient restées complétement inédites. Plus d'un géomètre, on le comprend, en s'exerçant sur des indications très-exactes quoique incomplètes, a dû rencontrer quelques-unes des vérités déjà enseignées à Königsberg, et il est bien difficile de décider la part de mérite, on peut même dire de gloire, qu'il a par là méritée. La question est aussi insoluble que futile ; le récit des circonstances

communes est le devoir de l'historien, qui ne peut ni ne doit s'ériger en tribunal pour prononcer sur les droits de chacun.

Un champ de blé ou une maison doivent de toute nécessité appartenir à quelqu'un, et, si le doute s'élève, un jugement sans appel doit trancher la question : il n'en est pas de même d'une vérité scientifique ; la propriété peut rester douteuse, ou, pour en parler mieux, il n'y a pas lieu de l'adjuger. Quand on sait qui le premier a fait la découverte, à qui et sous quelle forme il l'a communiquée, quel autre l'a publiée le premier sans que sa loyauté soit révoquée en doute, je n'ai jamais compris ce que l'on cherche à décider de plus en demandant à qui elle appartient.

Jacobi passe en revue, en les esquissant à grands traits, les principes généraux de la Science du mouvement. Sur les équations du mouvement du centre de gravité, ses Leçons s'éloignent peu de nos meilleurs Ouvrages classiques.

Le principe des forces vives est l'occasion d'une remarque fort neuve sans doute pour les auditeurs du Cours de 1843, et qui, aujourd'hui encore, doit intéresser plus d'un lecteur. En supposant l'existence d'une fonction des forces homogènes, Jacobi obtient une équation remarquable, qui prend une forme beaucoup plus simple encore lorsque la fonction est de degré — 2 ; une des conséquences signalées par l'auteur s'applique à un système de points dans lesquels l'attraction serait en raison inverse du cube de la distance, pour démontrer que l'un d'eux, au moins dans ce cas, doit s'éloigner indéfiniment, ou que deux points primitivement séparés doivent se choquer et se réunir en un seul. Jacobi n'épuise pas toutes les conséquences de sa remarque, dont on peut déduire aisément que le système doit, à la longue, se dissiper ou se condenser, de telle sorte que tous les points dont la distance ne grandit pas indéfiniment se rapprochent jusqu'à n'en former qu'un seul.

A l'occasion du principe des aires, Jacobi examine le cas où l'un des points du système décrit uniformément une circonférence de cercle : une intégrale élégante convient à ce cas pour remplacer le principe des forces vives et celui des aires, qui séparément ne sont plus applicables. Le mouvement de Jupiter pouvant, dans une première approximation, être considéré comme circulaire et uniforme, on aperçoit une application possible à l'Astronomie, qui n'est d'ailleurs que rapidement indiquée dans les *Vorlesungen*.

incipe de la moindre action examiné ensuite est expliqué ie précision jusqu'ici trop rare dans les plus célèbres ;s. Peut-être serait-il juste de faire une exception pour Rodrigues qui, dans la *Correspondance sur l'École Poly-ie,* avait déjà signalé comme indispensable la condition tendue seulement par les meilleurs auteurs, et sur laquelle Jacobi.

i, à cette occasion, donne une indication de ses travaux sur iction des maxima et minima, en indiquant l'application : au cas du mouvement d'une planète.

ques remarques relatives à ce problème célèbre peuvent e s'ajouter utilement aux résultats donnés par Jacobi.

ibord il faut distinguer soigneusement l'intégrale minima et petite valeur possible de l'intégrale considérée. La pre-n effet est plus petite que les intégrales infiniment voisines, ne peut rien affirmer sur le résultat de sa comparaison avec ;. En étudiant les lignes *minima* ou *géodésiques* sur une Jacobi énonce cette règle remarquable : si l'on considère es lignes minima issues d'un même point, elles enveloppent, ral, une courbe lieu de leurs intersections successives; cha-elles est minima jusqu'au point de contact avec cette courbe i'à ce point seulement. Lorsque cette courbe enveloppe pas, on ne peut mener d'un point à un autre qu'une seule odésique, qui est nécessairement la plus courte possible. qui a lieu : Jacobi l'a affirmé depuis longtemps, pour les à courbures opposées, et M. O. Bonnet, s'appuyant sur un émoire de Sturm, a donné avec élégance la démonstration : comme difficile par l'illustre auteur. Mais on peut faire, de cet élégant théorème, une remarque curieuse : la ligne indiquée par la règle de Jacobi n'est pas réellement la plus et l'on prouve aisément que l'une des lignes géodésiques d'un point donné M et touchant la courbe enveloppe en I, à un arc quelconque II' de cette courbe enveloppe, donne

faite entre la ligne *la plus courte entre toutes* et la ligne plus courte que les voisines, nommée généralement *ligne minima*, dissipe toute difficulté.

Une remarque sur le problème du mouvement elliptique semblera peut-être plus curieuse et plus nouvelle : si l'on considère le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe en raison inverse du carré de la distance, et partant avec une vitesse initiale donnée d'une position également donnée, toutes les ellipses décrites, et qui ont même grand axe, seront enveloppées par une même ellipse ayant pour foyers le point attirant et le point initial considéré. Le minimum de l'intégrale de la moindre action s'étend sur chaque trajectoire, d'après le principe de Jacobi, jusqu'à son contact avec cette enveloppe, c'est-à-dire, comme on le prouve aisément, jusqu'à l'extrémité de la corde qui passe par le point de départ donné et par le second foyer. L'arc de courbe ainsi défini étant le seul qui puisse, entre les deux extrémités, satisfaire aux conditions analytiques du problème, il semble que cette fois l'intégrale doit être bien réellement un minimum; car il faut bien que la somme des produits de la vitesse par l'élément parcouru, qui évidemment ne peut devenir nulle, ait, pour un certain chemin, une valeur moindre que tous les autres. Ce n'est pas toujours cependant à l'arc d'ellipse indiqué par Jacobi que correspond ce minimum absolu. Il faut remarquer, en effet, que le principe des forces vives, introduit, on le sait, comme équation de condition, assigne à la vitesse, en chaque point du plan, une valeur déterminée. Or cette valeur, nulle sur les points d'une certaine circonférence, est imaginaire pour ceux qui sont placés en dehors; si donc on réunit deux points par un chemin qui emprunte un arc à la circonférence limite, la partie correspondante de l'intégrale sera nulle, et la comparaison avec les intégrales voisines, qui pourront devenir imaginaires, échappera aux règles du Calcul des variations. L'intégrale peut devenir ainsi plus petite que celle que fournit le Calcul des variations, et l'on prouve aisément qu'à l'arc défini par Jacobi peut correspondre une valeur plus grande que pour un chemin composé d'un arc pris sur le cercle limite dont nous avons parlé et de deux portions de rayons du même cercle. Un tel chemin ne saurait, il est vrai, être réellement parcouru, puisque la vitesse s'y trouve nulle sur une partie du parcours; mais il est aisé de remplacer l'arc de cercle

par un chemin voisin placé dans son intérieur, de manière à rendre le trajet possible, tout en laissant l'intégrale plus petite que le minimum signalé jusqu'ici ([1]).

Après avoir rappelé le principe de la moindre action et précisé le sens qu'on y doit attacher, Jacobi démontre un théorème analogue, mais complétement distinct pourtant, dû à Hamilton. L'intégrale qui, d'après le nouveau principe, est minima, dont, pour parler plus correctement, la variation est nulle, diffère de celle de la moindre action, dans le cas où le principe de la moindre action a lieu, par l'addition seulement d'un terme proportionnel au temps; mais les conditions sous lesquelles la variation est nulle sont ici complétement changées, et le temps du trajet qui, dans le principe de la moindre action, ne jouait aucun rôle, est ici une des données de la question, tandis que la constante des forces vives qui était donnée ne l'est plus dans l'énoncé nouveau. — Si l'on applique, par exemple, les deux théorèmes au mouvement elliptique d'une planète, dans le premier, le chemin réellement suivi est comparé à toutes les routes possibles ayant mêmes extrémités et pour lesquelles la vitesse en chaque point est exprimée par la formule des forces vives; dans le second, il l'est à tous les chemins parcourus d'une manière arbitraire sous la seule condition que la durée du trajet ait une valeur donnée.

La propriété curieuse découverte par Hamilton se présentait dans son Mémoire comme importante, surtout parce que cette intégrale, qui présente un caractère de minimum, est précisément la fonction caractéristique. Nous avons dit comment Jacobi, généralisant une première fois les découvertes de Hamilton, en a considérablement accru l'importance en y rattachant une théorie complète des équations différentielles partielles du premier ordre. A chaque équation de ce genre correspond un système d'équations différentielles ordinaires, que l'on peut nommer *corrélatif*, et la dépendance des deux problèmes est telle, que toute solution complète de l'équation aux dérivées partielles permet d'intégrer le système corrélatif, tandis que la solution du système d'équations différentielles

---

([1]) Cette remarque curieuse, je l'ai appris depuis que ces lignes sont écrites, a été faite récemment par M. Todhunter dans son Ouvrage intitulé : *Researches of the Calculus of variations*, 1871. (Voir *Bulletin*, t. IV, p. 273.)

ordinaires fournit une solution complète de l'équation aux dérivées partielles.

Jacobi donne un grand nombre d'exemples fort intéressants de sa belle théorie; il n'indique aucune exception. Dans le tome III des *Mathematische Annalen,* publiées à Leipzig (¹), M. A. Mayer croit pouvoir en signaler une qui, se présentant à la suite d'une transformation souvent nécessaire, aurait une très-grande importance. M. Mayer, il est vrai, fait voir aussitôt, et d'une manière extrêmement élégante, qu'à l'aide d'une très-légère modification on peut éviter la difficulté. Quelque élégant que soit l'artifice de M. Mayer, un peu d'attention montrera qu'il était inutile, et que la règle prescrite par Jacobi n'était nullement en défaut dans le cas indiqué par lui; aucun changement n'était donc nécessaire. La méthode proposée par M. Mayer fournit seulement une solution nouvelle analogue à celle de Jacobi, qui subsiste sans modification.

Sa méthode, en effet, consiste à calculer une certaine intégrale V pour l'exprimer ensuite en fonctions de quantités désignées, qui, dans les *Vorlesungen,* sont nommées $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_1^0, q_2^0, q_3^0, \ldots,$ et le cas d'exception signalé par M. Mayer est celui où la fonction V se réduit à zéro. « On ne peut, dit-il alors, l'exprimer sous la forme demandée par Jacobi. » C'est là une inadvertance du savant auteur; les quantités $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_1^0, q_2^0, q_3^0, \ldots$ ne sont plus, en effet, arbitraires dans ce cas; il existe, on le démontre aisément, entre elles une relation nécessaire, et le premier membre de cette relation peut être considéré comme l'expression de *zéro* en fonction des lettres demandées. Cette remarque, faite au Collége de France, dans une Leçon à laquelle assistait M. Darboux, a été l'occasion d'un développement intéressant que ce jeune géomètre aura, prochainement sans doute, l'occasion de livrer au public.

Parmi les applications données par Jacobi, l'une des plus élégantes est, sans contredit, la démonstration du célèbre théorème d'Abel, déduit de l'étude d'un problème de Mécanique fort simple. Si l'on considère, en effet, le mouvement d'un système de points qui ne sont sollicités par aucun eforce, ou qui le sont par des forces dirigées vers un point fixe et proportionnelles à la distance à ce point, sa solution n'offre aucune difficulté. Or il arrive que, en adoptant un

(¹) Voir *Bulletin*, t. II, p. 364.

système de variables analogues aux coordonnées elliptiques introduites dans la Science par Lamé, l'équation aux dérivées partielles corrélative du problème admet une solution composée d'une somme d'intégrales abéliennes, qui se présente pour ainsi dire d'elle-même, et dont la comparaison avec la solution directe fournit une démonstration du théorème célèbre que Jacobi, quelques années après la mort d'Abel, appelait : *Carum heredium a geometris acceptum*. Les Leçons de Jacobi, à partir de la trentième, sont consacrées à l'étude des équations différentielles du premier ordre. La théorie qu'il expose, très-nouvelle à l'époque où cinquante auditeurs se pressaient à Königsberg autour de la chaire de Jacobi, est aujourd'hui bien connue des géomètres : un beau Mémoire, publié en 1862, leur en a révélé tous les détails. La publication de ce Mémoire a coïncidé avec celle des travaux d'un jeune géomètre d'un rare mérite, Edmond Bour, qui, par ses propres recherches, avait retrouvé alors, en s'aidant des résultats antérieurement publiés par d'autres, le principe et l'ordre le plus naturel et le plus simple des belles découvertes de Jacobi. « La publication posthume de son Ouvrage vient d'avoir lieu, disait Bour, par les soins de M. Clebsch, et c'est avec une bien vive satisfaction que, en tenant compte de la différence entre le couronnement de l'édifice d'un maître et les essais incertains d'un élève, j'ai constaté, dans la nouvelle méthode de Jacobi, l'identité la plus parfaite avec celle que j'ai eu l'honneur de soumettre sept ans avant à l'Académie. »

Les Leçons de Jacobi avaient été publiquement professées, en 1842, devant un nombreux auditoire, dix ans avant l'entrée de Bour à l'École Polytechnique, et l'illustre géomètre était mort longtemps avant que notre ingénieux compatriote fût en âge d'aborder les savants problèmes sur lesquels il s'est depuis si brillamment exercé ; aucune question de priorité ne pouvait donc, en apparence, être soulevée entre eux, et Bour, qui, dans la phrase citée plus haut, s'exprime avec tant de convenance et de justesse, semble moins heureusement inspiré quand il écrit quelques phrases plus loin : « Jacobi démontre *mon* théorème au début de son Ouvrage. »

L'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre étant, au fond, le sujet traité par Jacobi et approfondi par lui avec une incomparable supériorité, il est juste de rappeler que la première solution satisfaisante du problème général a été

donnée par Cauchy, en 1817, dans le *Bulletin de la Société Philomathique*. C'est là que, pour la première fois, et dans un Mémoire resté ignoré par Jacobi, les complications inutiles introduites dans la méthode de Pfaff ont été habilement écartées, et Jacobi devait, vingt ans plus tard seulement, proposer une méthode équivalente au fond, mais à laquelle les *Vorlesungen* ont donné depuis une perfection qui fait, selon l'expression de Bour, de la solution de ce problème difficile, le chapitre le plus élégant et le plus achevé du Calcul intégral.

A l'occasion de la méthode de Cauchy et du Mémoire publié par Jacobi en 1837, dans le tome 17 du *Journal de Crelle*, on me permettra de revenir sur une objection déjà anciennement produite à la démonstration du résultat final des deux illustres géomètres, et qui, acceptée en principe par les auteurs qui ont traité la question depuis, ne me paraît pas cependant avoir été considérée sous son véritable jour.

Cauchy, pour intégrer une équation du premier ordre, que nous supposerons, pour simplifier, à deux variables indépendantes, introduit une variable auxiliaire dont l'emploi revient à considérer la surface cherchée comme le lieu d'une série de courbes que l'on prend pour inconnues. La surface étant supposée déterminée, je veux dire l'attention étant appelée, en particulier, sur l'une des surfaces qui satisfont au problème, on peut, pour celle-là, considérer la génération par une courbe comme indéterminée et écrire arbitrairement une équation de condition qui, introduite dans le problème, ne diminuera en rien le nombre des solutions. Or il arrive qu'en procédant ainsi le nombre des équations surpasse celui des inconnues, et qu'en en laissant une de côté on peut obtenir une solution qui a précisément le degré de généralité de la solution générale, et qui, devant la comprendre, ne peut manquer de lui être identique. Cauchy a vu cela très-nettement; mais, sans se contenter de cette raison sommaire, qu'il n'a pas même donnée, il a voulu établir directement que cette équation surabondante sera toujours satisfaite d'elle-même; or la démonstration n'a, suivant moi, aucune force. Je n'ai pas dit, comme on l'a cru, qu'elle peut se trouver en défaut et que des exceptions peuvent se produire; on ne dit pas même assez, suivant moi, en faisant remarquer que ces exceptions existent dans le cas général. Je vais plus loin en

firmant que, tant qu'on reste dans la théorie générale, la démonsation ne prouve absolument rien, et ne rend pas même vraisemlable le théorème qu'on veut démontrer.

Je cherche à préciser la question, non à en exagérer l'imporınce, qui est petite. L'assertion de Cauchy est exacte; l'équation ırabondante est, *en général,* satisfaite d'elle-même, et j'en ai dit ı raison : l'exception ne peut se présenter que dans des cas partiuliers; c'est la preuve seulement qui n'est pas acceptable. On se orne, en effet, à faire voir que la fonction, qui doit être nulle, est e produit de deux facteurs dont l'un se réduit à zéro : si donc 'autre n'est pas infini, la démonstration est faite, et il semble que l'on peut considérer le cas où il en est ainsi comme une exception. Mais il n'en est pas ainsi; car, par cela seul que le premier facteur est nul, si le théorème n'était pas exact, ce que l'on doit ignorer pendant qu'on le démontre, la démonstration prouverait que le second est infini. Appliquée mot pour mot avec le correctif qu'on lui a fait subir, la démonstration de Cauchy permettrait d'énoncer la proposition suivante : « Toute fonction qui s'annule pour une » valeur de la variable est identiquement nulle, excepté dans des » cas particuliers. » On a, en effet, identiquement

$$\Phi(x) = \Phi(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} \frac{\Phi'(x)\,dx}{\Phi(x)}},$$

et si $\Phi(x_0)$ est nul, $\Phi(x)$ le sera également, *à moins que* l'autre facteur ne soit infini. Cauchy ne dit pas autre chose sur la fonction qu'il étudie.

Il est bien vrai que, cette fonction étant réellement nulle, le second facteur, dans chaque cas que l'on examinera, ne deviendra pas infini, et qu'il sera facile de s'en assurer, mais c'est par d'autres raisons qu'on est en droit de l'affirmer d'avance; comme je l'ai dit, la preuve proposée par Cauchy ne démontre absolument rien, et l'on présente l'objection sous un très-faux jour en signalant seulement des cas d'exception.

J. Bertrand.

WILLIAMSON (Benj.), A. M., Fellow and Tutor, Trinity College, Dublin. — An Elementary Treatise on the Differential Calculus, containing the Theory of Plane Curves, with numerous Examples. — Second Edition, revised and enlarged. — London, Longmans, Green & Co., 1873. — 1 vol. petit in-8°, 367 p., 48 figures dans le texte. Prix : 10 sh. 6 d.

Nous recommandons ce Volume aux professeurs, qui sauront suppléer aux défauts de l'exposition théorique, et qui y trouveront un Recueil précieux d'applications et d'exemples bien choisis. On remarquera, en particulier, les développements donnés par l'auteur sur la théorie des maxima et des minima, sur la construction des courbes planes, sur les changements de variables, etc.

Quant à la partie théorique du Livre, nous ne pouvons qu'exprimer notre étonnement de voir un auteur, attaché à la célèbre Université des Hamilton, des Boole, des Salmon, des Jellett, traiter les principes du Calcul différentiel à un point de vue aussi arriéré. Il ne suffit pas de citer dans sa Préface une page du Livre de Carnot *Sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal,* pour prouver qu'on s'en est approprié le contenu, et ce n'est pas un demi-siècle après la publication des Ouvrages d'enseignement de Cauchy qu'il devrait être permis d'employer les infiniment petits sans dire ce que c'est, ni de démontrer le théorème de Taylor par la méthode des coefficients indéterminés. C'est pour cela que nous n'indiquons ce Livre aux commençants que comme un bon Recueil d'exercices.

L'auteur annonce la prochaine publication d'un Traité de Calcul intégral (*An Elementary Treatise on the Integral Calculus, containing applications to Curves and Surfaces*). J. H.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MEMOIRS OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON (¹).

T. XXXVII; 1868-1869.

TENNANT. — *Rapport sur l'éclipse de Soleil du* 17-18 *août* 1868.

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 238.

Sont jointes au Mémoire des reproductions de quelques photo-ıphies.

Clarke. — *Sur la détermination de la direction du méridien ec un instrument diagonal russe.*

Pour éviter le déplacement de l'observateur qui, avec les instru-ənts ordinaires de passage, doit changer de position selon la posi-ɔn de l'astre, on reçoit les rayons lumineux, sortis de l'objectif, r un miroir plan incliné à 45 degrés; ce miroir les renvoie dans ıxe de rotation de l'instrument, et c'est à cet axe qu'est adapté oculaire. M. Clarke indique les avantages et les inconvénients e cet instrument, fait connaître les corrections à apporter aux ob-ervations et le moyen de calculer les constantes instrumentales. l donne, en outre, une suite d'observations ayant pour objet la dé-ermination exacte du méridien.

Stone (E.-J.). — *Détermination de la constante de la nutation l'après des observations de la Polaire, de* 51 *Céphée et de* δ *Pe-ite Ourse, faites au moyen du cercle mural de l'Observatoire royal de Greenwich.*

T. XXXVIII; 1869-1870.

Herschel (J.-F.-W.). — *Septième Catalogue d'étoiles doubles observées, de* 1823 *à* 1828 *inclusivement, avec le télescope de* 20 *pieds, et dont vingt-quatre n'ont pas été antérieurement dé-crites.*

Cayley (A.). — *Sur la détermination de l'orbite d'une planète d'après trois observations.*

Trois observations d'une planète font connaître les positions des trois droites qui, aux époques de ces observations, joignent le centre de la Terre à la planète. Menons par le centre du Soleil un plan qui coupe ces trois droites en trois points, et par ces trois points traçons une ellipse ayant pour foyer le centre du Soleil. Cette el-lipse sera l'orbite cherchée, si les intervalles de temps donnés par les lois de Kepler entre les passages de la planète aux positions in-diquées sont conformes aux résultats des observations. M. Cayley se propose de déterminer sur la sphère céleste le pôle de l'orbite, et l'obtient comme l'intersection de deux courbes dont l'une est le lieu des pôles, tels que, dans l'orbite correspondant, l'intervalle de temps écoulé entre la première et la deuxième position soit égal à

igure symétrique dans sa position d'équilibre par rapport
a horizontal. La durée des oscillations a été évaluée par la
de Borda. Ou en a conclu la durée des oscillations infini-
ites et la réduction à la température de 20 degrés par les
connues. La réduction au niveau de la mer a été faite par
le de Poisson; elle était, au reste, peu importante. La
métrique du pendule a permis, suivant les principes de
le rendre à peu près rigoureuse la réduction au vide.
eur de l'aplatissement de l'ellipsoïde terrestre, fournie par
riences, est moindre que celle que l'on a déduite des expé-
aites dans toutes les autres contrées, ce qui est conforme à
at trouvé par Biot : que l'aplatissement déduit d'observa-
es à des latitudes plus grandes que 45 degrés est moindre
i que l'on tire d'observations faites entre le parallèle
t l'équateur. Il résulte aussi des expériences que la direc-
intensité de la pesanteur ne présentent pas d'anomalies
ans les plaines de la Russie occidentale, résultat intéres-
tout si on l'oppose aux variations considérables qui se sont
ées dans le centre de la Russie.

r (A.). — *Sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde.*

ition des lignes géodésiques de l'ellipsoïde, telle que Jacobi
ue en employant les coordonnées elliptiques, dépend des
s abéliennes. Dans le cas où l'on ne considère que les lignes
ues qui passent par un ombilic, les transcendantes qui
lans l'équation se ramènent immédiatement aux fonctions
es. Désignant par a, b, c les carrés des demi-axes princi-
l'ellipsoïde, par h et k les coordonnées elliptiques définies
elations connues, et posant

$$\Pi(h) = \int_{-a}^{h} \frac{-dh}{b+h} \sqrt{\frac{h}{(a+h)(c+h)}},$$

$$\Psi(k) = \int_{k}^{c} \frac{dk}{b+k} \sqrt{\frac{k}{(a+k)(c+k)}},$$

géodésiques passant par un ombilic ont pour équation

$$\Pi(h) - \Psi(k) = \text{const.}$$

M. [illegible] sur la marche de ces courbes [illegible] [illegible] la direction d'une ligne géodésique [illegible] déterminée de l'ellipsoïde. [illegible] géodésique, par [illegible] au moyen, il obtient la relation très-simple

$$[illegible]$$

[illegible]

Dans le cas particulier [illegible] les transcendantes [illegible] se ramènent immédiatement aux transcendantes de Legendre par une transformation fondée sur cette remarque, que l'intégrale

$$[illegible]$$

s'obtient alors sous forme finie.

M. Cayley calcule, dans le cas particulier [illegible], les valeurs de [illegible] pour une série de valeurs de [illegible] et en déduit une Table donnant [illegible] pour arguments. Au moyen de cette Table, il représente graphiquement une suite de lignes géodésiques par leurs projections stéréographiques sur la section principale qui renferme les ombilics.

Enfin M. Cayley exprime toutes les transcendantes employées dans son Mémoire au moyen de celles de Legendre, et retrouve ainsi les diverses formules que nous venons d'indiquer.

Cayley (A.). — *Seconde Partie d'un Mémoire sur le développement de la fonction perturbatrice dans les théories de la Lune et des planètes* [illegible]

La première Partie de ce Mémoire a été publiée, en 1859, dans le XXVIIIe vol. du Recueil des *Mémoires de la Société Royale Astronomique*.

Glaisher (J.-W.-L.). — *Sur la loi de facilité des erreurs des observations, et sur la méthode des moindres carrés*. (49 p.)

'auteur se propose de discuter les principaux Mémoires écrits la méthode des moindres carrés; il signale la découverte de e méthode, en 1808, par un professeur du New-Brunswick, le teur Adrain, qui y était parvenu en faisant cette hypothèse, n éloignée d'ailleurs de la vérité dans la plupart des cas, que erreurs commises sur les mesures de diverses grandeurs sont portionnelles à ces grandeurs. Après avoir critiqué cette hypo-se, M. Glaisher examine les travaux connus; il rappelle que uss parvient à la méthode des moindres carrés en supposant que noyenne arithmétique de plusieurs observations soit la valeur lus probable de la grandeur mesurée; il montre que, dans cette othèse, la probabilité d'une erreur x est $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$. Encke a es-é de démontrer le principe de la moyenne arithmétique; Glaisher montre combien sa démonstration est étrange. Il exa-ie ensuite les travaux de Laplace, et à cette occasion simplifie la thode indiquée par Poisson pour trouver la probabilité que $_1 + \mu_2 \varepsilon_2 + \ldots + \mu_n \varepsilon_n$ soit comprise entre deux limites données, $\varepsilon_2, \ldots$ étant les erreurs des observations, $\mu_1, \mu_2, \ldots$ des facteurs istants. Il insiste sur ce fait, que Laplace n'a jamais prétendu e sa méthode donnât les résultats les plus probables, mais seu-nent les plus probables parmi ceux que l'on peut obtenir par s combinaisons linéaires des équations proposées. Il donne en-ite les expressions trouvées par Laplace et Gauss pour l'erreur oyenne à craindre, et est conduit par leur comparaison à établir ie identité entre deux intégrales multiples de formes très-diffé-ntes. L'auteur examine encore un assez grand nombre de Mé-oires, et parvient à ce résultat que, d'après lui, la loi de facilité une erreur est $e^{-k^2x^2}$, quand cette erreur provient d'un très-grand ombre de causes produisant chacune une erreur très-petite. Enfin examine les résultats les plus probables que l'on aurait, si la loi facilité était $e^{-m\sqrt{x^2}}$. Peut-être nous est-il permis de regretter ie M. Glaisher n'ait pas cru devoir examiner les beaux travaux M. Bienaymé. B. BAILLAUD.

[illegible]

[illegible]

[illegible] — Sur [illegible]

[illegible] — [illegible] différentielles linéaires [illegible]

[illegible] multiplication [illegible] les équations différentielles linéaires à coefficients [illegible] différentielles [illegible] [illegible] l'auteur [illegible] ici quelques [illegible] physiques.

[illegible] — Sur [illegible]

[illegible] — Sur le mouvement des [illegible] libres [illegible]

[illegible] différentielles [illegible] mouvement, [illegible] par l'auteur [illegible]

[illegible] — Sur [illegible] — Sur les spectres [illegible] — Sur [illegible] les [illegible] — Sur [illegible] les miroirs [illegible]

[illegible] — [illegible]

1. Sur une intégrale de [illegible] — L'auteur a été conduit à cette intégrale en traitant le problème de construire une surface réfléchissante [illegible] par un point, partent après la réflexion en divergeant uniformément, mais [illegible]

2. Sur les ovales de Descartes. — L'auteur établit des propriétés élémentaires de ces courbes [illegible] de leur équation

[illegible]

mise sous la forme

[illegible]

[illegible]

propriétés, que l'auteur avait d'abord crues nouvelles, se trou-
t, comme il l'a appris depuis, au moins pour le fond, dans
perçu historique de M. Chasles, Ouvrage dont, à son grand re-
, M. Tait n'a jamais pu même apercevoir un exemplaire.

. Sur une propriété des fonctions linéaires et vecteurs, conju-
es à elles-mêmes.

. Relation entre les ordonnées correspondantes de deux para-
es. — Deux projectiles étant lancés simultanément d'un même
int dans des directions quelconques, quelle est à chaque instant
relation entre leurs hauteurs verticales? Cette question a été sug-
rée à l'auteur par les résultats qu'il a obtenus dans ses expériences
ermo-électriques pour de hautes températures. En appelant x et
les ordonnées des deux paraboles à l'époque t, on trouve pour
tte relation

$$(A'x - Ay)^2 = AA'(B' - B)(ABy - A'B'x),$$

équations des deux paraboles étant

$$x = At(B - t), \quad y = A't(B' - t).$$

5. Sur quelques transformations de quaternions.

SANG (Edw.). — *Sur le calcul des résistances des pièces des
arpentes ouvertes* (of Skeleton or Open Structures).

L'auteur, dans le Mémoire dont il donne ici l'analyse, s'occupe
abord du calcul des résistances des pièces d'une charpente destinée
supporter des efforts donnés, en tenant compte, outre ces efforts,
s poids inconnus des pièces. Les résultats obtenus conduisent à
nner aux résistances la meilleure disposition possible; car, si une
èce était affaiblie, toute la charpente le serait en même temps;
une pièce était trop forte, le surplus de son poids, se trouvant
jeté sur les autres pièces, contribuerait encore à l'affaiblissement
système. L'auteur pense être le premier qui se soit livré à cette
cherche.

La suite du Mémoire traite des charpentes insuffisantes ou flexi-
es, des charpentes surabondantes, et enfin l'auteur y établit ce
éorème nouveau : « Quand une pression est appliquée en un
point d'un système flexible, le système ne cède pas nécessaire-
ment dans la direction même de la pression. Il y a cependant

« [illegible]
« [illegible]
« [illegible]
« [illegible] »

Thomson (Sir William). — Sur le mouvement de tourbillon.

Thomson (Sir William). — Sur les corpuscules ultramondains de Le Sage. ([illegible])

Le Sage [illegible] les dernières années de sa vie à la recherche d'une théorie mécanique de la gravitation. Newton avait peine à concevoir que la matière inanimée pût agir à distance, et que la gravitation fût une propriété essentielle et inhérente à la matière. De là il résultait que ce phénomène devait être produit par un mécanisme, à la recherche duquel Le Sage a employé tous ses efforts. Il se propose d'abord d'établir que « si les premiers Épicuriens avaient eu sur la Cosmographie des « idées aussi saines seulement que plusieurs de leurs contemporains, qu'ils négligeaient d'écouter, et sur la Géométrie une partie « des connaissances qui étaient déjà communes alors, ils auraient « probablement trouvé sans effort les lois de la gravité universelle et sa cause mécanique ». En reprenant l'idée des atomes d'Épicure, Le Sage construit une ingénieuse théorie du mécanisme de la gravité, dont Sir William Thomson donne l'analyse, et qui n'est pas sans quelque analogie avec la théorie cinétique des gaz actuellement admise.

Tait. — *Notes sur les harmoniques sphériques.* (7 p.)

Étude des coefficients Q *du développement de l'expression*

$$\frac{1}{(1-2\mu h+h^2)^{\frac{1}{2}}}=\sum_0^\infty h^i Q_i, \quad (h<1, \quad -1\leqq\mu\leqq+1),$$

ces coefficients étant considérés comme fonctions de μ.

Tait. — *Sur la thermo-électricité.* (6 p.)

Marshall (D.-H.). — *Sur la relation du magnétisme avec la température.* (2 p., 1 pl.)

Tait. — *Sur une singulière propriété de la rétine.*

Tait. — *Sur l'opérateur* $\varphi(\nabla)$.

TAIT. — *Note sur le mouvement du pendule.* (3 p.)

SANG (Edw.). — *Sur un cas singulier de rectification des lignes du quatrième ordre.* (2 p.)

Les courbes données par les formules

$$x = a \sin\theta,\quad y = b \sin 2\theta$$

jouissent de propriétés mécaniques très-intéressantes. Si l'on développe en série l'expression de l'élément d'arc, le résultat obtenu par l'intégration de chaque terme est en général trop compliqué pour que l'on puisse s'en servir. Il y a cependant un cas où l'intégration peut s'effectuer aisément : c'est celui où $a^2 = 32 b^2$, ce qui donne pour l'élément d'arc

$$dl = 2b(\cos 2\theta + 2)\,d\theta.$$

JENKIN (Fleming). — *Sur les principes qui règlent l'incidence des taxes.* (14 p.)

On sait que les taxes imposées sur les marchandises sont avancées par le marchand, qui les fait ensuite retomber sur le consommateur. M. Jenkin se propose d'étudier cet important problème d'Arithmétique politique, de déterminer sur qui retombe en dernier lieu et réellement une taxe.

DEWAR (J.). — *Sur une méthode pour déterminer le pouvoir explosif des combinaisons gazeuses.*

TAIT. — *Sur la fonction de l'effort* (Strain-Function). (2 p.)

Voir *Bulletin,* t. II, p. 201. Application de la théorie des quaternions à l'expression de cette fonction.

THOMSON (Sir William). — *Sur le mouvement des solides rigides dans un liquide circulant sans rotation* (irrotationally) *à travers des trous, percés dans ces corps ou dans un solide fixe.* (14 p.)

CAYLEY (A.). — *Sur l'extraction de la racine carrée d'une matrice du troisième ordre.* (8 p.)

TAIT. — *Sur la thermo-électricité. Circuits présentant plus un point neutre.* (6 p., 1 pl.)

Tait. — *Sur une méthode pour mettre en évidence la sympathie des pendules.* (5 p.)

Expériences sur la transmission réciproque du mouvement de deux barreaux magnétiques oscillant dans le voisinage l'un de l'autre. Calculs relatifs à ces expériences.

Tait. — *Sur quelques intégrales de quaternions.* (4 p.)

NOVA ACTA regiæ Societatis Upsaliensis (¹).

3ᵉ Série, t. VII; 1870.

Theorell (A.-G.). — *Description d'un météorographe enregistreur, construit pour l'Observatoire d'Upsal.* (18 p., 2 pl.; fr.)

Lundström (C.-E.). — *Distinction des maxima et des minima dans un problème isopérimétrique.* (39 p.; fr.)

Ce remarquable Mémoire est la dernière production d'un jeune mathématicien, enlevé à la Science, le 9 août 1869, à l'âge de vingt-neuf ans. Lundström avait déjà présenté, en 1866, comme thèse doctorale, un travail sur le Calcul des variations (²), dans lequel il traite complétement les principaux problèmes relatifs aux intégrales simples, en déterminant pour chacun le caractère distinctif du maximum et du minimum. Dans le Mémoire actuel, il reprend, avec une notation plus claire et plus expressive, le problème si compliqué de la détermination du caractère de permanence du signe de la variation du second ordre, en limitant ses recherches au cas des intégrales simples. Il se proposait d'appliquer plus tard sa méthode au cas des intégrales doubles, quand la mort est venue le surprendre.

Björling (C.-F.-E.). — *Sur la séparation des racines d'équations algébriques.* (35 p., 1 pl.; fr.)

L'auteur a publié, dans le tome XLVIII des *Archives de Grunert*, quelques théorèmes sur la réalité des racines des équations algébriques, à l'aide desquels on peut toujours trouver le nombre

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 247.
(²) *Utkast till isoperimetriska problemers fullständiga solution.* In-8°, 108 p., 1 pl.

places des racines réelles d'une équation donnée, dès que l'on ıît les valeurs des racines réelles de la dérivée. Si l'on consile premier membre de l'équation $f(x) = 0$ comme provenant ntégration de la dérivée $f'(x)$, le terme tout connu de $f(x)$ ıne valeur particulière de la constante d'intégration. Il rédes théorèmes en question que les racines complexes de l'éon sont de deux sortes : les unes dépendant uniquement de la ͻ de la dérivée $f'(x)$, les autres dont le nombre varie avec la ante arbitraire. Ces théorèmes sont des cas particuliers de èmes plus généraux, à l'aide desquels on peut trouver les s de toutes les racines, tant complexes que réelles, d'une équaalgébrique de degré n, en connaissant seulement les valeurs ·acines réelles de la dérivée, et peut-être celles de quelques ·s équations, dont le degré ne surpasse pas $n-3$.

CHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERIT.

ınnée; 1872 (fin) (¹).

N DER HEYDEN. — *La règle à calcul, et son introduction dans oles supérieures.* (11 p., 1 pl.)

: instrument, dont les ingénieurs français font depuis long-; un si fréquent usage, semble être encore à peu près inconnu lemagne. L'auteur de cet article fait ressortir l'utilité de cet ieux appareil, pour économiser le temps et les efforts du cal-:ur; il en donne la description et en indique les divers em-

BER, HOFFMANN, REIDT et BECKER. — *Sur les* « DIVISIONS » *en ıétrie, question de principes.* (19 p.)

ıt-on dire que les quadrilatères, dont les côtés sont parallèles à deux, se *divisent* en *parallélogrammes* et en *rectangles?* ression nous semble aussi mauvaise que si l'on *divisait* les has de la France en Français et en Parisiens. Un cas particuıns une série d'objets ne constitue pas la base d'une division

---

(¹) oir *Bulletin*, t. IV, p. 205.

ou d'une classification régulière. Les propriétés générales des objets de la série s'appliquent au cas particulier. Aux propriétés positives propres au cas particulier correspondent des propriétés négatives des objets non compris dans ce cas. La longue discussion à laquelle donne lieu, dans cet article, la nomenclature des diverses espèces de quadrilatères ne nous paraît pas mériter tout l'espace qui lui est consacré; nous ne nous sommes jamais aperçu que cette nomenclature, telle qu'on la trouve dans la plupart des auteurs, ait été pour les élèves la cause du moindre embarras.

Hoffmann (J.-C.-V.). — *Du général au particulier, ou du particulier au général?*

L'auteur se prononce avec grande raison pour l'emploi, dans l'enseignement, de la méthode qui procède du particulier au général.

Müller (Ed.). — *Lettre au Rédacteur.* (6 p.)

Énumération de tous les *postulata* et de tous les axiomes (ou hypothèses) que l'on admet, au moins tacitement, dans la Géométrie élémentaire.

Hoüel (J.). — *Sur une formule de Trigonométrie plane et sur l'emploi des angles auxiliaires.*

Reidt. — *Sur la méthode d'enseignement en Algèbre.* (12 p.)

Hoffmann (J.-C.-V.). — *Études sur les conceptions fondamentales de la Géométrie.* — I. L'idée de direction et ce qui s'y rattache. (2 art., 10-12 p.)

L'idée générale de direction est familière à tout le monde; mais, pour lui donner la précision mathématique, il est indispensable de s'appuyer sur la notion de la ligne droite.

— Parmi les Ouvrages qui ont été l'objet d'une Notice bibliographique dans ce volume, nous citerons les suivants :

Bardey (D[r] E.). — *Methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 7000 Aufgaben enthaltend über alle Theile der Elementar-Arithmetik, für Gymnasien, Realschulen und polytechnische Schulen.* Leipzig, Teubner. Pr.: 27 Ngr. (Compte rendu par Clebsch). — Les solutions se vendent séparément, aux seuls professeurs.

GANDTNER (Dr J.-O.) und JUNGHANS (Dr K.-F.). — *Sammlung von Aufgaben aus der Planimetrie. Für den Schulgebrauch achlich und methodisch geordnet und mit Hilfsmitteln zur Bearbeitung versehen.*

REIDT (Dr F.). — *Sammlung von Aufgaben aus der Trigonometrie und Stereometrie.* Leipzig, Teubner, 1872.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN (1).

T. LXXVIII, nos 1849-1872; 1871.

ZÖLLNER (F.).— *Sur la loi de rotation du Soleil et des grosses planètes.* (56 col.).

(Tiré, sur la demande de la Rédaction, des *Comptes rendus de la Société Royale des Sciences de Saxe*).

Tandis que MM. Faye et Secchi cherchent à établir la nature gazeuse de la masse entière du Soleil, M. Zöllner regarde ce corps comme un globe dont la surface, formée d'un liquide incandescent, nous envoie la chaleur et la lumière à travers une atmosphère transparente. La température de cette surface n'est pour lui que de 28000 degrés environ, au lieu de dix millions que lui attribue le P. Secchi. Les taches proviennent de scories solides qui se forment et se déforment sans cesse dans cet océan de feu, sous l'influence des courants atmosphériques. Les mouvements complexes de ces taches, les particularités de leur nature, la formation des facules et des protubérances sont présentés comme des résultats simples et naturels de cette même influence.

Dans un précédent Mémoire (2), M. Zöllner a montré que, dans l'atmosphère d'un globe incandescent en rotation, des courants doivent se développer, et que, près de la surface, ils se dirigent du pôle à l'équateur. Il a établi que la distribution des températures solaires, observée par le P. Secchi, est le résultat d'une réaction

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 87.

(2) *Sur la périodicité et la propagation héliographique des taches du Soleil* (*Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, 12 déc. 1870, p. 348).

[illegible] de ce courant. Aujourd'hui il essaye de faire voir que [illegible] du Soleil sont une conséquence nécessaire [illegible].

Pour y arriver, il [illegible] nécessairement la solution de quelques problèmes, dont le [illegible] est le suivant :

[illegible] autour de son axe, est recouvert d'une [illegible]. Au-dessus de cette couche, un courant [illegible] avec une vitesse constante, du pôle à l'équateur [illegible] angulaire du liquide, en [illegible].

En [illegible], en regardant, en outre, comme [illegible] des liquides et des gaz [illegible] est très-élevée, est conforme aux résultats [illegible] par MM. [illegible], Lampe et Maxwell, M. Zöllner arrive à la formule suivante

$$\xi = \frac{A - B \sin^2 \lambda}{\cos \lambda},$$

dans laquelle λ désigne la latitude, ξ la vitesse angulaire correspondante, A et B des constantes à déterminer par l'observation.

Les documents dont M. Zöllner a fait usage pour vérifier sa théorie sont surtout les observations des taches du Soleil faites jour par jour par M. Carrington et par M. Spörer. Les tableaux dressés par ces astronomes montrent, on le sait, que le mouvement héliocentrique des taches est d'autant plus rapide qu'elles sont plus voisines de l'équateur. La méthode des moindres carrés, appliquée à l'ensemble des observations de M. Carrington, donne, pour valeur des constantes A et B,

$$A = 863'.4, \quad B = 619'.5.$$

Avec ces valeurs, la formule *théorique* de M. Zöllner représente plus fidèlement les observations que la formule ***purement empirique*** proposée par M. Faye,

$$\xi = 862' - 186' \sin^2 \lambda,$$

bien que, dans cette dernière, l'exposant de sin λ puisse être regardé comme une troisième constante empirique. En outre, l'auteur

fait observer que les deux hémisphères du Soleil présentant, sans doute, quelque différence dans leur constitution, il est nécessaire de déterminer séparément A et B pour chacun d'eux. On arrive ainsi à une représentation très-approchée.

Revenant ensuite à sa théorie, M. Zöllner cherche les rapports qui doivent exister entre les vitesses des diverses couches fluides à diverses profondeurs, sous la même latitude, et il arrive à cette conclusion, que ces vitesses sont d'autant plus grandes que les couches sont plus profondes; la différence est maximum à l'équateur. Cette loi s'étendant à l'atmosphère, il doit en résulter, sur toute la surface du Soleil, des vents dirigés en sens contraire du mouvement de rotation, et d'autant plus violents qu'on se rapproche davantage de l'équateur.

En outre, l'action de ces vents doit être plus marquée sur les scories solides qui forment les taches que sur l'océan de feu qui les entoure. Si les retards qui en résultent pour ces scories étaient proportionnels à ceux qui proviennent des différences de vitesse sous les diverses latitudes, la loi générale de rotation ne serait évidemment pas changée; mais il en est autrement, parce que l'action du vent lui-même sur le courant doit être d'autant plus efficace, que les scories sont plus nombreuses et plus resserrées, c'est-à-dire que le retard doit se prononcer surtout entre le 5ᵉ et le 30ᵉ degré de latitude, et atteindre son maximum à 17°,5. C'est, en effet, ce que confirme l'observation. Par la même raison, les vents, ralentis dans les zones moyennes par le grand nombre de scories aux époques de maximum, arrivent à l'équateur avec moins de vitesse, y occasionnent moins de retard, et c'est ainsi que les observations de M. Spörer, faites aux environs d'une de ces époques, donnent, pour la vitesse angulaire diurne de l'équateur, 14',4 de plus que celles de M. Carrington.

M. Zöllner ne se borne pas à ces vérifications générales. Il cherche à expliquer, par sa théorie, toutes les particularités que l'on a constatées, dans ces dernières années, sur les taches, les facules, les protubérances, etc.

Les taches, suivant lui, ne peuvent être formées d'une matière fluide. Il résulte, en effet, des observations de M. Carrington, que les différences en vitesse, sous les divers parallèles, s'élèvent, en moyenne, à 1°6' pour un degré de différence de latitude; par suite,

si les taches n'étaient pas solides, elles s'allongeraient en bandes parallèles à l'équateur, comme cela a lieu, en effet, sur Jupiter et sur Saturne, auxquels la théorie actuelle peut s'appliquer en partie.

Comment ces scories solides se forment-elles ? Par suite de la rotation du Soleil, il naît, dans l'atmosphère qui environne sa surface en fusion, des courants supérieurs de l'équateur aux pôles ; ces courants, revenant inférieurement, après s'être refroidis par le rayonnement, solidifient çà et là des portions de liquide ; les scories ainsi formées, plongeant en partie dans un milieu dont les couches ont des vitesses différentes suivant leur profondeur, prennent, autour de divers axes, des mouvements qui expliquent la rotation et la libration des taches. C'est surtout dans les zones moyennes que ces formations ont lieu, parce que le rayonnement du liquide est moindre dans les régions équatoriales et dans les régions polaires, où l'air est incessamment troublé par des courants ascendants et descendants.

Les variations brusques de température qui existent entre chaque tache et le milieu environnant occasionnent, dans l'atmosphère ambiante, des perturbations d'équilibre. De là des courants ascendants qui produisent les facules, tandis que les vapeurs condensées autour de la scorie sont l'origine des pénombres et peuvent expliquer leur structure rayonnée, les apparences qu'elles prennent au bord du Soleil, etc., etc. En même temps, ces vapeurs servent d'écran ; elles interceptent le rayonnement, la chaleur s'accroît, la scorie entre en fusion et la tache disparaît. L'atmosphère solaire peut donc être considérée comme un *régulateur*. Par suite, les phénomènes prennent nécessairement un caractère de périodicité.

Enfin l'ascension de l'air sur les bords des scories diminue la pression atmosphérique et permet au gaz dissous dans le liquide de se dégager. De là ces éruptions de protubérances qui, d'après les observations de M. Respighi, se montrent surtout sur les bords des taches et près des facules.

Comme on le voit, cette théorie, bien que contraire aux idées le plus généralement admises par les astronomes, serre de très-près tous les faits connus. Elle a, en outre, l'avantage de conduire à une formule qui représente les phénomènes plus fidèlement que les formules *empiriques* adoptées par MM. Spörer, Faye ou Carrington.

:HMIDT (J.) (Athènes), et SCHÖNFELD (Mannheim). — *Obser- :ons de la comète I,* 1871.

IONATI. — *Observations de la comète II,* 1871 (Florence).

KCHULHOF (L.). — *Éléments et éphémérides de la comète II,* 'I (Vienne).

BOGUSLAWSKI (VON). — *Sur le météore du 27 septembre* 1870.

Nouvelle observation qui s'ajoute à celles qui ont été discutées M. Matthiessen ([1]).

IANDBERG (A.-J.). — *Correction des éphémérides pour l'opposi- ı d'Ondine* (92) *en* 1871.

CHUBERT (E.). — *Éléments de Leucothée, leurs variations pro- ant de l'action de Jupiter, et Table pour la solution du pro- ne de Kepler.* (12 col.)

TONE (O.). — *Sur l'emploi des instruments zénithaux, lors prochain passage de Vénus* (Washington).

es méthodes le plus généralement adoptées seront : 1° les me- es héliométriques ; 2° la photographie ; 3° l'observation des tacts. M. Stone propose d'y joindre l'emploi d'une lunette azi- tale. On fixera l'instrument d'abord en azimut, ensuite en iteur ; on observera les passages des bords du Soleil et de la pla- e à trois séries de fils, les uns verticaux, les autres parallèles ι tangentes d'entrée et de sortie ; il ne restera ainsi sur la dis- ιce des centres que des erreurs accidentelles ; celles-ci pourront illeurs s'éliminer, car on aura le temps de faire cinquante séries ιbservations. M. Stone recommande, en outre, de faire usage de ιtes les méthodes à *toutes* les stations.

PECHÜLE (C.-F.). — *Éléments et éphémérides de la comète II,* 71 (Hambourg).

SPÖRER. — *Sur la comparaison des taches et des protubérances laires.* (6 col.)

L'observation d'une tache donne sa distance au limbe et son angle position. On en déduit par des procédés connus ses coordon- ιs héliocentriques. Pour les protubérances, la distance au limbe

---

([1]) Voir *Bulletin*, t. II, p. 234.

RER. — *Observations des taches du Soleil* (Anclam). (10 p.)

NYME. — *Sur la résolution, par tâtonnements, de l'équa-'e Lambert, dans la méthode d'Olbers, pour le calcul des s paraboliques*. (4 col.; angl.)

sait que la méthode d'Olbers, pour le calcul des orbites para-ıes, ainsi que les modifications proposées par Gauss, s'ap-sur le théorème de Lambert. Ce théorème fournit une ion qui conduit aux valeurs des inconnues par des approxima-successives. L'auteur de la Note que nous analysons donne, la direction de ces calculs, une méthode plus rapide celle dont on se sert généralement dans les observatoires. Il re, sur un exemple, qu'il suffit souvent d'une seule approxi-on.

HÖNFELD (E.). — *Éphémérides d'étoiles variables.*

ETERS (C.-H.-F.). — *Découverte d'une nouvelle planète* (114) nton).

CHÖNFELD (E.). — *Sur les changements d'éclat des étoiles va-bles.* (24 col.)

TEMPEL (W.). — *Observations d'Amalthée* (113) *et des comètes I II*, 1871.

SCHULHOF (L.). — *Éléments et éphémérides hypothétiques pour pposition de* (108) *Hécube en* 1871.

WATSON (J.-C.). — *Découverte d'une nouvelle planète.*

OPPOLZER. — *La planète Érato retrouvée.*

Voir plus haut.

Observations méridiennes de l'Observatoire de Kremsmünster.

Observations de la comète II (Coggia), en 1870.

HALL. — *Lettre au Rédacteur.* (angl.)

Éphémérides de Terpsichore, 1869. — *Observation d'Égé-* 1864. — *Emploi de la photographie pour le prochain pas-ge de Vénus.*

A propos du Mémoire de M. Paschen, inséré au n° 1796 du Jour-l, M. Hall fait observer que la méthode photographique pour

[illegible]

[illegible] — [illegible]

[illegible]

[illegible] — [illegible]

[illegible] — [illegible]

[illegible] — [illegible]

[illegible] — [illegible]

[illegible]

[illegible] la distance [illegible] d'après trois observations complètes [illegible] par l'intersection d'une droite et d'une [illegible] degré. La Table dressée par M. de Gasparis donne [illegible] et à [illegible] degré près, les valeurs de [illegible] dans les [illegible] réelles ; une correction facile donne la second[e] [illegible] troisième approximation.

[illegible] (J.-F.-J.). — *Observations sur les étoiles variable[s]* [illegible]

[illegible] (J.-C.). — *Éléments de* [illegible] *Clymène, et observatio[n]* [illegible] *Artémis. Étoile de comparaison observée au nouve[au]* [illegible] *méridien de l'Observatoire de Harvard College.*

:RS (C.-H.-F.). — *Observations d'Amalthée* (113). — *Élé-*
et éphéméride de Cassandre (114).

:TI (A.). — *Observations de planètes.* (Padoue.)

:RS (C.-H.-F.). — *Découverte d'une nouvelle planète* (117).

IER (R.), BÖRGEN (C.), VALENTINER (W.). — *Observations*

INS (C.). — *Observations de planètes et de comètes*
g).

:RS (W.-A.). — *Éléments de Felicitas d'après les deux*
res oppositions.

TT (G.) (Observatoire de Woodcroft, Sussex). — *Sur une*
le étoile variable, U *du Cygne.* (Angl.)

:nott confirme la variabilité de l'étoile U du Cygne, et il si-
en outre, une étoile télescopique exceptionnellement rouge,
voisinage de 12 de l'Aigle.

.F (R.). — *Lettre au Rédacteur* (Zurich).

naximum des taches solaires paraît avoir été atteint en
370. M. Wolf constate de nouveau la coïncidence exacte
a variation du nombre des taches solaires et celles de la dé-
on magnétique.

). — *Lettre au Rédacteur.*

ouve la comète d'Encke, à l'aide de l'éphéméride de M. de
app (*voir* plus haut). — Écart assez marqué.

IER (R.), RÜMKER (G.). — *Observations de la planète* (117).

CKE (H.). — *Observations au micromètre circulaire*
g).

.ER (Axel). — *Observations de planètes et de comètes*
. (2 articles.)

NECKE. — *Lettre au Rédacteur* (Carlsruhe).

etour de la comète d'Encke. — 2° Curieuse observation de
le 25 septembre 1871, vers midi, près de sa conjonction in-
:. — Le croissant mesurait *certainement* plus de 180 degrés.

[illegible] la lumière cendrée [illegible] les annales de l'Astronomie [illegible], en plein jour. [illegible] le 20 octobre 1759.

[illegible] — [illegible] des étoiles.

[illegible] Tübingue, se propose de [illegible] de chaque région [illegible]. Pour cela, il fait tomber de [illegible] de l'image; il affaiblit [illegible] verres neutres, jusqu'à [illegible] aux couleurs spec[illegible] une mesure de l'inten[illegible]. Pour les étoiles de première grandeur [illegible] sont au moins trois mille fois plus [illegible]. L'auteur donne [illegible] qu'il a apportées au [illegible].

[illegible] — *[illegible] spectrales* (Bothkamp).

1° *Planètes.*

Mercure. — La partie la plus réfrangible du spectre est seule brillante.

Vénus. — En comparant le spectre de cette planète au spectre atmosphérique, on trouve un léger écart entre les lignes correspondantes. Cet écart provient évidemment du mouvement relatif des deux corps. Comparé au spectre solaire, celui de Vénus montre quelques raies plus brillantes : les lignes du sodium sont élargies et comme noyées; l'auteur attribue ces différences à l'atmosphère de la planète.

Mars. — Quelques bandes obscures, particulièrement dans le rouge.

Jupiter. — Spectre presque identique à celui du Soleil.

Uranus. — Le spectre de cette planète se distingue de tous les autres par des raies propres d'absorption. Son intensité est très-faible. — L'auteur ajoute que ses observations diffèrent presque en tout de celles du P. Secchi.

!. *Spectr·s de quelques nébuleuses et amas d'étoiles, et de la nète I, 1871.*

On sait que les nébuleuses proprement dites présentent trois es brillantes, auxquelles vient s'ajouter un faible spectre continu ur les nébuleuses planétaires. M. Vogel ne trouve pas toujours ı mêmes intensités relatives des raies que M. Huggins. Doit-on .conclure un changement réel dans la constitution de l'astre?

3. *Spectre de l'aurore boréale.*

Si l'aurore est faible, une seule ligne brillante. Le nombre des ;nes augmente considérablement lorsque l'aurore est très-intense. ı comparaison avec les spectres des gaz qui entrent dans la com-sition de l'air porte à penser que le spectre de l'aurore boréale sulte de modifications produites, par les changements de pression ; de température, dans les raies telluriques.

4. *Recherches d'analyse spectrale sur le Soleil.*

L'auteur signale particulièrement un mouvement rapide de ro-tion dans un nuage détaché d'une protubérance, et un déplace-ent de 4 à 5 milles par seconde dans deux ponts de lumière éten-us sur une grande tache solaire.

5. *Essai de détermination du mouvement des étoiles dans 'espace.*

On sait que ce mouvement se détermine par l'écart qui existe ntre les raies du spectre stellaire et les raies brillantes que donne, ar exemple, un tube de Geissler rempli d'hydrogène. M. Vogel value à 10 milles par seconde pour Sirius, et à 13,8 milles pour rocyon, la vitesse relative avec laquelle ces étoiles s'éloignent de a Terre.

Dunér (N.). — *Observation d'une nouvelle nébuleuse* (Lund).

Peters (C.-H.-F.). — *Éléments et éphémérides de la pla-ète* (116).

Hind (J.-R.), Möller (A.), Stephan (E.). — *Observations de comète d'Encke.*

Stephan (E.), Winnecke (A.). — *Observations de la comète de uttle.*

Weiss (E.). — *Discussion des observations faites pendant*

l'éclipse du 18 *août* 1868, *et comparaison des résultats avec ceux des précédentes éclipses.* (22 col.)

Indépendamment de la belle découverte de M. Janssen, dont elle a été l'occasion, l'éclipse totale de 1868 a servi à préciser nos connaissances sur la plupart des curieux phénomènes qui suivent la disparition du disque solaire. Les mesures prises en différents lieux, sur les trois grandes protubérances, ont montré qu'elles variaient avec une prodigieuse rapidité. Les raies brillantes qu'elles ont données au spectroscope ont fait connaître la nature des gaz qui les constituent. Les différences qui ont été constatées dans le nombre et dans les longueurs de ces raies ont montré que toutes les protubérances n'ont pas une composition identique, et que chacune d'elles est formée d'un mélange de gaz occupant souvent des étendues très-différentes.

On a définitivement établi la réalité de la couronne. Il a semblé que les faisceaux les plus étendus avaient pour bases les grandes protubérances. Les observations de M. Prazmowski sur la polarisation de cette couronne ont été confirmées. Enfin M. Řiha a constaté qu'elle donnait un spectre continu. Ajoutons que les éclipses ultérieures ont montré dans ce même spectre une ou deux raies brillantes.

Schmidt (J.-F.-J.). — *Observations* (Athènes).

Möller (A.). — *Sémélé retrouvée* (Lund).

Rümker (G.), Stephan (E.), Glasenapp (S. v.), Hind (J.-R.). — *Observations des comètes d'Encke et de Tuttle.*

Bruhns (C.), Winnecke (A.), Littrow (C. v.), Rümker (G.). — *Observations de la comète de Tempel.*

Lorenzoni (G.). — *Aberration de réfrangibilité dans les objectifs composés de deux lentilles, et conséquences de cette aberration spécialement dans les observations spectroscopiques* (Padoue). (4 col.; ital.)

Les formules et l'expérience sont d'accord pour montrer que les rayons rouges, orangés, jaunes et verts ont des foyers très-voisins, tandis que les foyers des autres rayons sont assez écartés des premiers. Par suite, pour voir nettement *toutes* les raies des protubé-

nces, il faut disposer le spectroscope de façon à pouvoir donner ıccessivement à la fente différentes positions. M. Lorenzoni arrive nsi à voir facilement six raies, et il a, en outre, aperçu souvent le nversement des raies du sodium et du magnésium. Il regarde ımme nouvelle l'une de ces six raies qu'il désigne par *f*, et dont longueur d'onde est environ 448,4.

D'ARREST. — *Note sur la Communication précédente.*

La raie *f* de M. Lorenzoni n'est pas nouvelle. Elle a été aperçue ar J. Herschel, à Bangalore, en mai 1869, et par Young pendant éclipse du 7 août 1869.

SCHMIDT (J.-F.-J.). — *Observations sur les étoiles variables.*

STEPHAN (E.). — *Nébuleuses nouvelles* (Marseille).

TEBBUTT (J.). — *Lettre au Rédacteur.* (Angl.)

M. Tebbutt a observé les variations de η d'Argo, de 1854 à 1870. En juillet 1854, cette étoile était très-peu au-dessous de la 1re grandeur. En 1860, sa grandeur était 3,41 ; elle a continué à diminuer d'éclat; depuis 1867, elle est devenue télescopique et s'est maintenue un peu au-dessous de la 6e grandeur, avec des variations presque insensibles.

BRUHNS (C.). — *Éphéméride de la comète de Tuttle.*

ARGELANDER (Fr.), RÜMKER (G.), OPPOLZER (Th. v.), SCHULHOF (L.), TEMPEL (W.), PETERS (C.-F.-W.). — *Observations, éléments et éphémérides de la comète V, 1871 (Tempel).*

SCHUBERT (E.). — *Éléments d'Atalante, leurs perturbations par Jupiter, et Table pour la solution du problème de Kepler.* (11 col.)

DUNÉR (N.-C.). — *Éléments des étoiles doubles ζ d'Hercule et η de la Couronne* (Lund).

Chacune de ces étoiles ayant déjà accompli une révolution complète depuis les observations de W. Struve, on peut calculer leurs éléments définitifs. Les périodes trouvées sont

$34^{\text{ans}},221$ pour ζ d'Hercule,

$41^{\text{ans}},576$ pour η de la Couronne.

DUNÉR (N.-C.). — *Observations d'étoiles variables.*

nouvelles co-

chaque année passage au périhélie. Il y

l'ordre pourrait

comment désigner

déterminés? Ainsi

nouvelles d'après

mode d'indi-

des Catalo-

l'ordre ne peut

passage au périhélie.

l'indication à

L'ordre des décou-

Il est en outre

les observations

des éléments. Au reste,

remplacés

I, II et I.

M. de Gaspari

es formules qui permettent de trouver immédiatement les des rayons vecteurs r_2, r_3, r_4. Ces rapports étant connus, de l'orbite s'accomplit, comme on sait, très-promptement.

HOF (L.). — *Éléments et éphémérides de la comète V,*

R. — *Observations de taches et de protubérances* (12 col.). *tribution héliographique des taches dans les périodes II, V,* 1871.

servations spectrales. — Ces observations, faites du 21 mai bre, conduisent M. Spörer à des conclusions importantes. essins de vingt-cinq protubérances confirment l'existence de supérieurs dirigés, dans les deux hémisphères, de l'équa-pôles. 2° Quelques protubérances ont persisté pendant plus mi-rotation. 3° Les jets d'éruption laissent dans la pho-des cavités profondes, qui se remplissent ensuite, soit par on des masses inférieures, soit par les côtés. Dans le pre-, les différences dans les vitesses de rotation portent les scendantes vers l'est; et il se forme une série de volcans même parallèle. Dans le second cas, par suite des courants s, il se forme une série de brèches sur le bord du Soleil. deux sortes de protubérances : (A) *les protubérances or-*; elles ont peu d'éclat, elles sont durables, elles ne sont que d'hydrogène; (B) *les protubérances flamboyantes;* t très-brillantes, très-instables, et elles renferment des va-iverses; elles sont probablement dues à des phénomènes ies. 5° Les protubérances manquent, sur les deux hémi-entre le 50e et le 70e degré.

IDT (J.-F.-J.). — *Observations de la changeante nx de la ne australe.*

INS (W.). — *Sur le spectre de la comète d'Encke.* (Angl.) ectre se réduit à une bande brillante qui correspond à la illante de celles du carbone. On peut soupçonner deux andes. Ce spectre est donc identique à celui de la comète II,

IDT (J.-F.-J.). — *Sur la période de z de la Couronne* ?.

[illegible] — *[illegible] d'un chronographe imprimant* [illegible].

L'appareil se compose [illegible] de trois roues imprimantes, qui indiquent respectivement les minutes, les secondes et les centièmes de seconde. Le mouvement des roues est régularisé par un [illegible] et [illegible] par une horloge sidérale. On a trouvé pour l'erreur moyenne de chaque impression [illegible],013, et pour l'erreur maximum [illegible]. On a fait plus de [illegible] mille observations à l'aide de cet appareil, qui [illegible] le travail des [illegible] dans la proportion des [illegible].

[illegible] — *Observations d'occultations d'étoiles. — Éclipses des satellites de Jupiter* 1868-1870.

[illegible] — *Observations faites à l'Observatoire de* [illegible].

[illegible] — *Éléments et éphéméride de la comète e*, 1871.

G. L.

MÉLANGES.

NOTE SUR LE PRINCIPE DE CORRESPONDANCE (¹);

PAR M. H.-G. ZEUTHEN.

1. Le principe de correspondance s'énonce de la manière suivante, bien connue (²) :

« Lorsqu'on a sur une droite (L) deux séries de points X et Y telles, qu'à un point X correspondent η points Y, et à un point Y ξ points X, et que cette correspondance peut s'exprimer par une

(¹) Les trois premiers numéros de cette Note sont extraits des nᵒˢ 25 et 26 d'un Mémoire, *Sur les propriétés générales de systèmes de courbes*, qui vient d'être inséré dans les *Mémoires de l'Académie danoise*. Seulement je profite, dans la Note actuelle, de l'énoncé du théorème I d'un beau Mémoire de M. Halphen, qui vient aussi de paraître (*Bulletin de la Société Math.*, t. I, p. 132), pour donner, soit à l'énoncé, soit à la démonstration de la règle dans le nº 2, une meilleure rédaction, sans en altérer la réalité.

(²) *Voir* le Mémoire de M. *Chasles* dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 27 juin 1864.

nation algébrique, le nombre des points X qui coïncident avec s points correspondants Y est $\xi + \eta$. »

Nous en donnerons ici une démonstration différente de celle 'on emploie ordinairement.

Soient A et B deux points fixes placés dans un même plan que), mais au dehors de (L), et de telle manière que le point C, où droite AB rencontre (L), ne soit pas un des points cherchés où ı point X coïncide avec un point correspondant Y. Le lieu des ints d'intersection Z des droites AX et BY, joignant des points rrespondants X et Y aux points fixes A et B, sera une courbe algérique. Elle passera ξ fois par A, qui est le point d'intersection de C avec les droites qui joignent A aux ξ points X qui correspondent C, regardé comme un point Y. Une droite AX passant par A aura ı côté des ξ points confondus en A, pour points d'intersection avec e lieu (Z), les η points où elle rencontre les droites corresponlantes BY. Le lieu est donc de l'ordre $\xi + \eta$; ses $\xi + \eta$ points d'inersection avec la droite (L) sont les points cherchés.

2. Ayant réduit la détermination des points où X coïncide avec Y à celle des points d'intersection de (L) avec la courbe (Z), nous ivons aussi substitué à la question de la multiplicité des solutions ndiquées par le principe de correspondance celle du nombre des points d'intersection de (L) et (Z) qui se confondent en un même point D. Or ce nombre est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits XZ, interceptés par la droite (L) et la courbe (Z) sur une sécante AX, dont la distance au point D est infiniment petite du premier ordre. Les angles des triangles XYZ et DXZ, étant finis suivant nos suppositions, la distance DX est du premier ordre, et XY du même ordre que XZ. On trouve ainsi la règle suivante :

Le nombre de coïncidences de X *et* Y, *qui ont lieu en un point* D *de la droite* (L), *est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits* XY, *interceptés sur* (L) *par un point* X *dont la distance à* D *est infiniment petite du premier ordre et par les points correspondants* Y. [L'ordre d'une distance finie est égal à zéro (¹).]

(¹) Mon Mémoire déjà cité contient beaucoup d'applications de cette règle. On pourrait aussi en faire usage pour démontrer le théorème II de M. Halphen. *Voir* encore le n° 4 de cette Note.

striction que la correspondance se présente « dans une question : il n'entre pas de transcendantes (fonctions ou courbes) ». Si la rrespondance ne doit pas dépendre de fonctions ou de courbes inscendantes, on peut conclure *a fortiori* qu'on ne doit pas non as appliquer le principe à des cas où elle dépend des courbes graiques *arbitraires*, ou d'une séparation *arbitraire* de quantités elles et imaginaires, comme dans les exemples de M. Geiser, ni n plus à des cas où elle dépend d'une séparation *arbitraire* de oite et de gauche, d'arcs convexes et concaves, etc.

4. Nous ajouterons encore quelques remarques ultérieures sur *usage du principe de correspondance*. On sait qu'au moyen de e principe on peut déterminer le nombre de points d'intersection le deux courbes planes [1], et le nombre de ceux de trois suraces [2], si l'on connaît le degré de chacune des équations par rapport à chacune des coordonnées. En appliquant les mêmes considérations à un espace doué d'un nombre quelconque de dimensions, on verra qu'il est possible de trouver, par le principe de correspondance, quel sera le degré d'une équation résultant d'une élimination d'un nombre quelconque de variables, par rapport à chacune des variables qui y restent. Or la résolution algébrique d'un problème consiste, en général, en une série d'éliminations. On voit donc que, quant à la détermination du nombre de solutions d'une question, on peut remplacer la recherche algébrique par des applications du principe de correspondance (qui peuvent se faire sans qu'on pense aux équations algébriques).

L'avantage de ce procédé, c'est qu'on y fait abstraction de toutes les circonstances étrangères à ce seul but, de trouver le *nombre* de solutions, et que la voie qui y conduit le plus directement se présente ainsi plus facilement.

La connaissance du nombre des solutions peut avoir un intérêt propre (ordre ou classe d'une courbe, etc.); mais elle est aussi essentielle pour la résolution algébrique complète de la question; car, ayant trouvé le degré de l'équation finale qui sert à la résoudre, on connaît aussi la forme de cette équation. Chaque équation nu-

---

(1) *Voir* la Communication de M. Chasles, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 30 sept. 1872.

(2) *Voir* la Communication de M. Fonret, au *Bulletin de la Société Math.*, t. I, p. 122.

mérique, fournie par le principe de correspondance, correspond à une équation algébrique : l'un des membres de l'équation numérique indique le degré de l'équation algébrique, pendant que l'autre indique la distribution des différentes espèces de ses solutions. De cette façon, la résolution numérique par le principe de correspondance servira à guider la résolution algébrique.

Considérons, par exemple, la détermination par le principe de correspondance du nombre V des courbes d'un système qui sont tangentes à une droite donnée, si l'on connaît le nombre μ des courbes passant par un point donné, les ordres b et c des lieux des points doubles et cuspidaux de courbes du système, et les nombres des différentes courbes du système, qui ont des branches multiples. En désignant par n l'ordre des courbes du système, on trouve

$$2(n-1)\mu = V - 2b - 3c + \Sigma,$$

où le premier membre indique l'ordre de l'équation servant à déterminer les points d'une droite où deux points d'intersection avec une même courbe du système coïncident. Cette équation aura pour racines simples les V abscisses des points de contact de la droite avec des courbes du système, pour racines doubles et triples les abscisses des points d'intersection avec les deux lieux de points singuliers, et Σ racines qui sont les abscisses des points d'intersection avec les branches multiples de courbes du système (comptés d'après la règle du n° 2).

Si $n = 2$, on doit avoir $b = c = 0$, et Σ indique le nombre de coniques infiniment aplaties d'un système, comptées d'après la règle suivante, qui n'est qu'une transcription de celle du n° 2: *Le nombre des coniques infiniment aplaties, qui coïncident avec une droite* (D), *est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits, interceptés sur une droite différente de* (D), *par les coniques du système qui passent par un point dont la distance à la droite* (D) *est infiniment petite du premier ordre* [1].

---

(1) M. Halphen fait usage d'une autre règle (*loc. cit.*, p. 137).

STION MISE AU CONCOURS POUR L'ANNÉE 1873 PAR LA SOCIÉTÉ ROYALE DANOISE DES SCIENCES ET DES LETTRES DE COPENHAGUE.

CLASSE DES SCIENCES.

Question de Mathématiques.

i la théorie dite des *caractéristiques* a surtout acquis de l'im-ance dans son application aux courbes et aux surfaces du se-l ordre, c'est en grande partie parce qu'elles sont en même ps de la seconde classe, et parce que, en leur appliquant le prin-de dualité, on trouve ainsi des propriétés de ces mêmes courbes urfaces. Or, comme la même circonstance se reproduit dans tier géométrique (être) qui est formé par les points et les plans ılateurs d'une courbe gauche du troisième ordre, ces plans ıt pour enveloppe une surface développable de la troisième se, il est à supposer que la théorie des caractéristiques, étendue formes dont il s'agit, conduira à des résultats assez importants. s, en dehors de ces résultats immédiats, une pareille recherche ira encore à éclaircir les principes qu'on doit en général suivre r appliquer la théorie des caractéristiques aux systèmes des s géométriques formés par les points et les plans osculateurs de rbes gauches quelconques. En conséquence, l'Académie met au cours la question suivante :

tendre la théorie des caractéristiques aux systèmes des êtres métriques qui se composent des points et des plans osculateurs courbes gauches du troisième ordre, et déterminer les caractéris-ıes des systèmes qui doivent être considérés comme élémen-es.

es réponses à cette question peuvent être écrites en latin, en ıçais, en anglais, en allemand, en suédois et en danois. Les moires ne doivent pas porter le nom de l'auteur, mais une ise, et être accompagnés d'un billet cacheté muni de la même ise, et renfermant le nom, la profession et l'adresse de l'auteur. Membres de l'Académie qui demeurent en Danemark ne pren-ıt point part au concours. La récompense accordée pour une onse satisfaisante à l'une des questions proposées est la médaille r de l'Académie, d'une valeur de 50 ducats danois (450 fr.).

Les Mémoires doivent être adressés, avant la fin du mois d'octobre 1874, au Secrétaire de la Société, M. le Conseiller *J. Japetus Sm. Steenstrup,* professeur à l'Université de Copenhague.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Endrès (E.), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. — Manuel du Conducteur des Ponts et Chaussées, d'après le dernier programme officiel des examens d'admission. Cinquième édition. — Paris, Gauthier-Villars, 1873. 2 vol. in-8°. 15 fr.

Tome I, *Partie théorique;* 488 p., 290 figures dans le texte. — Arithmétique. Algèbre. Géométrie. Trigonométrie. Géométrie descriptive.

Tome II, *Partie pratique;* 502 p., 4 pl., 323 figures dans le texte. — Statique. Dessin graphique et lavis. Lever des plans. Nivellement. Cubature des terrasses et mouvement des terres. Pratique des travaux.

Tome III, *Applications* (sous presse). — Exposition des doctrines spéciales qui se rattachent à l'*Art de l'Ingénieur* en général et au service des Ponts et Chaussées en particulier. — Se vendra séparément.

Perrin (P.), ancien élève de l'École Polytechnique, chef de bataillon du Génie, en retraite. — Étude sur les Éclairs. — Paris, Gauthier-Villars, 1873. 1 vol. petit in-8°, 108 p., 24 figures dans le texte. 2 fr. 50 c.

Resal (H.), Ingénieur des Mines, professeur à l'École Polytechnique. — Traité de Mécanique générale, comprenant les Leçons professées à l'École Polytechnique. Tome Ier. — Paris, Gauthier-Villars, 1873. In-8°, 449 p., 66 figures dans le texte. 9 fr. 50 c.

Cinématique. — Théorèmes généraux de Mécanique. — De l'équilibre et du mouvement d'un corps solide.

Les tomes II et III sont sous presse et se vendront séparément.

Sturm (Ch.), membre de l'Institut. — Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. Quatrième édition, revue et corrigée par E. Prouhet. — Paris, Gauthier-Villars, 1873. 2 vol. in-8°, 433-507 p., 139 figures dans le texte. 12 fr.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

MON (George), Regius Professor of Divinity in the University of Dublin. — TREATISE ON THE HIGHER PLANE CURVES, intended as a Sequel to *A Treat-e on Conic Sections*. Second Edition. — Dublin; Hodges, Foster & Co.; 373. In-8°, 379 p. Prix : 12 sh.

a première édition du *Traité des Courbes planes de degré supé-ur,* publiée par M. Salmon en 1852, était depuis longtemps épuisée, cet excellent Ouvrage de l'illustre géomètre anglais était devenu sque introuvable. D'un autre côté, les progrès qu'a faits dans ces nières années la théorie des courbes de degré supérieur, les tions nouvelles que l'étude des fonctions abéliennes a introduites Géométrie analytique, les développements considérables de la orie des transformations des figures, de celle des courbes du isième et du quatrième ordre rendaient chaque jour l'Ouvrage M. Salmon plus incomplet, et en faisaient vivement désirer une uvelle édition, mise en harmonie avec les perfectionnements de Géométrie dans ces dernières années. Nous devons donc nous presser de remercier M. Salmon, qui a bien voulu, avec l'aide et collaboration de M. Cayley, comme cela est indiqué dans la éface, remanier entièrement son Ouvrage, supprimer un ou deux apitres, en ajouter plusieurs autres, de manière à ne passer sous ence aucune des théories et des notions essentielles qui ont été puises d'une manière définitive à la Science dans ces dernières nées.

Le Chapitre Ier (dû à M. Cayley) est intitulé : *Coordonnées.* Il surtout consacré à l'étude des coordonnées trilinéaires, servant léterminer des points (ponctuelles) ou des lignes (tangentielles).

Le Chapitre II traite des *Propriétés générales des courbes algé-ques,* du nombre des termes dans une équation, du tracé des rbes, des pôles et des polaires, de la théorie générale des points ltiples et des tangentes multiples, des polaires réciproques et équations de Plücker. Il contient, comme du reste tous ceux l'Ouvrage, plusieurs articles très-intéressants, qui ont été tés sur les différents sujets.

Chapitre III, qui constitue une division nouvelle, réunit, sous

le titre général d'*Enveloppes*, l'étude des enveloppes proprement dites, des courbes polaires réciproques, des développées, des caustiques, des courbes parallèles et des podaires négatives de M. Roberts.

Le Chapitre IV (*Propriétés métriques*) traite des théorèmes de Newton et de Carnot, des diamètres, des foyers des courbes de degré supérieur.

Les *cubiques* sont étudiées dans le Chapitre V. L'auteur examine l'intersection d'une cubique avec d'autres courbes, les pôles et polaires, la cayleyenne, la classification des cubiques, les cubiques unicursales, et il termine par un aperçu assez étendu sur l'application de la théorie des invariants et des covariants à l'étude de ces courbes.

Le Chapitre suivant, relatif aux courbes du quatrième ordre ou *quartiques*, est un de ceux qui ont reçu le plus d'additions. Il comprend l'étude des tangentes doubles, des quartiques à deux points doubles, des quartiques bicirculaires (ce sont les courbes ayant pour points doubles les deux points à l'infini sur le cercle), des quartiques unicursales. Le Chapitre se termine par quelques mots sur la théorie, malheureusement peu avancée, des invariants et covariants des courbes du quatrième ordre.

Le Chapitre VII traite de quelques courbes transcendantes : les épicycloïdes, les roulettes, la chaînette, la tractoire, la développante de cercle, etc.

Le Chapitre VIII, consacré aux transformations des courbes, a reçu les additions nécessaires. L'auteur étudie les transformations rationnelles de M. Cremona, la transformation quadrique, etc.

L'ancien Chapitre VII, qui avait pour objet le Calcul intégral et ses applications à la théorie des courbes, a été supprimé. En revanche, un Chapitre très-intéressant a été ajouté, qui traite des tangentes doubles, des courbes qu'on a appelées hessienne, cayleyenne, steinerienne, des coniques osculatrices, etc. A propos des systèmes de courbes, l'auteur dit quelques mots de la méthode des caractéristiques de M. Chasles, des travaux de M. Zeuthen, et des courbes aplaties dégénérées de M. Cayley.

En résumé, dans ce nouvel Ouvrage, M. Salmon est resté fidèle à la méthode qu'il a toujours suivie. Il a su inspirer le goût des recherches, et donner une idée très-exacte de l'état actuel de la Géo-

rie des courbes planes. On pourrait peut-être lui reprocher de as être assez complet, et de ne pas satisfaire pleinement le goût géomètres de profession pour des recherches plus précises et détaillées; mais le point essentiel, c'est, en définitive, d'intéer et d'encourager les lecteurs; il nous a toujours paru qu'il it mieux leur laisser le soin et surtout le désir de s'instruire e manière plus complète, que de les fatiguer en leur présentrop de choses dans une première étude [1].

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

CHTE ÜBER DIE VERHANDLUNGEN DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELL-AFT DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG [2]. Mathematisch-physische Classe. Leipzig, Hirzel.

XX; 1868.

ANSEN (P.-A.). — *Exposition succincte et rationnelle du cédé de compensation d'un réseau de triangles, d'après le moire intitulé : « De la méthode des moindres carrés, etc. », aissant de côté toutes les considérations accessoires.* (22 p.)

ans un travail inséré dans les *Abhandlungen der K. Sächs. ellschaft*, t. XIV, M. Hansen a traité, au point de vue général cientifique, la méthode des moindres carrés et son application Géodésie. Le procédé de compensation d'un réseau de triangles été déduit comme cas particulier d'un problème beaucoup plus éral, et la solution de ce problème embrasse tous les cas qui vent se présenter dans l'emploi de la méthode des moindres rés. Au moment où les nombreux travaux géodésiques en cours écution doivent concourir pour former le vaste ensemble de la

---

[1] La nouvelle édition est terminée, comme l'ancienne, par une Table très-com- des matières et des noms d'auteurs par ordre alphabétique. La Table ordinaire beaucoup développée, et enfin, dans la Préface, l'auteur indique, d'une manière illée, la part qui revient à M. Cayley.

[2] *Comptes rendus des Actes de la Société Royale des Sciences de Saxe, à Leipzig.* se mathématico-physique. Paraît chaque année en trois fascicules in-8°.

mesure européenne du degré, le savant auteur a pensé que ce ser rendre un service notable aux collaborateurs de cette gra œuvre que de leur donner une exposition rationnelle du proc de compensation d'un réseau de triangles, considéré en soi, ind pendamment de toutes les recherches qui s'y rattachent, et de l initier ainsi à la véritable pratique de cette méthode, pour laqu on indique souvent des règles incomplètes ou inexactes.

SCHLÖMILCH (O.). — *Sur la disparition des radicaux dans l différentielles.* (3 p.)

Une fonction rationnelle F de x et de $\sqrt{a+bx^2}$ peut se ram ner à la forme $f(x) + \frac{\varphi(x^2) + x\psi(x^2)}{\sqrt{a+bx^2}}$, f, φ et ψ étant des fon tions rationnelles. L'intégrale

$$\int \frac{\varphi(x^2)\,dx}{\sqrt{a+bx^2}},$$

par la substitution $\frac{cx}{\sqrt{a+bx^2}} = t$, se réduit à la forme rationnelle

$$\int \varphi\left(\frac{at^2}{c^2 - bt^2}\right) \frac{c\,dt}{c^2 - bt^2}.$$

T. XXI; 1869.

VOLKMANN (A.-W.). — *Sur la mécanique des muscles de l'œil.* (42 p.)

ZÖLLNER (F.). — *Sur un nouveau spectroscope, avec des considérations sur l'analyse spectrale des étoiles.* (12 p.)

L'étude spectroscopique des étoiles, considérée au point de vue de l'altération que la variation de distance du point lumineux doit produire sur les phénomènes lumineux, exige des observations d'une grande précision. Pour atteindre ce but, M. Zöllner a inventé l'instrument auquel il donne le nom de *spectroscope à réversion,* et dont il indique ici la construction et l'usage.

NEUMANN (C.). — *Recherches sur le mouvement d'un système de corps rigides.* (6 p.)

Un corps solide étant animé à la fois d'un nombre quelconque de vitesses de translation V et de vitesses angulaires Ω, on sait

on mouvement peut être représenté par une vitesse angulaire ie ω autour d'un axe passant par un point arbitraire Π, et par itesse de translation unique v le long de cet axe. Si l'on prend Π le centre de gravité du corps, et que ω_1, ω_2, ω_3 soient les osantes de ω suivant les trois axes principaux du corps par ort à ce point, la demi-force vive du corps peut se mettre sous me

$$T = \frac{mv^2 + m_1\omega_1^2 + m_2\omega_2^2 + m_3\omega_3^2}{2},$$

$_1$, m_2, m_3 désignant la masse du corps et ses trois moments rtie principaux. M. Neumann a présenté ce théorème sous forme facilement applicable à un grand nombre de problèmes lécanique, et en particulier au pendule de Foucault. De ression de la force vive on tire, par les formules de Hamilton, quations différentielles du mouvement.

ANSEN (P.-A.). — *Réflexions sur la réduction des angles n triangle sphéroïdique de côtés très-petits aux angles d'un ngle plan ou sphérique de mêmes côtés.* (7 p.)

Remarques au sujet d'un Mémoire de M. Weingarten, inséré au 1733 des *Astronomische Nachrichten*. (Voir *Bulletin*, I, p. 87.)

ZÖLLNER (F.). — *Sur l'observation des protubérances.* (4 p., ol.)

Addition à la Note précédente du même auteur.

NEUMANN (C.). — *Sur l'énergie mécanique de l'acide sulfu-ue.* (8 p.)

NEUMANN (C.). — *Sur le développement d'une fonction suivant carrés et les produits des fonctions de Fourier et Bessel.* 5 p.)

L'auteur a établi, dans un opuscule publié en 1867 (¹), une mule donnant le développement d'une fonction synectique sui-t les fonctions besséliennes $J^n(z)$ de la variable, les coefficients léveloppement se calculant au moyen d'une certaine fonction ra-

---

(¹) *Theorie der Bessel'schen Functionen. Ein Analogon zur Theorie der Kugelfunc-*n. Leipzig; in-8°, 135 p.

[illegible] que M. Neumann désigne par $O^n(z)$ [illegible] suivante. M. [illegible], dans un travail sur les [illegible] fonctions [illegible], considère comme probable la possibilité du développement d'une fonction [illegible] suivant les [illegible] des fonctions de Bessel. M. Neumann, avant [illegible] ses recherches sur ce sujet, [illegible] parvenu à établir cette possibilité; il a donné des formules pour calculer les coefficients, et enfin il a trouvé un mode de développement analogue pour les fonctions binaires, procédant suivant les produits de la forme [illegible].

[illegible] (C.). — *Sur le théorème des déplacements virtuels.* [illegible]

Les démonstrations que l'on donne ordinairement du théorème des vitesses virtuelles ont été critiquées par divers géomètres, entre autres par Jacobi, dans ses *Vorlesungen über Dynamik*, et dans ses Leçons, encore inédites, qu'il a professées en 1847-1848 à l'Université de Berlin. Jacobi, ainsi que Gauss, est d'avis que ce théorème doit être regardé comme un *principe* indémontrable. M. Neumann pense, malgré cela, que la démonstration du théorème est possible, en remplaçant les équations de liaison du système par des forces fictives, qui maintiennent le système dans les limites prescrites, sans opposer aucune résistance à son mouvement dans ces limites.

ZÖLLNER (F.). — *Sur une nouvelle méthode pour la mesure des forces attractives et répulsives.* (4 p.)

T. XXII; 1870.

MÜLLER (J.-J.). — *Sur les vibrations élastiques.* (3 p.)

Note relative à l'élévation du ton par l'accroissement de l'amplitude des vibrations sonores.

NEUMANN (C.). — *Sur la théorie du potentiel logarithmique et du potentiel newtonien.* (2 art., ensemble 66 p.)

Sous ce titre, l'auteur se propose de faire une série de Communications sur les importants problèmes de la représentation conforme, de l'état stationnaire de température, de l'équilibre électr

(¹) *Studien über die Bessel'schen Functionen.* Leipzig, 1868; in-8°, 135 p.

tique et électrodynamique, et d'exposer « certaines méthodes nérales, indépendantes du choix d'un système spécial de coornnées, » et au moyen desquelles ces problèmes peuvent se soudre presque dans tous les cas, quelle que soit la nature des nditions restrictives imposées. Ces méthodes sont importantes, m-seulement parce que l'auteur y évite l'emploi du principe de irichlet, dont l'exactitude est contestable, mais encore sous plueurs autres rapports. Le premier article contient un exposé rapide : ces méthodes, dont les conséquences sont développées dans le cond article.

VOLKMANN (A.-W.). — *Sur la théorie de la force musculaire.* 4 p.)

HANSEN (P.-A.). — *Détermination du centre de gravité d'un iangle sphérique quelconque.* (24 p.)

Les expressions données par l'auteur pour la détermination du entre de gravité d'un triangle géodésique sur une surface quelonque (¹) peuvent servir à la détermination analogue pour un riangle sphérique. Les intégrations, qui, dans le cas général, vaient été effectuées au moyen d'un développement en séries, oussé jusqu'aux termes du troisième ordre, peuvent, pour la phère, s'obtenir simplement sous forme finie.

BALTZER (R.). — *Sur les hypothèses de la théorie des paralèles.* (2 p.)

Examen de diverses hypothèses qui peuvent remplacer l'axiome XI l'Euclide, comme fondement de la théorie des parallèles.

BALTZER (R.). — *Sur l'expression d'un tétraèdre au moyen les coordonnées des sommets.* (2 p.)

ZÖLLNER (F.). — *Sur la température et la constitution phyique du Soleil.* (21 p., 1 pl.)

HANSEN (P.-A.). — *Description d'un support de lunette, comnuniquant à la lunette dirigée par rapport à l'horizon un mouement parallactique, avec la détermination de l'angle de posiion désigné par θ.* (30 p., 1 pl.)

(¹) *Supplement zu den « Geodätischen Untersuchungen »,* u. s. w.

[illegible] — [illegible] de la tempé- [illegible]

[illegible] — [illegible] p.

[illegible] du spectre, par [illegible] partie rouge, une nou- [illegible] parties du ciel qui [illegible] en rouge.

[illegible] — [illegible] de la pro- [illegible]

[illegible] de l'excitation.

[illegible] — [illegible] héliographique [illegible]

[illegible] du refroidis- sement [illegible] à la surface fluide [illegible] de nouveau par [illegible] dans l'atmosphère par [illegible] ne sont pas seulement [illegible] étendue, alors, aux [illegible] la formation [illegible] dans ce cas la [illegible] pour un [illegible] conditions [illegible] de l'atmosphère. Ce n'est [illegible] est revenue peu [illegible] formation de taches, [illegible] résultant de ce qu'en [illegible] considérer comme [illegible] Soleil. La distribution des taches [illegible] cette théorie, des zones [illegible] atmosphère, lesquelles, [illegible] avec les zones de plus grande [illegible] taches.

T. XXII. [illegible]

HANSEN (P.-A.). — *Sur la détermination de la figure* de la

une, à propos des assertions de MM. Newcomb et Delaunay. (2 p.)

M. Hansen combat les objections que ces deux astronomes ont cru devoir faire aux conclusions du Mémoire ([1]) dans lequel il a établi la non-coïncidence du centre de figure de la Lune avec son centre de gravité.

Schlömilch (O.). — *Sur les théorèmes stéréométriques, analogues au théorème de Fagnano.* (6 p.)

En traitant des questions relatives à l'aire de l'ellipsoïde ([2]), Legendre a reculé devant l'emploi des coordonnées rectangulaires, qui auraient introduit, dès la première intégration, un arc d'ellipse. Toutefois, si l'on effectue les calculs et qu'on fasse usage du théorème d'addition pour les intégrales elliptiques de seconde espèce, on parvient à ce résultat, qu'au théorème de Fagnano sur les arcs d'ellipse correspond une infinité de théorèmes analogues pour l'ellipsoïde.

Müller (J.-J.). — *Observations sur l'interférence de la lumière pour de grandes différences de marche.* (6 p.)

Drobisch (M.-W.). — *Sur les valeurs moyennes et leur application au calcul de la hausse et de la baisse des prix.* (24 p.)

Zöllner (F.). — *Sur la loi de la rotation du Soleil et des grosses planètes.* (65 p.)

L'auteur termine son travail en formulant les lois suivantes :

1° La direction moyenne de toutes les formes de stratification doit être, en général, parallèle à l'équateur.

2° La formation des couches doit diminuer pour des latitudes géographiques et des profondeurs croissantes, et disparaître entièrement dans les régions polaires et à de grandes profondeurs.

3° L'épaisseur des couches doit croître avec la latitude géographique et la profondeur.

4° La largeur des bandes dans une même couche doit atteindre son minimum à une distance d'environ 45 degrés de l'équateur.

5° La direction moyenne de la *structure parallèle* d'un grand

---

([1]) *Sur la figure de la Lune* (*Memoirs of the R. Astron. Soc. of London*, vol. XXIV).
([2]) *Traité des Fonctions elliptiques*, t. I, p. 350.



les seuls qui fassent excep-
point quelconque de l'un des
oint bien déterminé.
orrespondent un à un aux
intersections de Φ avec
de la courbe φ' corres-
p tourne autour d'un
ches de φ' restera fixe ;
minée par le point a'
De ce que les points
pondent un à un, il

lle, car elle corres-

mun, en dehors des
dant à K a un seul

par un point a non
pond, dans P', un
ent.
du plan P, Φ' la
ond point fonda-
dante. Un point
onque de Φ'_1 cor-
Φ'_1 correspond en
si ce point est
tion des courbes
aux de ce plan,
d'un plan sont
ce plan.
rbes, l'une de

mouvement
nt du point
point par-
orrespondra
oint fonda-
ux courbes

lement une courbe de l'ordre m en une co...
MM. Transon et Hirst ont fait connaître des ...
pour réaliser cette transformation. L'auteur ...
pour but d'ajouter une nouvelle méthode géo...
l'on vient d'indiquer.

Breton (Ph.). — *Note sur les observation...*
novembre 1869, *à Grenoble.* (10 p.)

Faure (H.). — *Transformation des pro...*
figures à l'aide de l'homologie. (2e art., 15 ...

MÉLANGES.

SUR LES TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES ...

D'après les Mémoires publiés par M. C...

1. Je considère deux plans P, P′ dont ...
dent d'après la loi suivante : à un point
de P correspond, en général, un seul
(x'_1, x'_2, x'_3) de P′, et, réciproquement, ...
correspond un seul point bien déterm...
point x parcourt une droite dans P, l...
crit toujours une courbe algébrique ...

Cette hypothèse revient à établir ...
gènes (x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3) ...
quelconques des deux plans, les re...

(1) $x_1 : x_2 : x_3$ ...

où les φ' sont des fonctions hom...
et telles que des relations (1) ...
verses

t donc les seuls qui fassent excep-
un point quelconque de l'un des
n seul point bien déterminé.
ts de Φ correspondent un à un aux
le f'. Les i intersections de Φ avec
i branches de la courbe φ' corres-
Si la droite p tourne autour d'un
une des branches de φ' restera fixe ;
tion est déterminée par le point a'
espondant à a. De ce que les points
de f' se correspondent un à un, il
ationnelle.
t aussi rationnelle, car elle corres-
roite l'.
n seul point commun, en dehors des
roite l' correspondant à K a un seul

eau P qui passent par un point a non
eau auquel correspond, dans P', un
ar a', et réciproquement.
ndamental d'ordre i du plan P, Φ' la
pondante, f_1 un second point fonda-
ondamentale correspondante. Un point
nd à f, un point quelconque de Φ'_1 cor-
nt commun à Φ' et à Φ'_1 correspond en
qui ne peut avoir lieu que si ce point est
Donc les points d'intersection des courbes
sont des points fondamentaux de ce plan,
les points fondamentaux d'un plan sont
courbes fondamentales de ce plan.
se décompose en deux courbes, l'une de
ment une courbe fondamentale.
que le point x' parcoure d'un mouvement
correspondant à φ; le mouvement du point
aussi être continu, et, par suite, ce point par-
courbes partielles. L'autre courbe correspondra
ngulier de p', c'est-à-dire à un point fonda-
e courbe φ se décompose en deux courbes

fermera les n positions correspondantes de x. Le lieu du point x est donc une courbe φ d'ordre n, et à une droite quelconque du plan P' correspond une courbe d'ordre n dans P. Cela revient à dire que dans les formules (2) les fonctions φ sont de degré n, comme les fonctions φ' dans les formules (1).

En répétant pour les φ ce que nous avons dit pour les φ', nous verrons que les φ sont des courbes rationnelles qui forment un réseau géométrique d'ordre n; et, si l'on désigne par α_i le nombre des points fondamentaux d'ordre i du plan P, c'est-à-dire, le nombre des points qui sont i-ples pour toutes les courbes φ, nous aurons

$$(3)' \qquad \sum_{i=1}^{i=n-1} i^2\alpha_i = n^2 - 1.$$

La correspondance que nous avons supposée entre les points des deux plans constitue une *transformation birationnelle de degré* n.

5. Soient f' un point fondamental i-ple du plan P', p une droite du plan P, et φ' la courbe correspondant à p dans P'. Si nous faisons tourner une droite l' autour de f' dans P', elle déterminera dans chacune de ses positions $n-i$ points variables de φ'; les i autres intersections sont fixes et réunies en f'. La courbe variable φ qui correspond à l' coupera donc la droite p en n points, dont $n-i$ seulement varieront avec φ. Donc ces courbes φ se composent chacune d'une courbe fixe Φ d'ordre i et d'une courbe variable K d'ordre $n-i$. Les points de la courbe fixe Φ correspondent tous au point fondamental f', et au faisceau de droites menées par f' correspond dans P un faisceau de courbes d'ordre $n-i$, et chacune de ces courbes prise avec la courbe Φ donne une courbe φ.

La courbe fixe Φ d'ordre i qui correspond au point fondamental f' d'ordre i est nommée *courbe fondamentale* d'ordre i du plan P.

De même, à tout point fondamental f, i-ple, du plan P correspond dans P' une courbe fondamentale Φ' d'ordre i, c'est-à-dire qu'à chacune des positions d'une droite tournant autour de f dans P correspondra dans P' une ligne composée d'une courbe variable d'ordre $n-i$ et d'une courbe fixe Φ' d'ordre i.

On obtient ainsi, dans chacun des deux plans, un système de courbes fondamentales qui correspondent aux points fondamentaux de l'autre.

es points fondamentaux sont donc les seuls qui fassent excep- à la règle générale, que, à un point quelconque de l'un des ıs, correspond dans l'autre un seul point bien déterminé.

. proprement parler, les points de Φ correspondent un à un aux ıts de P′ infiniment voisins de f'. Les i intersections de Φ avec droite p correspondent aux i branches de la courbe φ' corres- .dant à p, qui passent par f'. Si la droite p tourne autour d'un nt a de Φ, la tangente à l'une des branches de φ' restera fixe; ;t la tangente dont la direction est déterminée par le point a' iniment voisin de f' et correspondant à a. De ce que les points Φ et les directions issues de f' se correspondent un à un, il ulte que Φ est une courbe rationnelle.

La courbe K d'ordre $n - i$ est aussi rationnelle, car elle corres- nd, point par point, à une droite l'.

Les courbes Φ et K ont un seul point commun, en dehors des ints fondamentaux, car la droite l' correspondant à K a un seul int infiniment voisin de f'.

Toutes les courbes φ du réseau P qui passent par un point a non ndamental forment un faisceau auquel correspond, dans P′, un isceau de droites passant par a', et réciproquement.

6. Soient f un point fondamental d'ordre i du plan P, Φ' la ourbe fondamentale correspondante, f_1 un second point fonda- ıental de P, Φ'_1 la courbe fondamentale correspondante. Un point uelconque de Φ' correspond à f, un point quelconque de Φ'_1 cor- espond à f_1; donc un point commun à Φ' et à Φ'_1 correspond en ıême temps à f et à f_1, ce qui ne peut avoir lieu que si ce point est ın point fondamental. Donc les points d'intersection des courbes ondamentales d'un plan sont des points fondamentaux de ce plan, t réciproquement; donc les points fondamentaux d'un plan sont ous des intersections des courbes fondamentales de ce plan.

7. Si une courbe φ se décompose en deux courbes, l'une de elles-ci est nécessairement une courbe fondamentale.

En effet, imaginons que le point x' parcoure d'un mouvement ontinu la droite p' correspondant à φ; le mouvement du point orrespondant x doit aussi être continu, et, par suite, ce point par- urra une seule des courbes partielles. L'autre courbe correspondra nc à un point singulier de p', c'est-à-dire à un point fonda- ental de P′. Donc, si une courbe φ se décompose en deux courbes

d'ordre inférieur, la droite correspondante p' passe par un point fondamental de P'.

8. Considérons maintenant un point x' non fondamental de P', et deux courbes φ' qui passent par ce point, l'une d'elles au moins ne se décomposant pas en courbes d'ordres inférieurs. Comme les points fondamentaux de P' représentent n^2-1 intersections des deux courbes φ', et comme deux lignes d'ordre n, qui n'ont pas en commun une courbe partielle, ne peuvent se couper en plus de n^2 points, il s'ensuit que le point x' sera une intersection simple pour les deux courbes φ', ou bien qu'il ne peut être un point multiple ni pour l'une ni pour l'autre de ces courbes.

Donc les courbes φ' ne peuvent avoir de points multiples en dehors des points fondamentaux de leur plan. Si l'on se rappelle que le genre d'une courbe d'ordre n douée de α'_i points i-ples est $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{1}{2}i(i-1)\alpha'_i$, et que les courbes φ' sont des courbes rationnelles, on voit que l'on a

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{1}{2}i(i-1)\alpha'_i=\frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

On a de même, pour les courbes φ du plan P,

$$(4)' \qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{1}{2}i(i-1)\alpha_i=\frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

En retranchant de l'équation (3) le double de l'équation (4), on a

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}i\alpha'_i=3(n-1),$$

et, en combinant (3)' avec (4)',

$$(5)' \qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}i\alpha_i=3(n-1).$$

9. Les courbes φ' doivent donc satisfaire aux deux conditions (3) et (4), ou (3) et (5). Réciproquement, on peut démontrer que ces

ions sont suffisantes pour déterminer une transformation
nnelle du degré n entre deux plans P et P'. En effet, suppo-
ue l'on ait dans P' trois courbes $\varphi'_1 = 0$, $\varphi'_2 = 0$, $\varphi'_3 = 0$,
e n et n'appartenant pas à un même faisceau, qui satisfassent
conditions. Elles déterminent un réseau dont une courbe
nque a pour équation

$$h_1\varphi'_1 + h_2\varphi'_2 + h_3\varphi'_3 = 0.$$

ıs correspondre les courbes de ce réseau aux droites du plan
manière qu'à la courbe générique ci-dessus corresponde la

$$h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 = 0.$$

, au point x, commun aux deux droites

$$h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 = 0, \quad k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 = 0,$$

spondra le point x', commun aux deux courbes

$$h_1\varphi'_1 + h_2\varphi'_2 + h_3\varphi'_3 = 0, \quad k_1\varphi'_1 + k_2\varphi'_2 + k_3\varphi'_3 = 0,$$

seul, dépend des valeurs des h et des k. Ce point est unique
n déterminé en vertu des conditions ci-dessus.

. Un faisceau de droites du plan P', qui passent par un point
onque donné, contient α'_i rayons dirigés vers les points fonda-
aux i-ples; donc le faisceau de courbes correspondantes du
u P contiendra α'_i courbes, dont chacune est composée d'une
e principale Φ d'ordre i, et de la courbe k d'ordre $n - i$, qui
spond au rayon considéré [1]. Si nous voulons calculer les
ts doubles du faisceau, il faut observer qu'un point i-ple, com-
à toutes les courbes du faisceau, compte pour $(i-1)(3i+1)$
ts doubles; donc tous les points fondamentaux du plan P équi-

---

A une droite passant par deux points fondamentaux d'ordres i et j correspond une
e d'ordre n, qui se décompose en une courbe fondamentale d'ordre i, une courbe
mentale d'ordre j et une courbe d'ordre $n-i-j$. On a toujours $n \geqq i+j$. Si
$+j$, la droite qui joint les deux points fondamentaux est elle-même une ligne
mentale.

général, si la courbe d'ordre mn qui correspond à une courbe d'ordre n passe
par un point fondamental i-ple, elle contiendra r fois la courbe fondamentale
e i qui correspond à ce point; etc.

valent ensemble à $\sum_{i=1}^{i=n-1}(i-1)(3i+1)\alpha_i$ points doubles. A ce nombre il faut ajouter autant de points doubles qu'il y a de courbes composées (car les courbes composantes de chaque courbe composée ont un point simple commun en dehors des points fondamentaux), c'est-à-dire autant qu'il y a de points fondamentaux du plan P′ ou $\sum_{i=1}^{i=n-1}\alpha'_i$. D'ailleurs, le nombre total des points doubles d'un faisceau d'ordre n est $3(n-1)^2$; nous aurons donc

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}(i-1)(3i+1)\alpha_i+\sum_{i=1}^{i=n-1}\alpha'_i=3(n-1)^2.$$

D'après les équations (3)′ et (5)′,

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}(i-1)(3i+1)\alpha_i=3(n-1)^2-\sum_{i=1}^{i=n-1}\alpha_i;$$

donc

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}\alpha_i=\sum_{i=1}^{i=n-1}\alpha'_i, \tag{6}$$

où les deux réseaux P et P′ ont le même nombre de points fondamentaux.

11. De ce qu'une courbe du réseau P ne peut avoir un point double, en dehors des points fondamentaux, sans se décomposer en deux courbes, dont l'une est une courbe fondamentale, et de ce que, dans ce cas, le point double est l'unique point d'intersection des courbes composantes en dehors des points fondamentaux, il résulte que les courbes fondamentales du plan P forment le lieu des points doubles des courbes du réseau de ce plan, ou, en d'autres termes, qu'elles forment la *Jacobienne* du réseau P. De même, les courbes fondamentales du plan P′ forment la Jacobienne du réseau P′. On peut remarquer que les équations (5)′ et (5) expriment précisément que les sommes des ordres des courbes fondamentales des plans P et P′ sont égales à l'ordre de la Jacobienne des réseaux P et P′.

12. Soit ω le nombre de fois que la courbe fondamentale Φ ›rdre i, correspondant au point fondamental f', passe par le ınt fondamental f_1 d'ordre i, auquel correspond la courbe Φ'_1. ːnons par f_1 une droite arbitraire l, qui coupe Φ en $i - \omega$ autres ints. A la droite l correspond une courbe d'ordre n, composée de et d'une autre courbe k'_{n-i_1}. La courbe Φ'_1 correspond au seul int f_1, et k'_{n-i_1} correspond aux autres points de l; mais les points Φ correspondent au point f'; donc k'_{n-i_1} passe $i - \omega$ fois par , et, par suite, Φ'_1 passera $i - (i - \omega)$ fois par le même point f'; ı d'autres termes, Φ passe autant de fois par f_1 que Φ'_1 par f'.

13. On sait que, si un point est i-ple pour toutes les courbes d'un seau, il est $(3i - 1)$-ple pour la Jacobienne. Par suite, le nombre ːal des branches des courbes fondamentales de P qui passent par ı point fondamental i-ple est $3i - 1$. Donc, en vertu du théorème écédent, une courbe fondamentale d'ordre i passe $3i - 1$ fois par points fondamentaux de son plan.

14. Une courbe quelconque φ' du réseau P′ a i branches qui se ›isent au point fondamental f' d'ordre i; les tangentes à ces anches sont toutes distinctes, si la droite p, qui correspond dans à φ', rencontre en i points distincts la courbe fondamentale Φ corspondant à f'. Mais Φ a un nombre de points multiples équivant à $\frac{(i-1)(i-2)}{2}$ points doubles; la classe de cette courbe sera onc [1], en général et au plus, $2(i-1)$ et, par suite, dans un aisceau de courbes d'un des réseaux P ou P′, il y a $2(i-1)$ courbes lont deux branches ont une même tangente en un point fondanental donné de degré i.

La courbe fondamentale Φ a aussi $3(i-2)$ points d'inflexion et $\frac{1}{2}(i-2)(i-3)$ tangentes doubles; donc le réseau P a $3(i-2)$ ːourbes dont trois branches ont une même tangente en un point fondamental i-ple donné, et $2(i-2)(i-3)$ courbes qui ont, en ːe point, deux branches tangentes à une même droite et deux au-ːres branches tangentes à une seconde droite.

15. La classe d'une courbe principale d'ordre i étant $2(i-1)$, la ːlasse de la Jacobienne d'un des réseaux sera $2\sum_{i=1}^{i=n-1}(i-1)\alpha_i$ ou

[1] Voir *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, 104 (f).

$$6(n-1)-2\sum_{i=1}^{i=n-1} x'_i$$ en vertu des équations (5)′ et (6).

La classe de la Jacobienne peut aussi se déduire de son ordre $3(n-1)$ et du nombre de ses points multiples qui équivalent à $\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{(3i-1)(3i-2)}{2}x_i$ points doubles. On a ainsi

$$(3n-1)(3n-4)-\sum_{i=1}^{i=n-1}(3i-1)(3i-2)x_i=6(n-1)-2\sum_{i=1}^{i=n-1}x'_i,$$

équation identique à cause de (3)′ et (5)′.

16. Nous avons vu que toutes les intersections de deux courbes fondamentales sont des points fondamentaux. Il résulte de là que, si deux courbes fondamentales données d'ordres i, i_1 passent l'une ρ fois, l'autre σ fois par un même point fondamental, la somme des produits analogues à $\rho\sigma$, étendue à tous les points fondamentaux du plan, sera égale à $i\times i_1$.

De même, une courbe fondamentale et une courbe φ (dans un même plan) ne se coupent qu'aux points fondamentaux; en effet, si une courbe φ passe par un point d'une courbe fondamentale qui ne soit pas un point fondamental, elle se décompose en deux courbes, dont l'une est la courbe fondamentale elle-même. Donc, si une courbe fondamentale d'ordre i passe ρ fois par un point fondamental d'ordre i_1, la somme des produits analogues à ρi_1, étendue à tous les points fondamentaux du plan, est égale à $i\times n$.

En vertu de la propriété déjà énoncée (12), il faut conclure de là que, si une courbe fondamentale passe respectivement ρ, σ fois par deux points fondamentaux donnés de degrés i et i_1, la somme des produits analogues à $\rho\sigma$, étendue à toutes les courbes fondamentales du plan, est égale à $i\times i_1$.

Si une courbe fondamentale d'ordre i_1 passe ρ fois par un point fondamental donné de degré i, la somme des produits analogues à ρi_1, étendue à toutes les courbes fondamentales du plan, est égale à $i\times n$.

17. Les équations (3), (5), (3)′, (5)′ prouvent que les propriétés des deux plans P, P′ sont parfaitement réciproques, ou bien que

; solutions des équations (3), (5) sont conjuguées deux à deux la manière suivante :

Si les courbes d'ordre n d'un réseau ont en commun α_1 points nples, α_2 points doubles, ..., α_i points i-ples, ..., α_{n-1} points $-$ 1)-ples, où $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1})$ est une solution des équaons (3), (5), la Jacobienne du réseau est composée de α'_1 droites, coniques, ..., α'_i courbes d'ordre i, ... et α'_{n-1} courbes d'ordre $n-1$, ù $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_i, \ldots, \alpha'_{n-1})$ est une autre solution des équaons (3) et (5). En outre, cette seconde solution est telle que, si on considère un réseau de courbes d'ordre n ayant en commun α'_1 points simples, α'_2 points doubles, ..., α'_i points i-ples, ..., α'_{n-1} points $(n-1)$-ples, la Jacobienne de ce second réseau sera composée de α_1 droites, α_2 coniques, ..., α_i courbes d'ordre i, ..., α_{n-1} courbes d'ordre $n-1$.

Les deux solutions $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1})$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_i, \ldots, \alpha'_{n-1})$, définies dans l'énoncé précédent, seront dites *solutions conjuguées*. Elles satisfont aux relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i\alpha_i = \sum_{i=1}^{i=n-1} i\alpha'_i = 3(n-1),$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i^2\alpha_i = \sum_{i=1}^{i=n-1} i^2\alpha'_i = n^2 - 1,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{i=n-1} \alpha'_i;$$

is elles seront mieux caractérisées par une autre propriété qui ra démontrée dans la suite.

18. Examinons maintenant quelques cas particuliers. Soit $n=2$; réseau sera formé de coniques passant par trois points o_1, o_2, o_3. La Jacobienne est formée par les trois droites o_2o_3, o_3o_1, o_1o_2; en fet, un point quelconque m de la droite o_2o_3 est double pour unc nique du réseau : c'est celle qui est composée des deux droites o_2o_3, o_1m, etc.

A $\alpha_1 = 3$ correspond donc $\alpha'_1 = 3$, ou bien les équations (3), (5)

admettent, dans ce cas, un seul couple de solutions conjuguées, et ces deux solutions se confondent en une seule

$n = 2.$

$\alpha_1 = 3$

19. Soit $n = 3$; (3) et (5) donnent $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 1$, c'est-à-dire que le réseau sera formé de cubiques ayant en commun un point double d et quatre points ordinaires o_1, o_2, o_3, o_4. La Jacobienne se compose de la conique $do_1o_2o_3o_4$ et des quatre droites $d(o_1, o_2, o_3, o_4)$. En effet, un point quelconque m de la conique ci-dessus est double pour une cubique du réseau, celle qui est composée de la conique elle-même et de la droite md, et un point quelconque m de la droite do_1 est double pour la cubique du réseau composée de la droite elle-même et de la conique $dmo_2o_3o_4$.

A $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 1$ correspond ainsi $\alpha'_1 = 4$, $\alpha'_2 = 1$; les deux solutions conjuguées se confondent :

$n = 3.$

$\alpha_1 = 4$
$\alpha_2 = 1$

20. Soit $n = 4$; (3) et (5) admettent les deux solutions non conjuguées

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 3, \quad \alpha_3 = 0,$$
$$\alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1.$$

Dans le premier cas, le réseau est formé par des courbes du quatrième ordre ayant en commun trois points doubles d_1, d_2, d_3 et trois points simples o_1, o_2, o_3; et la Jacobienne est composée des trois coniques $d_1d_2d_3(o_2o_3, o_3o_1, o_1o_2)$ et des trois droites d_2d_3, d_3d_1, d_1d_2. En effet, un point quelconque m de la conique $d_1d_2d_3o_2o_3$ est double pour une courbe du réseau composée de cette conique et de l'autre conique $d_1d_2d_3o_1m$; et un point quelconque m de la

d_3 est double pour une courbe du réseau composée de la e-même et de la cubique $d_1^2 d_2 d_3 o_1 o_2 o_3 m$ [1].

me, dans le second cas, quand les courbes du réseau ont un un point triple t et six points simples $o_1, o_2, \ldots, o_6$, on : que la Jacobienne est formée par la cubique $t^2 o_1 o_2 \ldots o_6$, droites $t(o_1, o_2, o_3, \ldots, o_6)$.

te manière, à

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 3, \quad \alpha_3 = 0$$

ıd

$$\alpha'_1 = 3, \quad \alpha'_2 = 3, \quad \alpha'_3 = 0,$$

$$\alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1$$

ıd

$$\alpha'_1 = 6, \quad \alpha'_2 = 0, \quad \alpha'_3 = 1;$$

re, les équations (3), (5) admettent deux solutions dis- ont chacune coïncide avec sa propre conjuguée.

$$n = 4.$$

$\alpha_1 =$	6,	3
$\alpha_2 =$	0,	3
$\alpha_3 =$	1,	0

$n = 5$, (3) et (5) admettent les trois solutions suivantes :

$$\alpha_1 = 8, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 1,$$
$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 3, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 0,$$
$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 6, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0,$$

:une se confond avec sa conjuguée.

: premier cas, les courbes (du cinquième ordre) du réseau ›mmun un point quadruple q et huit points simples o_1, $_8$; et la Jacobienne est formée par la courbe du quatrième $_1 o_2 \ldots o_8$ et par les huit droites $q(o_1, o_2, \ldots, o_8)$.

: second cas, les courbes du réseau ont en commun un point

---

[1] nbole indique que la cubique a un point double en d_1 et passe, en outre, ts d_2, d_3, o_1, o_2, o_3, m.

triple t, trois points doubles d_1, d_2, d_3 et trois points simples o_1, o_2, o_3. La Jacobienne se compose de la cubique $t_2 d_1 d_2 d_3 o_1 o_2 o_3$, des trois coniques $t d_1 d_2 d_3 (o_1, o_2, o_3)$, et des trois droites $t(d_1, d_2, d_3)$.

Dans le troisième cas, les courbes du réseau ont en commun six points doubles $d_1, d_2, \ldots, d_6$, et la Jacobienne est le système des six coniques qui passent par ces points pris cinq à cinq.

$$n = 5.$$

$\alpha_1 =$	8,	3,	0
$\alpha_2 =$	0,	3,	6
$\alpha_3 =$	0,	1,	0
$\alpha_4 =$	1,	0,	0

22. Pour $n = 6$, nous avons les quatre solutions suivantes :

$$\alpha_1 = 10, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = 1;$$
$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = 0;$$
$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 1, \quad \alpha_5 = 0;$$
$$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 3, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = 0.$$

Les deux premières se confondent avec leurs conjuguées respectives, les deux dernières sont conjuguées entre elles.

Laissons de côté les deux premiers cas; observons seulement que, dans le troisième, le réseau est formé de courbes du sixième ordre ayant en commun un point quadruple q, quatre points doubles d_1, d_2, d_3, d_4, et trois points simples o_1, o_2, o_3 (¹); et la Jacobienne se compose des trois cubiques $q^2 d_1 d_2 d_3 d_4 (o_2 o_3, o_3 o_1, o_1 o_2)$, de la conique $q d_1 d_2 d_3 d_4$, et des quatre droites $q(d_1, d_2, d_3, d_4)$: donc à

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 1, \quad \alpha_5 = 0$$

correspond

$$\alpha'_1 = 4, \quad \alpha'_2 = 1, \quad \alpha'_3 = 3, \quad \alpha'_4 = 0, \quad \alpha'_5 = 0,$$

(¹) *Voir* MAGNUS, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie*, Band I, S. VII; Berlin, 1833.

à

$$\alpha_1 = 4,\quad \alpha_2 = 1,\quad \alpha_3 = 3,\quad \alpha_4 = 0,\quad \alpha_5 = 0$$

rrespond

$$\alpha'_1 = 3,\quad \alpha'_2 = 4,\quad \alpha'_3 = 0,\quad \alpha'_4 = 1,\quad \alpha'_5 = 0.$$

ı effet, dans le quatrième cas, les courbes du réseau ont en mmun trois points triples t_1, t_2, t_3, un point double d et quatre ›ints simples o_1, o_2, o_3, o_4; et la Jacobienne est composée de la ›urbe du quatrième ordre $t_1^2 t_2^2 t_3^2 d o_1 o_2 o_3 o_4$, des quatre coniques $t_1 t_2 d(o_1, o_2, o_3, o_4)$, et des trois droites $t_2 t_3$, $t_3 t_1$, $t_1 t_2$.

$n = 6.$

$\alpha_1 = 10,$	1	4,	3
$\alpha_2 = 0,$	4	1,	4
$\alpha_3 = 0,$	2	3,	0
$\alpha_4 = 0,$	0	0,	1
$\alpha_5 = 1,$	0	0,	0

23. D'une manière semblable, nous trouvons cinq solutions pour $= 7$; deux d'entre elles sont conjuguées entre elles. Pour $n = 8$, y a deux couples de solutions conjuguées et cinq autres solutions :spectivement conjuguées à elles-mêmes (¹).

$n = 7.$

$\alpha_1 = 12,$	2,	0	5,	3
$\alpha_2 = 0,$	3,	3	0,	5
$\alpha_3 = 0,$	2,	4	3,	0
$\alpha_4 = 0,$	1,	0	1,	0
$\alpha_5 = 0,$	0,	0	0,	1
$\alpha_6 = 1,$	0,	0	0,	0

$n = 8.$

$\alpha_1 = 14,$	3,	1,	0,	3	3,6	0,2
$\alpha_2 = 0,$	2,	3,	0,	3	6,0	5,0
$\alpha_3 = 0,$	3,	2,	7,	0	0,1	2,5
$\alpha_4 = 0,$	0,	2,	0,	3	0,3	0,1
$\alpha_5 = 0,$	1,	0,	0,	0	0,0	1,0
$\alpha_6 = 0,$	0,	0,	0,	0	1,0	0,0
$\alpha_7 = 1,$	0,	0,	0,	0	0,0	0,0

(¹) $n = 8$. La solution 3, 3, 0, 3, 0, 0, 0 a été indiquée par M. Cayley (*Proceedings* *the London Mathematical Society*, t. III, p. 143; 1870).

$n =$ [illegible].

$\alpha_1 =$ [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\alpha_2 =$ [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\alpha_3 =$ [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\alpha_4 =$ [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\alpha_5 =$ [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\alpha_6 =$ [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\alpha_7 =$ [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\alpha_8 =$ [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$n =$ [illegible].

$\alpha_1 =$ [illegible]	[illegible]	[illegible]	1.	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.3	3.0	0.1
$\alpha_2 =$ [illegible]	[illegible]	[illegible]	2.	1	[illegible]	[illegible]	3.1	3.3	0.6	1.0
$\alpha_3 =$ [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.3	[illegible]	0.0	[illegible]
$\alpha_4 =$ [illegible]	6,	2,	3.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.0	6.0	0.5
$\alpha_5 =$ [illegible]	6,	2,	1.	[illegible]	0,3	[illegible]	0.2	0.3	0,3	2,0
$\alpha_6 =$ [illegible]	6,	0,	6,	1	[illegible]	0.1	1.0	1,0	0,0	0.0
$\alpha_7 =$ [illegible]	1,	0,	0,	0	0.0	1.0	0.0	0,0	0,0	0.0
$\alpha_8 =$ [illegible]	0,	0,	0,	0	1.0	0.0	0.0	0.0	0,0	0,0
$\alpha_9 =$ 1,	0,	0,	0,	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0,0	0,0

24. Il est bien entendu que nous avons laissé de côté les systèmes des valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, qui ne satisfont pas au problème géométrique, quoiqu'ils résolvent arithmétiquement les équations (3) et (5). Le problème géométrique exige, en effet, qu'une courbe d'ordre n puisse avoir α_2 points doubles, α_3 points triples,..., sans se décomposer en courbes d'ordres inférieurs. Par exemple, comme une courbe du cinquième ordre ne peut avoir deux points triples, il faudra, pour $n = 5$, exclure la solution

$$\alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = 0.$$

courbe du septième ordre ne peut avoir cinq points triples, : que la conique passant par ces points couperait la courbe en :e points, et l'on sait que deux courbes (non composées) ne ent avoir en commun un nombre de points supérieur au pro- le leurs ordres; donc, dans le cas de $n = 7$, il faudra exclure ution

$$\alpha_1 = 3,\quad \alpha_2 = 0,\quad \alpha_3 = 5,\quad \alpha_4 = 0,\quad \alpha_5 = 0,\quad \alpha_6 = 0.$$

la même raison, une courbe du dixième ordre ne peut avoir ème temps un point quintuple et quatre points quadruples, ni points quintuples, deux points quadruples et un point triple, ›is points quintuples et deux points triples. Donc, dans le cas $= 10$, il faudra exclure les solutions

$$1,\quad \alpha_2 = 2,\quad \alpha_3 = 0,\quad \alpha_4 = 4,\quad \alpha_5 = 1,\quad \alpha_6 = 0,\quad \alpha_7 = 0,\quad \alpha_8 = 0,$$
$$4,\quad \alpha_2 = 1,\quad \alpha_3 = 1,\quad \alpha_4 = 2,\quad \alpha_5 = 2,\quad \alpha_6 = 0,\quad \alpha_7 = 0,\quad \alpha_8 = 0,$$
$$6,\quad \alpha_2 = 0,\quad \alpha_3 = 2,\quad \alpha_4 = 0,\quad \alpha_5 = 3,\quad \alpha_6 = 0,\quad \alpha_7 = 0,\quad \alpha_8 = 0,$$

. . . .

5. Cherchons maintenant à déterminer quelques solutions des ations (3) et (5), quand n est quelconque. Avant tout, obser- s que, comme une droite ne peut rencontrer une courbe d'ordre 1 plus de n points, le nombre α_i, si nous supposons $2i > n$, ne t avoir qu'une de ces deux valeurs 0 ou 1; et, si nous supposons $j > n$, si $\alpha_i = 1$, on aura $\alpha_j = 0$.

6. Pour $n > 2$, la valeur maximum de α_{n-1} est donc l'*unité*, et, $_{n-1} = 1$, tous les autres α sont égaux à *zéro*, à l'exception de α_1. is cette hypothèse, une quelconque des équations (1) ou (2) ne

$$\alpha_1 = 2(n-1).$$

te valeur est aussi le maximum de α_1 dans tous les cas, ainsi le montre l'équation

$$\sum i(n-i-1)(\alpha_i + \alpha_{n-i-1}) = 2(n-1)(n-2),$$

n obtient en éliminant α_{n-1} entre (1) et (2).

Le réseau du plan P est donc composé de courbes d'ordre n ayant en commun un point p $(n-1)$-ple et $2(n-1)$ points simples $o_1, o_2, o_3, \ldots, o_{2(n-1)}$. La Jacobienne est formée par les $2(n-1)$ droites $po_1, po_2, \ldots, po_{2(n-1)}$ et par la courbe d'ordre $n-1$, qui a en p un point $(n-2)$-ple et passe par tous les autres points donnés. En effet, si m est un point de la droite po_1 et que l'on combine celle-ci avec la courbe $p^{n-2}mo_2o_3\ldots o_{2(n-1)}$ d'ordre $n-1$, ou bien si m est un point [illegible] de la courbe $p^{n-2}o_1o_2o_3\ldots o_{2(n-1)}$, et que l'on combine celle-ci avec la droite pm, on obtient dans les deux cas une courbe composée du réseau.

Nous avons donc

$$\alpha_1 = 2(n-1), \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 0, \ldots, \quad \alpha_{n-2} = 0, \quad \alpha'_{n-1} = 1;$$

et donc la solution en question est conjuguée à elle-même ([1]).

n quelconque.

$\alpha_1 = 2(n-1)$
$\alpha_{n-1} = 1$

2° Supposons maintenant $\alpha_{n-1} = 2$, et, si $n > 4$, donnons à α_{n-2} sa valeur maximum

$$\alpha_{n-2} = 2.$$

Les autres α seront nuls à l'exception de α_1, α_2, pour lesquels les équations (1) et (2) donnent

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = n-2.$$

Les courbes du réseau ont en commun trois points simples o_1, o_2, o_3, [illegible] points doubles [illegible] et un point $(n-2)$-ple p. La [illegible] trois points doubles [illegible] $n-2$ points quelconques [illegible] et un point $(n-?)$-ple en p. Les [illegible] quand n est pair : [illegible] en effet, un point quel-

(¹) [illegible]

[illegible] nulles de α.

n de la droite pd_1 est double pour la courbe du réseau e de la droite elle-même et de la courbe

$$p^{n-3}d_2^2 d_3^2 \ldots d_{n-2}^2 d_1 m o_1 o_2 o_3$$

$2-1$;

courbe $p^{\frac{n}{2}-2} d_1 d_2 \ldots d_{n-2}$ d'ordre $\frac{n}{2}-1$; en effet, un point que m de cette courbe est double pour une courbe du réaposée de la courbe elle-même d'ordre $\frac{n}{2}-1$, et de la $^{\frac{n}{2}} d_1 d_2 d_3 \ldots d_{n-2} o_1 o_2 o_3 m$ d'ordre $\frac{n}{2}+1$;

s trois courbes $p^{\frac{n}{2}-1} d_1 d_2 \ldots d_{n-2}(o_2 o_3,\ o_3 o_1,\ o_1 o_2)$ d'ordre et, si m est un point quelconque de la courbe

$$p^{\frac{n}{2}-1} d_1 d_2 \ldots d_{n-2} o_2 o_3,$$

prise avec la courbe $p^{\frac{n}{2}-1} d_1 d_2 \ldots d_{n-2} m o_1$ du même ordre : une courbe du réseau ayant un point double en m.

$$\alpha_1 = 3,\quad \alpha_2 = n-2,\quad \alpha_{n-2} = 1$$

nd donc, pour n pair,

$$\alpha'_1 = n-2,\quad \alpha'_{\frac{n}{2}-1} = 1,\quad \alpha'_{\frac{n}{2}} = 3.$$

n pair.

α_1	$= 3,$	$n-2$
α_2	$= n-2,$	0
$\alpha_{\frac{n}{2}-1}$	$= 0,$	1
$\alpha_{\frac{n}{2}}$	$= 0,$	3
α_{n-2}	$= 1,$	0

le cas de n impair, on démontre de la même manière que ienne du réseau (du plan P) se compose :

1° Les $n-2$ droites [illegible];

2° Les trois courbes [illegible] (o_1, o_2, o_3) d'ordre $\frac{n-1}{2}$;

3° La courbe [illegible] d'ordre $\frac{n+1}{2}$; et à

[illegible]

correspond, pour n impair,

[illegible]

n impair.

[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]

Il est facile de se convaincre que, dans le cas de

$$\alpha_1 = n-2,\quad \alpha_{\frac{n}{2}-1} = 1,\quad \alpha_{\frac{n}{2}} = 3,$$

c'est-à-dire, quand les courbes du réseau, d'ordre n pair, ont en commun $n-2$ points simples $o_1, o_2, \ldots, o_{n-2}$, un point $\left(\frac{n}{2}-1\right)$-ple et trois points $\left(\frac{n}{2}\right)$-ples b_1, b_2, b_3, la Jacobienne est composée

1° Des trois droites $b_2 b_3$, $b_3 b_1$, $b_1 b_2$;

2° Des $n-2$ coniques $b_1 b_2 b_3 a (o_1, o_2, \ldots, o_{n-2})$;

3° De la courbe $b_1^{\frac{n}{2}-1} b_2^{\frac{n}{2}-1} b_3^{\frac{n}{2}-1} a^{\frac{n}{2}-2} o_1 o_2 \ldots o_{n-2}$ d'ordre n

et que, dans le cas de

$$\alpha_1 = n-2,\quad \alpha_{\frac{n-1}{2}} = 3,\quad \alpha_{\frac{n+1}{2}} = 1,$$

c'est-à-dire, quand les courbes du réseau, d'ordre n impair,

ı—2 points simples $o_1, o_2, \ldots, o_{n-2}$, trois points $\left(\frac{n-1}{2}\right)$-ples ı, et un point $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-ple b, les lignes suivantes font la Jacobienne :

trois droites $b(a_1, a_2, a_3)$;

$n-2$ coniques $ba_1a_2a_3(o_1, o_2, \ldots, o_{n-2})$;

courbe $b^{\frac{n-1}{2}} a_1^{\frac{n-3}{2}} a_2^{\frac{n-3}{2}} a_3^{\frac{n-3}{2}} o_1 o_2 \ldots o_{n-2}$ d'ordre $n-2$.

pposons maintenant $\alpha_{n-1}=0$, $\alpha_{n-2}=0$; si $n>6$, la vaimum de α_{n-3} est l'*unité*. Ayant $\alpha_{n-3}=1$, les autres α se-ı, à l'exception de α_1, α_2, α_3, pour lesquels les équations lonnent

$$\alpha_1+3\alpha_2+6\alpha_3=4n-5,$$
$$\alpha_1+4\alpha_2+9\alpha_3=6n-10,$$

$$\alpha_1+\alpha_2=5, \quad \alpha_2+3\alpha_3=2n-5;$$

tire les systèmes suivants :

$$\alpha_1=1, \quad \alpha_2=4, \quad \alpha_3=\frac{2n-9}{3}, \quad \alpha_{n-3}=1,$$

$$\alpha_1=4, \quad \alpha_2=1, \quad \alpha_3=\frac{2n-6}{3}, \quad \alpha_{n-3}=1,$$

$$\alpha_1=2, \quad \alpha_2=3, \quad \alpha_3=\frac{2n-8}{3}, \quad \alpha_{n-3}=1,$$

$$\alpha_1=5, \quad \alpha_2=0, \quad \alpha_3=\frac{2n-5}{3}, \quad \alpha_{n-3}=1,$$

$$\alpha_1=0, \quad \alpha_2=5, \quad \alpha_3=\frac{2n-10}{3}, \quad \alpha_{n-3}=1,$$

$$\alpha_1=3, \quad \alpha_2=2, \quad \alpha_3=\frac{2n-7}{3}, \quad \alpha_{n-3}=1.$$

premiers résolvent les équations (3) et (5), dans le cas où ;ible par 3; le troisième et le quatrième quand n est de la $+1$, et les deux derniers quand n est de la forme $3\mu+2$. : premier système, les courbes du réseau ont en commun

un point simple o, quatre points doubles d_1, d_2, d_3, d_4 ; $\frac{2n}{3} - 3$ points triples $t_1, t_2, \ldots, t_{\frac{2n}{3}-3}$, et un point $(n-3)$-ple a ; et la Jacobienne se compose

1° Des $\frac{2n}{3} - 3$ droites $a\left(t_1, t_2, \ldots, t_{\frac{2n}{3}-3}\right)$;

2° Des quatre courbes $a^{\frac{n}{3}-1} t_1 t_2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-3} (d_2 d_3 d_4, d_1 d_3 d_4, d_1 d_2 d_4, d_1 d_2 d_3)$ d'ordre $\frac{n}{3}$;

3° De la courbe $a^{\frac{n}{3}} t_1 t_2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-3} d_1 d_2 d_3 d_4 o$ d'ordre $\frac{n}{3} + 1$;

4° De la courbe $a^{\frac{2n}{3}-3} t_1^2 t_2^2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-3}^2 d_1 d_2 d_3 d_4 o$ d'ordre $\frac{2n}{3} - 1$.

Dans le second système, les courbes du réseau ont en commun quatre points simples o_1, o_2, o_3, o_4 ; un point double d ; $\frac{2n}{3} - 2$ points triples $t_1, t_2, \ldots, t_{\frac{2n}{3}-2}$, et un point $(n-3)$-ple a. Les courbes suivantes font partie de la Jacobienne :

1° Les $\frac{2n}{3} - 2$ droites $a\left(t_1, t_2, \ldots, t_{\frac{2n}{3}-2}\right)$;

2° La courbe $a^{\frac{n}{3}-2} t_1 t_2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-2}$ d'ordre $\frac{n}{3} - 1$;

3° Les quatre courbes $a^{\frac{n}{3}-1} t_1 t_2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-2} d(o_1, o_2, o_3, o_4)$ d'ordre $\frac{n}{3}$;

4° La courbe $a^{\frac{2n}{3}-2} t_1^2 t_2^2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-2}^2 d(o_1 o_2 o_3 o_4)$ d'ordre $\frac{2n}{3}$.

Nous obtenons ainsi, dans le cas où n est un multiple de 3, les deux couples suivants de solutions conjuguées des équations (3) et (5) :

n multiple de 3.

α_1	$=$	$1,$	$\frac{2n}{3}-3$	α_1	$=$	$4,$	$\frac{2n}{3}-2$
α_2	$=$	$4,$	0	α_2	$=$	$1,$	0
α_3	$=$	$\frac{2n}{3}-3,$	0	α_3	$=$	$\frac{2n}{3}-2,$	0
$\alpha_{\frac{n}{3}}$	$=$	$0,$	4	$\alpha_{\frac{n}{3}-1}$	$=$	$0,$	1
$\alpha_{\frac{n}{3}+1}$	$=$	$0,$	1	$\alpha_{\frac{n}{3}}$	$=$	$0,$	4
$\alpha_{\frac{2n}{3}-1}$	$=$	$0,$	1	$\alpha_{\frac{2n}{3}}$	$=$	$0,$	1
α_{n-2}	$=$	$1,$	0	α_{n-2}	$=$	$1,$	0

même manière, en considérant les cas où le nombre n est
me $3\mu+1$, ou de la forme $3\mu+2$, on trouve les couples
ions conjuguées qui suivent :

$n \equiv 1$ (*mod.* 3).

α_1	$=$	$2,$	$\frac{2n-8}{3}$	α_1	$=$	$5,$	$\frac{2n-5}{3}$
α_2	$=$	$3,$	0				
α_3	$=$	$\frac{2n-8}{3},$	0	α_3	$=$	$\frac{2n-5}{3},$	0
$\alpha_{\frac{n-1}{3}}$	$=$	$0,$	3				
$\alpha_{\frac{n+2}{3}}$	$=$	$0,$	2	$\alpha_{\frac{n-1}{3}}$	$=$	$0,$	5
$\alpha_{\frac{2(n-1)}{3}}$	$=$	$0,$	1	$\alpha_{\frac{2n+1}{3}}$	$=$	$0,$	1
α_{n-2}	$=$	$1,$	0	α_{n-2}	$=$	$1,$	0

[illegible]

z	=	[illegible]	[illegible]	z	=	[illegible]	[illegible]
z_2	=	[illegible]	1	z_2	=	[illegible]	1
z_3	=	[illegible]	1	z_3	=	[illegible]	1
[illegible]	=	1	2				
[illegible]	=	1	[illegible]	[illegible]	=	1	[illegible]
[illegible]	=	1	[illegible]	[illegible]	=	1	1
[illegible]	=	[illegible]	1	[illegible]	=	[illegible]	1

29. Faisons $z_{n-1} = 2$, $z_{n-2} = 0$, $z_{n-3} = 0$, et, en outre, $z_{n-4} = 1$, ce qui est la plus grande valeur de z_{n-4} pour $n > 8$. Les autres z seront nuls, à l'exception de z_1, z_2, z_3, z_4; nous tirons, par suite, des équations (3) et (5)

$$z - 3z_2 - 6z_3 - 10z_4 = 5n - 8,$$

$$z - 4z_2 - 9z_3 - 16z_4 = 8n - 17,$$

ou bien

$$3z - 4z_2 - 3z_3 = 21,$$

$$2z_4 = z - z_2 - n - 10.$$

En cherchant à satisfaire à ces équations de toutes les manières possibles, et en déterminant pour chaque cas la Jacobienne du réseau, nous obtenons les couples suivants de solutions conjuguées des équations (3) et (5), qui sont différentes suivant les conditions de divisibilité de n par 4 :

$n \equiv 0 \ (mod.\ 4)$.

$1,\ \frac{n}{2}-3$	$\alpha_1 = 2,\ \frac{n}{2}-4$	$\alpha_1 = 3,\ \frac{n}{2}-2$	$\alpha_1 = 6,\ \frac{n}{2}-2,$
$3,\ 0$	$\alpha_2 = 5,\ 0$	$\alpha_2 = 3,\ 0$	
$2,\ 0$	$\alpha_4 = \frac{n}{2}-4,\ 0$	$\alpha_4 = \frac{n}{2}-2,\ 0$	$\alpha_2 = 1,\ 0$
$\frac{n}{2}-3,\ 0$	$\alpha_{\frac{n}{4}} = 0,\ 5$		$\alpha_4 = \frac{n}{2}-2,\ 0$
$0,\ 3$		$\alpha_{\frac{n}{4}-1} = 0,\ 1$	$\alpha_{\frac{n}{4}-1} = 0,\ 1$
$0,\ 1$	$\alpha_{\frac{n}{4}+1} = 0,\ 2$	$\alpha_{\frac{n}{4}} = 0,\ 3$	$\alpha_{\frac{n}{4}} = 0,\ 6$
$0,\ 1$	$\alpha_{\frac{3n}{4}-1} = 0,\ 1$		
$0,\ 2$		$\alpha_{\frac{n}{2}} = 0,\ 3$	$\alpha_{\frac{3n}{4}} = 0,\ 1$
$1,\ 0$	$\alpha_{n-1} = 1,\ 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\ 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\ 0$

$n \equiv 1 \ (mod.\ 4)$.

$0,\ \frac{n-7}{2}$	$\alpha_1 = 2,\ \frac{n-5}{2}$	$\alpha_1 = 3,\ \frac{n-7}{2}$	$\alpha_1 = 7,\ \frac{n-3}{2}$
$3,\ 0$	$\alpha_2 = 3,\ 0$	$\alpha_2 = 4,\ 0$	
$3,\ 0$	$\alpha_3 = 1,\ 0$		
$\frac{n-7}{2},\ 0$	$\alpha_4 = \frac{n-5}{2},\ 0$	$\alpha_4 = \frac{n-7}{2},\ 0$	$\alpha_4 = \frac{n-3}{2},\ 0$
$0,\ 1$	$\alpha_{\frac{n-1}{4}} = 0,\ 3$	$\alpha_{\frac{n-1}{4}} = 0,\ 4$	$\alpha_{\frac{n-1}{4}} = 0,\ 7$
$0,\ 3$	$\alpha_{\frac{n+3}{4}} = 0,\ 1$	$\alpha_{\frac{n+3}{4}} = 0,\ 3$	
$0,\ 3$	$\alpha_{\frac{n-1}{2}} = 0,\ 2$	$\alpha_{\frac{3(n-1)}{4}} = 0,\ 1$	$\alpha_{\frac{3n+1}{4}} = 0,\ 1$
	$\alpha_{\frac{n+1}{2}} = 0,\ 1$		
$1,\ 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\ 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\ 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\ 0$

x_n

$\frac{x_{n-2}}{4}$

$\frac{x_{n+2}}{4}$

$\frac{x_{2n-2}}{4}$

$x_{2n} =$

$x_1 =$

$x_2 =$

$x_4 =$

$\frac{x_{n-1}}{4} =$

$\frac{x_{n+1}}{4} =$

$x_{2n-1} =$

Nous ne pousserons pas plus loin, pour le moment, la recherche des solutions des équations (3) et (5); nous passerons à la démonstration de nouvelles propriétés générales des réseaux qui satisfont à ces équations.

30. Parmi toutes les courbes fondamentales d'un des deux plans, je considère toutes celles d'un même ordre i, et, parmi ses points fondamentaux, je considère aussi ceux d'un même ordre j; en d'autres termes, je considère le *groupe* des courbes Φ (ou Φ') d'ordre i, et le groupe des points f (ou f') d'ordre j du plan P (ou P'), auxquels correspondent, dans l'autre plan, le groupe des points f' (ou f) d'ordre i et le groupe des courbes Φ' (ou Φ) d'ordre j.

Comme les points d'un même groupe entrent *symétriquement* dans les conditions qui déterminent les courbes φ (ou φ') du réseau, et comme les courbes fondamentales d'un même groupe entrent symétriquement dans la Jacobienne du réseau, il s'ensuit que les relations qui existent entre les points et les courbes des deux groupes considérés doivent être parfaitement symétriques, soit par rapport aux points fondamentaux, soit par rapport aux courbes fondamentales. Donc on pourra déduire des nombres ω des branches d'une courbe du premier groupe, qui passent par les divers points du second, les nombres ω relatifs à toute autre courbe du même groupe, par les permutations des points du second groupe. Par suite, les courbes du premier groupe correspondront aux permutations, répétées un même nombre de fois, des points du second groupe. Mais, en appliquant le même raisonnement à l'autre plan, les points remplacent les courbes, et réciproquement; donc aussi les points du second groupe correspondront aux permutations, répétées un même nombre de fois, des courbes du premier groupe.

Deux cas peuvent se présenter :

a) Les nombres ω (relatifs aux deux groupes considérés) sont tous égaux, c'est-à-dire que toutes les courbes du premier groupe passent un même nombre ω de fois par tout point du second groupe.

b) Un des nombres ω est différent des autres qui sont tous égaux entre eux; c'est-à-dire que toute courbe du premier groupe passe un même nombre de fois par tous les points, moins un, du second groupe.

Le nombre des permutations des points est alors égal à celui des

points, et, par suite, le nombre des courbes (du premier groupe) et le nombre α_i des points du second seront égaux.

Il ne peut se présenter d'autres cas. Si, parmi les nombres ω relatifs à une courbe (du premier groupe) et aux points (du second groupe), il y en avait deux ou plusieurs différents des autres, le nombre des permutations serait plus grand que le nombre des points et, par suite, le nombre des courbes plus grand que celui des points, et, en même temps, pour la même raison, le nombre des points plus grand que le nombre des courbes : ce qui est absurde.

Quand le groupe des courbes et le groupe de points se trouvent dans le cas *b*), nous dirons que les deux groupes sont *coordonnés* entre eux. Un même groupe de points ne peut être coordonné avec deux groupes distincts de courbes; car il s'ensuivrait une certaine corrélation entre les courbes de l'un et de l'autre de ces groupes, ce qui est incompatible avec la symétrie complète qui existe dans chaque groupe de courbes.

D'un autre côté, un groupe de points est nécessairement coordonné à un groupe de plusieurs courbes; car, s'il n'en était pas ainsi, le groupe donné de courbes et un groupe quelconque de points se trouveraient dans le cas *a*), ou bien toute courbe du groupe donné passerait le même nombre de fois par tous les points fondamentaux du groupe quelconque. Mais cela est absurde, parce que, de même que les points fondamentaux déterminent les courbes fondamentales, de même aussi un système donné de nombres ω relatifs à tous les points fondamentaux (les ω étant égaux pour les points d'un même groupe), ne peut déterminer qu'une courbe.

Donc tout groupe de *plusieurs* courbes est coordonné à un, et un seul groupe, contenant un égal nombre de points. Si maintenant nous mettons de côté tous ces groupes de plusieurs courbes, il ne restera que les courbes et les points uniques dans leurs ordres respectifs; mais le nombre total des courbes fondamentales est égal, dans chaque plan, au nombre total des points fondamentaux et le nombre des courbes d'un groupe est égal au nombre des points du groupe coordonné; donc aussi le nombre des courbes fondamentales uniques, dans leurs ordres respectifs, est égal au nombre des points uniques aussi dans leurs ordres respectifs. De tout cela résulte le théorème suivant :

Les x qui constituent une solution quelconque des équations (3)

t (5) sont égaux aux α de la solution conjuguée, pris, en général, ans un ordre différent ([1]).

31. Les nombres ω jouissent d'une propriété intéressante, découerte par Clebsch ([2]), qui consiste en ce que leur déterminant est gal à n en valeur absolue.

Pour démontrer ce théorème, nous abandonnerons les notations lont nous nous sommes servi jusqu'ici, pour employer celles de 'illustre géomètre allemand. Les ordres du 1er, du 2e, du 3e,..., lu $i^{\text{ème}}$ point fondamental du plan P seront désignés par r_1, r_2, $r_3, \ldots, r_i$; les équations (3) et (5) prendront donc la forme

$$\text{(III)} \qquad \sum_i r_i^2 = n^2 - 1,$$

$$\text{(V)} \qquad \sum_i r_i = 3(n-1);$$

de même, $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_i$ désigneront les ordres des points fondamentaux de P′, c'est-à-dire les ordres des courbes fondamentales de P, et les équations (3)′ et (5)′ deviendront

$$\text{(III)}' \qquad \sum_j s_j^2 = n^2 - 1,$$

$$\text{(V)}' \qquad \sum_j s_j = 3(n-1).$$

Soit $\omega_{i,j}$ le nombre des branches de la $i^{\text{ième}}$ courbe fondamentale qui passait par le $j^{\text{ième}}$ point fondamental; en vertu du théorème n° 12, nous aurons

$$\omega_{i,j} = \omega_{j,i};$$

comme aucun des nombres r_i, s_j n'est plus grand que $n-1$, aucun des nombres ω ne pourra être supérieur à $n-2$.

Les deux théorèmes du n° 16, dont l'un regarde l'intersection de deux courbes fondamentales Φ_i et Φ_{i_1} par exemple, et l'autre l'inter-

---

([1]) Pour la démonstration de ce théorème, *voir* Clebsch, *Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen* (*Mathem. Ann.*, t. IV, p. 490).

([2]) *Ibidem.*

section d'une courbe fondamentale Φ_i avec une courbe φ du réseau P, peuvent s'exprimer par les formules

(VI) $$\sum_j \omega_{i,j}\omega_{i_1,j} = r_i r_{i_1},$$

(VII) $$\sum_j s_j \omega_{i,j} = n r_i,$$

et les formules analogues pour le plan P' sont

(VI)' $$\sum_i \omega_{i,j}\omega_{i,j_1} = s_j s_{j_1},$$

(VII)' $$\sum_i r_i \omega_{i,j} = n s_j.$$

Les courbes fondamentales sont du genre zéro dans l'un et l'autre plan; donc

(VIII) $$\sum_j \frac{\omega_{i,j}(\omega_{i,j}-1)}{2} = \frac{(r_i-1)(r_i-2)}{2},$$

(VIII)' $$\sum_i \frac{\omega_{i,j}(\omega_{i,j}-1)}{2} = \frac{(s_j-1)(s_j-2)}{2}.$$

Le théorème du n° 13, qui se rapporte au nombre des branches des courbes fondamentales qui passent par un point fondamental, s'exprime par les formules

(IX) $$\sum_j \omega_{i,j} = 3r_i - 1,$$

(IX)' $$\sum_i \omega_{i,j} = 3s_j - 1.$$

En faisant la somme du double de (8) et de (9), on a

(X) $$r_i^2 + 1 = \sum_j \omega_{i,j}^2;$$

de même,

(X)' $$s_j^2 + 1 = \sum_i \omega_{i,j}^2.$$

ıant posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \dots \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} & \dots \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

ıs le carré de ce déterminant; en ayant égard aux équations (X), ou aux équations (VI)′ et (X)′, nous aurons

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} r_1^2+1 & r_1 r_2 & r_1 r_3 & \dots \\ r_2 r_1 & r_2^2+1 & r_2 r_3 & \dots \\ r_3 r_1 & r_3 r_2 & r_3^2+1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 1 + \sum_i r_i^2,$$

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} s_1^2+1 & s_1 s_2 & s_1 s_3 & \dots \\ s_2 s_1 & s_2^2+1 & s_2 s_3 & \dots \\ s_3 s_1 & s_3 s_2 & s_3^2+1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 1 + \sum_j s_j^2,$$

'après (III) et (III)′,

$$\Delta^2 = n^2,$$

$$\Delta = \pm n, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

ui a été démontré au n° 30 revient à dire que, si l'on divise ·minant Δ au moyen de lignes horizontales et de lignes verti-le manière que chacun des rectangles ainsi tracés ne ren-ɿue des lignes relatives à des r tous égaux entre eux et des es relatives à des s égaux entre eux, un quelconque de ces ;les aura tous ses éléments égaux (cas a), ou sera un carré ble à la forme

$$\begin{vmatrix} \omega' & \omega & \omega & \dots & \omega \\ \omega & \omega' & \omega & \dots & \omega \\ \omega & \omega & \omega' & \dots & \omega \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \omega & \omega & \omega & \dots & \omega' \end{vmatrix}.$$

A tout groupe de r ou de s égaux correspond un seul de ces carrés. La valeur du carré supposé est $(\omega' - \omega)^{m-1}$, où m est le nombre de ses colonnes; par suite, le déterminant Δ est divisible par $(\omega' - \omega)^{m-1}$, ce qui revient à dire que $(\omega' - \omega)^{m-1}$ est un facteur de n [1].

32. Supposons maintenant que les deux plans P, P′ coïncident, ou bien considérons deux figures dans un même plan qui se correspondent point par point, de manière qu'aux droites d'une figure correspondent dans l'autre les courbes d'ordre n d'un réseau [assujetti aux conditions (3), (5)].

Les droites d'un faisceau dans une des figures et les courbes correspondantes de l'autre forment deux faisceaux projectifs; par suite, le lieu des intersections des lignes correspondantes sera une courbe d'ordre $n+1$, passant r fois par tout point principal de degré r de la seconde figure.

33. Quelle est l'enveloppe des droites qui joignent les points d'une droite R de la première figure aux points homologues de la seconde? La droite R est une tangente n-ple pour l'enveloppe en question, à cause des n points de R homologues de ceux où R coupe sa courbe correspondante d'ordre n. Tout autre point de R, joint à son homologue, donne une tangente de l'enveloppe; la classe de celle-ci est donc $n+1$.

34. Quel est le lieu des points de la première figure qui, joints aux points correspondants de la seconde, donnent des droites passant par un point fixe p? Le lieu passe par p, parce que la droite qui joint p au point correspondant p' passe par p. Menons ensuite par p une droite quelconque; elle coupera la courbe qui lui correspond dans la seconde figure en n points. Si l'on considère ces n points comme appartenant à la seconde figure, leurs correspondants appartiennent au lieu cherché, qui est, par conséquent, une courbe [illegible] de l'ordre $n+1$.

Si o_r est un point principal de degré r de la première figure, [illegible] droite po_r contient r points de la seconde figure correspondan[illegible] o_r; donc le lieu [illegible] passera r fois par o_r. Si o'_r est un point prin[illegible]c[illegible]pal de la seconde figure, la droite po'_r contient r points de la [illegible]pr[illegible]

[1] [illegible]

ui correspondent à o'_r; la courbe 𝔓 passera par ces r points, lire par les intersections de po'_r et de la courbe principale espond à o'_r.
oints où une droite R, considérée dans la première figure, a courbe correspondante d'ordre n sont, dans la seconde les homologues de ceux de la première, où R, considérée appartenant à la seconde, rencontre la courbe qui lui cor- dans la première. Donc la courbe 𝔓 est aussi le lieu des tions des droites qui passent par p, considérées comme ap- nt à la seconde figure, avec les courbes correspondantes de ière figure (32).
oints homologues à ceux de la courbe 𝔓, considérée dans la e figure, sont sur une autre courbe 𝔓', lieu des points de la figure qui, joints aux points correspondants de la première, t des droites passant par p, ou encore lieu des intersections ites qui passent par p, considérées dans la première figure courbes correspondantes de la seconde.
e droite passant par p coupe les deux courbes 𝔓, 𝔓' en deux s de n points correspondants.

Soient q un autre point quelconque du plan et 𝔔 la courbe end de q comme 𝔓 de p. Les n points où la droite pq, con- comme appartenant à la seconde figure, rencontre la courbe ondante de la première appartiennent évidemment aux ourbes 𝔓, 𝔔, comme aussi aux courbes qui correspondent res points de la droite pq. Les deux courbes 𝔓 et 𝔔 se cou- n outre, aux points fondamentaux de la première figure, ce onne $\sum i^2 \alpha_i = n^2 - 1$ intersections; elles auront donc $)^2 - n - (n^2 - 1) = n + 2$ autres points communs, et cha- ces derniers points, joint au point homologue de la seconde doit donner une droite passant par p aussi bien que par q. + 2 points coïncident nécessairement avec leurs propres ondants, c'est-à-dire que *le système des deux figures admet points doubles.*
es les courbes analogues à 𝔓 et 𝔔 et relatives aux points du ment un réseau; car elles ont en commun les points fon- ux de la première figure et les points doubles du système,

ce qui équivaut à

$$\sum \frac{i(i+1)}{2}\alpha_i + n + 2 = \frac{(n+1)(n+4)}{2} - 2$$

conditions communes.

36. Supposons de nouveau que les deux plans P et P′ ne dent pas, et soient deux points fixes π, π' dans l'espace. Joig un point quelconque a du plan P, et π' au point correspo du plan P′. Si le point a parcourt tout le plan P, les droites engendrent deux gerbes coniques ([1]) ayant entre elles une telle, qu'à une droite quelconque de l'une correspond un déterminée (et généralement unique) de l'autre, et qu'à d'une des gerbes correspond dans l'autre un cône d'ordre les cônes analogues d'une gerbe qui correspondent aux l'autre ont en commun un certain nombre α_i ($i = 1, 2, \ldots$ de génératrices i-ples, où les nombres α_i satisfont aux quest et (5).

Si les deux gerbes coniques (π), (π') sont coupées par transversal quelconque, nous obtiendrons dans ce plan deu qui se correspondront point par point, de manière qu'au de l'une correspondront dans l'autre des courbes d'ord comme le système de ces deux figures admet $n + 2$ points il s'ensuit que le lieu des points où se coupent les rayons gues de deux gerbes coniques (π), (π') est une courbe gauc dre $n + 2$. Il est évident que cette courbe passe par le π, π', et y est tangente aux droites qui correspondent à $\pi\pi'$ rée comme appartenant d'abord à la gerbe (π), puis à la ge

Si o_r est un point principal de degré r de la première fig P, au rayon πo_r correspondra un cône ayant pour sommet π' et pour base la courbe principale d'ordre r qui corresp P′ à o_r; les r intersections de ce cône et de la droite πo_r se points de la courbe gauche. Cette courbe a donc $r + 1$ p le rayon πo_r et autant sur le rayon $\pi' o'_r$, si o'_r est un point pal de degré r de la seconde figure.

([1]) *Strahlenbündel* des Allemands (v. Staudt, *Geometrie der Lage*, p. 4; 1847).

37. Nous arriverions aux mêmes résultats en posant la question comme il suit : Quel est le lieu d'un point a du plan P tel que le rayon πa rencontre son homologue $\pi' a'$? Si a'' est l'intersection du plan P avec la droite $\pi' a'$, les points a'' formeront une troisième figure ayant avec la première (formée des points a) la même correspondance que celle qui existe entre la première et la seconde (formée des points a'). D'ailleurs, si les rayons πa, $\pi' a'$ se rencontrent, les points a, a'' doivent être en ligne droite avec le point p où la droite $\pi\pi'$ rencontre le plan P; donc le lieu du point a, ou la perspective de la courbe gauche sur le plan, l'œil étant en π, est la courbe P relative au point p (34), lieu des intersections des droites qui passent par p considérées comme appartenant à la troisième figure avec les courbes correspondantes d'ordre n de la première.

Enfin, en appliquant à la courbe gauche les formules connues de Cayley [1], on trouve :

1° Qu'elle a $16(n-1)$ points d'inflexion (points ou le plan osculateur est stationnaire);

2° Que ses tangentes forment une développable de l'ordre $4n$, de la classe $3(3n-2)$, douée d'une courbe nodale de l'ordre $8n(n-1)$;

3° Que ses plans bitangents enveloppent une développable de la classe $8(n-1)^2$;

4° Que $\frac{1}{2}(n^2-n+2)$ cordes de la courbe passent par un point quelconque de l'espace;

5° Qu'un plan quelconque renferme $\frac{1}{2}(81n^2-169n+90)$ tangentes doubles de la développable osculatrice, etc.

Enfin la courbe gauche est du genre $n-1$.

Les transformations géométriques des figures planes ont été étudiées par plusieurs géomètres depuis les travaux de M. Cremona; il convient de citer d'une manière particulière un beau théorème, dû à M. Max Nöther, dont voici l'énoncé : « Toute transformation birationnelle d'ordre n des figures planes est décomposable en transformations du second ordre. »

---

[1] *Journal de Liouville*, t. X, p. 245.

Liste des Mémoires sur les transformations géométriques des figures planes postérieurs à ceux de M. Cremona.

Cayley. — A Memoir on the rational Transformation between two spaces (*Proceedings of the London Mathem. Society*, vol. III, 1870, p. 136).

Nöther. — Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen (*Mathem. Annalen*, t. III, 1870, p. 164).

Rosanes. — Ueber diejenigen rationalen Substitutionen, welche eine rationale Umkehrung zulassen (*Journal de Crelle-Borchardt*, t. 73, 1871).

Clebsch. — Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen (*Mathem. Annalen*, t. IV, 1871, p. 490).

Nöther. — Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen (*Mathem. Annalen*, t. V, 1872, p. 635).

Samuel Roberts. — On Professor Cremona's Transformation between two planes... (*Proceedings of the London Mathem. Society*, vol. IV, 121, année 1872).

28 juin 1873.

Ed. Dewulf.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Maury (F.) — Manual of Geography. A complete Treatise on Mathematical, Civil, and Physical Geography. New-York, University Publishing Company.

Proctor (R.-A.). — A new Star Atlas. London; Longmans, Green and Co. 1872, crown 8vo. 5 sh.

Stubbs (J.-W.) and Brünnow (F.). — Brinkley's Astronomy; 307 p. Dublin; Hodges, Foster and Co. 1871.

Williamson (B.), Fellow and Tutor of Trinity College, Dublin. — An Elementary Treatise on the Differential Calculus, containing the Theory of Plane Curves, with numerous Examples. In-8°, 342 p. London; Longmans, Green and Co. 1872.

Wilson (J.-M.). — Solid Geometry and Conic Sections. 12mo. 3 sh. 6 d.

N (Sir W.) — PAPERS ON ELECTROSTATICS AND MAGNETISM. London, llan & Co., 1872 (Paris, Gauthier-Villars. Prix : 24 fr. 25) ([1]).

iéorie de l'électricité et celle du magnétisme, méthodique-xposées depuis la description des expériences les plus sim-squ'à la discussion des hypothèses les plus hardies, est une de grande importance. Le nom justement célèbre de l'auteur entreprise ajoute à l'intérêt de cette publication, dont le *Jour-* *Savants* doit l'annonce à ses lecteurs.

liverses parties de la grande théorie que M. Maxwell a voulu r ont donné lieu, depuis un siècle, à d'admirables travaux. yse mathématique, appliquée à chaque groupe de questions, our chacun d'eux, rattacher tous les faits à des principes que l'on aurait sans doute acceptés comme certains, s'ils t pu se fondre et s'accorder entre eux. Malheureusement les ves produites sont loin d'avoir atteint ce but difficile, et nous montré, dans un article du *Journal des Savants,* jusqu'où, terrain dangereux, des savants illustres ont poussé l'oubli de ieur et de la précision. Leurs recherches signalent dans la e une lacune qu'elles ne comblent pas; de là d'insurmon-difficultés pour l'auteur d'un Livre tel que celui de M. Maxwell, ient, en effet, exposer dogmatiquement une Science qui n'est ite? La seule prétention du plus hardi doit être de montrer et parer le terrain, et cela peut suffire au succès d'un Livre. de M. Maxwell, avidement accueilli sur le Continent aussi u'en Angleterre, rendra certainement à la Science un service sellement apprécié, et les difficultés mêmes que suggère sa

dant il ne s'est borné au rôle de copiste ou d'abréviateur. Il imprime aux théories qu'il expose un cachet original et uniforme; et si, après l'avoir étudié, on doit encore consulter avec profit les inventeurs auxquels il renvoie lui-même, il est juste d'ajouter que le lecteur le plus familier avec ces difficiles études rencontrera dans son Livre, sur les points qu'il connaît le mieux, avec des rapprochements lumineux et imprévus, des résultats importants et nouveaux.

Ce que M. Maxwell a fait pour Ampère, Poisson, Green, Neumann, sir W. Thomson, et autres créateurs illustres de la théorie de l'électricité, il ne s'offensera pas qu'on soit tenté de le faire pour chaque Chapitre de son Ouvrage : c'est un reproche et une louange à la fois; mais l'un s'adresse à l'état actuel de la Science, c'est à l'auteur lui-même qu'il est juste de renvoyer l'autre.

M. Maxwell cherche avec ardeur et invente avec hardiesse. Le lecteur qui, dans un Traité didactique, exigerait la perfection classique, la rigueur des définitions, l'enchainement sévère des conséquences et le rejet de toute conjecture hasardée, pourra, presque à chaque page, élever de sérieuses objections; la critique sur de tels sujets est, en effet, inséparable de l'étude, et M. Maxwell le sait trop bien pour s'étonner que, même dans la revue rapide d'une partie seulement de son Ouvrage, la plus grande part soit faite aux difficultés et au doute. Si, moins désireux d'être utile au lecteur, nous avions cherché seulement l'occasion de louer avec justice, la tâche eût été plus facile et l'article plus long.

Nous commencerons par un reproche qui n'a rien de grave, et qu'une connaissance plus complète des habitudes de l'enseignement en Angleterre nous conduirait peut-être à atténuer encore. L'Ouvrage de M. Maxwell suppose chez le lecteur une connaissance approfondie des Mathématiques: c'est une nécessité du sujet. Pourquoi alors, en s'adressant aux géomètres, qui seuls peuvent le lire, leur rappeler, dans une courte introduction, des principes et des règles qu'ils ne peuvent ignorer? Le style rapide et bref, inévitable dans une telle revue, peut causer une certaine défiance; faudra-t-il, dans la suite du Livre, continuer à comprendre à demi-mot? La crainte, malheureusement fondée, est justifiée dans plus d'un passage.

La définition et la dépendance des diverses unités sont rapportées

début du premier Chapitre. M. Maxwell les déduit toutes de lles de longueur, de temps et de masse; à la dernière, nous substituons habituellement celle de force. Peu importe, puisque nous mettons comme lui que l'unité de force, appliquée à l'unité de asse, produit l'unité d'accélération; il y a cependant une erreur fait à dire qu'en France l'unité de masse est celle d'un kiloamme. Le kilogramme est pour nous l'unité de force.

Une telle inadvertance est insignifiante; mais, pour faire comendre la portée du reproche que nous adressons à l'auteur, nous gnalerons surtout, à la fin de l'Introduction, le paragraphe [25] : *n the effect of the operator* ∇ *on a vector function,* qui, en exiant du lecteur la théorie fort peu répandue d'Hamilton sur les uaternions, indique l'extension de ce signe au cas où la fonction à quelle on l'applique est du genre des grandeurs que l'auteur omme *vector*, c'est-à-dire quand elle est en chaque point définie n grandeur et en direction. Peu de lecteurs, je crois, pourront pprendre dans le Livre de M. Maxwell la signification qu'il atiche, dans ce cas, au signe $\nabla\varphi$, et n'y trouveront pas même l'indiition précise du passage auquel il faut recourir, dans les huit cents ages du Livre d'Hamilton.

Avant de commencer par lui-même l'étude théorique de l'électrité, le savant auteur a voulu, il nous l'apprend dans sa Préface, udier les belles recherches expérimentales de Faraday, qui sont stées, sur presque tous les points, son appui et son guide : « Before I began the study of electricity, I resolved to read no mathematics on the subject, till I had first read through Faraday's experimental researches. »

L'expérience, assurément, doit être la base de toute théorie, et n peut même, Faraday l'a prouvé, obtenir, par son seul secours, s résultats aussi admirables qu'imprévus, des théorèmes aussi féonds que précis. Il n'en est pas moins vrai qu'une théorie mathéatique dans laquelle l'expérience intervient ne saurait être parfaite définitive; tous les faits connus, cela va sans dire, doivent s'acrder avec les conséquences des principes, et le moindre d'entre x peut renverser une théorie, s'il est prouvé qu'il lui soit formelnent contraire; mais, dans l'enchaînement des conséquences, le sonnement seul doit intervenir. La loi des attractions astronomies repose sur l'observation; mais, une fois admise, elle doit seule

régir tous les détails, et, si exactes que soient les Tables d'une planète, la théorie n'est pas considérée comme faite lorsque l'observation intervient pour les corriger. La théorie de l'électricité statique, créée par Coulomb, a atteint, grâce aux travaux de Poisson, de George Green et de W. Thomson, une perfection presque égale. Les fluides électriques se meuvent librement dans les conducteurs métalliques, dont chaque molécule renferme des réservoirs inépuisables et égaux de l'un et de l'autre. Les molécules d'un même fluide se repoussent en raison inverse du carré de la distance, et attirent, suivant la même loi, celles de nom contraire : tels sont les seuls principes sur lesquels repose aujourd'hui l'admirable théorie de l'électricité statique ; ils permettent de prévoir et d'expliquer tous les faits connus, jusque dans leurs plus minutieux détails ; un professeur aussi éminent que M. Maxwell ne l'ignore pas assurément, et, cependant, si nous l'avons rappelé, c'est qu'il n'a pas jugé utile de l'apprendre à ses lecteurs.

Entrons dans le détail. Le premier des Chapitres relatifs à l'électricité statique rapporte d'admirables expériences de Faraday, dont la réunion forme une théorie expérimentale très-nette et à peu près complète, qui résout plusieurs beaux problèmes, devant lesquels sans doute les plus éminents disciples de Coulomb auraient reculé ; mais ces expériences, Poisson, Green et M. Thomson l'ont montré depuis longtemps, n'en sont pas moins les conséquences nécessaires de la théorie admise, dont elles forment une confirmation nouvelle. Pourquoi M. Maxwell les présente-t-il comme des lois indépendantes, incontestables, puisque l'expérience les démontre, et qui lui servent d'auxiliaires dans les démonstrations ? C'est que, par un sentiment d'admiration fort respectable, il s'efforce d'admettre la théorie de son illustre compatriote, en repoussant les principes simples et féconds que nous venons de rappeler. M. Maxwell s'efforce, disons-nous, d'adopter les hypothèses de Faraday ; malgré sa science, en effet, et sa très-grande habileté d'analyste, les principes proposés sont trop vagues pour qu'il en puisse faire sortir une théorie précise. L'action, suivant Faraday, ne s'exerce pas à distance, les molécules contiguës agissent seules, et les corps non conducteurs, qu'il nomme *diélectriques,* transmettent les actions suivant des lignes de force qui, en général, ne sont pas droites, à peu près comme une corde, par l'intermédiaire de poulies, transmet

action d'un poids suspendu à son extrémité. Le milieu, dans la irection de ces lignes, éprouve une tension et, dans la direction erpendiculaire, c'est une pression qui s'exerce, comme si chaque gne de force repoussait les voisines. On ne dit pas comment le ıilieu diélectrique doit agir pour transmettre à la fois, quand il y a ieu, dans la même direction, des attractions et des répulsions. De elles hypothèses, qu'elles soient ou non exactes, manquent évidemment de la précision nécessaire pour servir à la solution mathématique du moindre problème; l'introduction du potentiel qui figure dans les raisonnements de M. Maxwell ne s'y rattache ni directement ni indirectement. Le potentiel, c'est la définition adoptée, est le travail qu'il faut exercer sur une molécule pour l'amener d'une distance infinie à sa position actuelle; mais, si les actions ne s'exercent pas à distance, si les forces ne varient pas suivant la distance à des centres fixes ou mobiles, pourquoi le potentiel ainsi défini est-il indépendant de la route suivie par la molécule? Pourquoi satisfait-il à l'équation $\nabla V = 0$? Pourquoi, dans l'intérieur d'un milieu diélectrique, la valeur ∇V est-elle proportionnelle à la densité? M. Maxwell, en traitant ces questions, parle et raisonne comme s'il admettait la loi de Coulomb, et l'on pourrait citer non-seulement des pages, mais des Chapitres entiers qui n'auraient sans cela aucun sens.

Les diverses parties de la théorie de l'électricité sont malheureusement trop indépendantes les unes des autres pour qu'un lecteur empressé de prendre connaissance du Livre croie nécessaire de commencer par le premier Chapitre. Si, désireux d'étudier d'abord l'électricité dynamique, il ouvre le premier Volume à la page 259, il éprouvera quelque surprise en lisant [246] : « Si nous définissons le potentiel d'un vaisseau conducteur creux comme étant » celui de l'air intérieur au vaisseau, nous pourrons déterminer le » potentiel par le moyen d'un électromètre. »

La considération du potentiel étant notoirement la base des plus beaux travaux accomplis, depuis trente ans, sur les théories exposées dans le premier Volume, comment se fait-il qu'à la page 259 on ait conservé le droit de le définir, et que la définition paraisse assez indifférente pour qu'on en laisse en quelque sorte le choix au lecteur? La définition s'accorde, il est vrai, avec celle qui a été proposée au début du Livre, mais à la condition que le vase soit com-

plétement fermé; le théorème, d'ailleurs, devrait être démontré et non admis à titre de définition.

Sur un terrain aussi mal défini, on ne saurait marcher avec fermeté, et, si nous avons le droit et le devoir de signaler le Livre de M. Maxwell comme très-utile et très-remarquable, c'est que, par une heureuse contradiction, l'hypothèse des lignes de force, agissant par leur tension, que l'auteur veut admettre, n'y joue en réalité qu'un très-petit rôle.

La théorie ordinaire a été, il faut l'avouer, fortement ébranlée par une difficulté qui a conduit Faraday à l'abandonner; mais rien ne prouve qu'une étude plus approfondie, une hypothèse nouvelle adjointe et non substituée à celle de Coulomb ne permettront pas de tout concilier. Les beaux travaux de M. Gaugain, en faisant intervenir un élément nouveau, la durée des préparatifs d'une expérience, atténuent déjà considérablement les difficultés produites par les expériences de Faraday.

Quand deux lames conductrices sont séparées par un milieu isolant, l'une d'elles étant en communication avec une source électrique, l'autre avec le sol, des couches électriques de sens contraire s'accumulent sur les deux surfaces qui touchent la lame isolante, et la théorie de Coulomb, en expliquant le phénomène, permet d'en calculer le détail. Dans cette théorie, les propriétés spécifiques de la substance qui sépare les armatures ne jouent malheureusement aucun rôle; elle est considérée comme une barrière infranchissable à l'électricité, et qu'elle soit de verre, de gutta-percha, de résine ou d'air, cela ne change rien aux formules. Faraday, par des expériences répétées, a montré l'importance de cet élément négligé avant lui. La théorie qui n'en tient pas compte est donc incomplète; faut-il, pour cela, tout changer? Si la substance isolante ou diélectrique exerce une influence sur la charge d'une bouteille de Leyde, elle doit subir l'action de l'électricité sur laquelle elle réagit; les molécules qui ne conduisent pas l'électricité sont donc influencées (polarisées) par elle. C'est une circonstance nouvelle dont il faut tenir compte, une difficulté de plus dans le problème; mais ne suffit-il pas d'admettre, comme l'ont fait divers savants, que chaque molécule non conductrice se comporte comme une molécule magnétique dans laquelle les fluides se séparent, sans pouvoir la quitter et charger les molécules voisines?

Un savant italien, Mossotti, a suivi cette indication et, en adopnt les méthodes de Poisson dans ses *Études sur le magnétisme,* a produit, sur la théorie des substances diélectriques, des calculs ouvent cités depuis. La lecture de son Mémoire, inséré, en 1846, ans le tome XXIV des *Mémoires de la Société Italienne* siégeant Modène, peut produire une certaine surprise; les conclusions de 'auteur sont, en effet, sans qu'il le dise explicitement, en désaccord complet avec Faraday, et son Mémoire serait, par conséquent, la condamnation du principe qui y est admis. Mossotti ne trouve, en effet, aucune influence aux molécules polarisées. Il introduit dans ses formules les termes qui résultent de leur action; mais il trouve que ces termes se détruisent à la fin, et il ne faut pas même affirmer, comme il le fait, que, d'après son analyse, la polarisation les molécules diélectriques transmet l'action des couches électrisées our produire l'action à distance. Une telle transmission ne résulte ullement de la théorie de Mossotti; les molécules électriques, dans on calcul, sont supposées agir à distance, comme dans la théorie e Coulomb; à cette action, il adjoint celle des atmosphères éleciques polarisées dans l'intérieur du corps isolant et il croit prouer que les termes introduits par elle se détruisent; il doit donc ffirmer que cette polarisation n'agit pas, non qu'elle soit la cause t l'origine des actions qui subsistent et qui ont été admises *a priori,* ndépendamment de toute hypothèse sur la composition du milieu iélectrique.

M. Maxwell, qui n'entre, à ce sujet, dans aucun détail, dit : « Thus Mossotti has deduced the mathematical theory of dielectrics » from the ordinary theory of attraction. » Il ne semble pas que la lecture du Mémoire de Mossotti puisse justifier cette appréciation.

M. Thomson traite rapidement cette importante question (*Papers on Electrostatics,* p. 23 à 37). Ses conclusions s'accordent avec les expériences de Faraday; la présence d'un milieu diélectrique, sans changer la loi des phénomènes, multiplie la densité sur chaque surface par un facteur spécifique variable d'une substance à l'autre. Malgré toute la confiance que doit inspirer une assertion de sir W. Thomson, il est impossible de ne pas remarquer que, d'après la déclaration même de l'illustre géomètre de Glasgow, c'est à Poisson qu'il emprunte sa démonstration, et Poisson, dans ses Mémoires sur le magnétisme, s'est trop notoirement

écarté de la rigueur pour que l'on puisse accepter, sans une sévère révision, les résultats ou les conséquences déduits de ses principes. Dans son premier Mémoire, par exemple, en considérant un corps magnétique comme composé de molécules recouvertes chacune des fluides boréal et austral en quantités égales, Poisson, dans le calcul de l'action exercée sur un point intérieur à l'une d'elles, croit pouvoir négliger les effets des molécules voisines ! C'est le calcul ainsi simplifié par la suppression de la partie la plus difficile à évaluer dans les intégrales qui le conduit à affirmer, pour les molécules, une loi de polarisation qui sert de base aux démonstrations ultérieures; chaque molécule doit agir sur les points de son intérieur avec une force constante en intensité et en direction, et sur les points éloignés comme une aiguille aimantée infiniment courte, dirigée dans le sens de cette action intérieure; une telle aiguille peut être remplacée par trois composantes α, β, γ, c'est-à-dire par trois aiguilles parallèles aux axes dont les moments sont les projections de celui de l'aiguille résultante. Poisson affirme et croit démontrer que ces composantes satisfont nécessairement à l'équation qui défini la distribution nommée, par M. Thomson, *solénoïdale*. Il en résulte que l'action du magnétisme sur un point extérieur est identique à celle d'une couche infiniment mince qui recouvrirait la surface; mais cette conclusion, qui joue un rôle capital dans la théorie, est subordonnée à l'exactitude de l'équation qui exprime l'état solénoïdal, et dont la démonstration suppose que l'on néglige dans l'étude de chaque molécule, l'action de celles qui sont voisines

Il peut sembler injuste d'insister, en critiquant un auteur, sur une erreur que lui-même a reconnue et signalée; mais la déclaration expresse de Poisson, insérée dans un Mémoire postérieur, est loin d'être suffisante; il semble, en effet, en la lisant, qu'il rectifie un détail dans l'énoncé duquel une inadvertance a été commise, et non qu'il condamne, sans y rien substituer, la base de toute son analyse Tout repose, en effet, sur ce principe que la couche de fluide qui recouvre une molécule exerce sur les points intérieurs une action constante de grandeur et de direction. Cette action, remarquons-le doit être d'intensité finie; il en sera donc de même de l'action exercée sur les points extérieurs infiniment voisins, et ce sont ces actions finies, en nombre infini, que l'on veut négliger, en alléguant une compensation fortuite qui doit s'établir entre elles ! On doit re-

marquer que, en considérant deux molécules placées, de part et d'autre d'une troisième, suivant la même ligne droite, leurs actions sur un point de la molécule intermédiaire s'ajoutent et ne se retranchent pas. Supposons, en effet, une ligne verticale de molécules, et la polarisation telle que le fluide positif soit concentré vers le bas de chacune d'elles et le fluide négatif vers le haut; considérons un point intérieur de l'une d'elles; l'action sur une molécule positive placée en ce point sera dirigée vers le bas, et égale à la *somme* des actions séparées de toutes les molécules placées au-dessus ou au-dessous d'elle. Les premières, en effet, repousseront la molécule considérée, et les secondes l'attireront de manière à agir toutes dans le même sens; on n'a donc aucun droit de négliger ces actions. Il est impossible de ne pas ajouter que, en acceptant ces principes, on retrouve aisément les résultats annoncés par M. Thomson, qui découlent, comme il le déclare, de l'analyse de Poisson, dont il semble difficile de ne pas faire peser sur eux les intolérables licences.

Peut-être ne jugera-t-on pas absolument inutile d'insister sur un point aussi important, qui n'a pas attiré l'attention de tous les auteurs qui ont reproduit le travail de Poisson. Citons particulièrement l'Ouvrage justement classique de M. Lamont : *Handbuch des Magnetismus* (*Allgemeine Encyclopädie der Physik,* XV. Band, Leipzig, 1867). On y trouve (p. 165) la théorie de Poisson reproduite, avec l'assertion, sans laquelle il serait d'ailleurs impossible de l'exposer, qu'il est permis de négliger sur une molécule l'action de toutes celles qui en sont voisines : « Weil sie sämmtlich nach » gleicher Richtung magnetisirt sind und bezüglich entgegengesetzte Lagen haben, sich aufheben müssen..., so bleibt in dem » ganzen kugelförmigen Raum nur die Anziehung desjenigen Moleculs, in welchem der Punct P sich befindet, zu berücksichtigen » übrig. »

M. Maxwell lui-même, sans se prononcer sur la démonstration de Poisson, en accepte le résultat, qu'il cherche à établir par une voie différente. C'est au Chapitre II du second Volume, *Magnetic force and magnetic induction,* qu'est proposée cette méthode, complétement inacceptable suivant moi. La définition même de l'induction magnétique doit exciter tout d'abord la défiance d'un lecteur attentif. Pour définir, en effet, l'action magnétique d'un aimant sur un point de la masse, l'auteur suppose ce point placé

dans l'intérieur d'une cavité infiniment petite, obtenue en enlevan toute la substance magnétique qui s'y trouvait, et, après avoir con staté l'indétermination qui résulte du choix arbitraire adopté pou la cavité, il choisit, sans donner de raison, une hypothèse partici lière, celle d'un cylindre infiniment mince par rapport au rayc infiniment petit de ses bases, et dont l'axe est dans le sens de *magnétisation*, et c'est l'action dans l'intérieur de ce cylindre su posé enlevé et sur un point de son axe qu'il nomme l'*inducti magnétique en un point*. L'*induction magnétique* à travers u surface est définie ensuite comme une intégrale dont la significati physique, liée d'ailleurs à la définition précédente, serait fort arb traire, et, quoique la liberté des définitions soit un principe inco testable, on éprouve, tout d'abord, une certaine inquiétude en voyant faire un tel usage.

Pour calculer l'induction magnétique à travers une surface fe mée, l'auteur fait ensuite intervenir, comme éléments essentiels son raisonnement, les considérations des molécules coupées par surface considérée, et il admet que le magnétisme y soit telleme distribué que, toute la charge de fluide boréal, par exemple, resta intérieure à la surface, celle du fluide austral lui soit extérieu transformant ainsi en une réalité la fiction légitime, quand il s'a de l'action, à distance, de la concentration des fluides en de points appelés *pôles*. Une telle hardiesse suffirait pour enlever to crédit à la démonstration; mais il y a plus : après avoir prouvé ai que l'induction totale sur une surface fermée est nulle, l'auteur plique sa formule à un parallélépipède infiniment petit! de so que c'est ce parallélépipède dont la surface doit couper des mo cules en deux parties, dont l'une contient tout le fluide austra l'autre tout le fluide boréal! Que de difficultés d'ailleurs dans différentiation de ces quantités désignées par a, b, c, et qui rés tent de l'action des molécules dont chacune, prise isolément, exe sur les points infiniment voisins *une action finie* pouvant, d l'intérieur d'une molécule infiniment petite, recevoir des variati finies, et qui changent brusquement quand on passe de l'intéri d'une molécule à l'extérieur! Ces difficultés, qui s'opposent à la c clusion présentée au paragraphe [403], exigeraient une longue cussion; le paragraphe a en tout huit lignes de texte, et les six d nières sont consacrées à l'énoncé de la *Conclusion*.

L'hypothèse d'un milieu composé de couches sphériques homogènes apporte dans les calculs une simplicité qui permet d'en déduire les dernières conséquences. Considérons donc une bouteille de Leyde sphérique, les deux armatures étant métalliques et le milieu qui les sépare composé de couches concentriques alternativement conductrices et imperméables à l'électricité, en même temps qu'insensibles à son action; nous aurons une représentation approximative de l'hypothèse acceptée par sir W. Thomson, qui assimile un milieu diélectrique à une série de petits corps conducteurs noyés dans une substance non conductrice qui les sépare et les isole.

En admettant que l'armature intérieure communique avec une source dont le potentiel soit V, et l'armature extérieure avec le réservoir commun, on trouve aisément que des quantités égales d'électricité de sens contraire doivent charger les deux armatures, que chaque couche intermédiaire doit avoir sur chacune de ces deux faces une charge égale et contraire à celle de l'armature la plus voisine, et que cette charge constante est égale à la charge qui correspond à l'hypothèse d'un milieu isolant complétement inerte, multipliée par un facteur qui dépend du rapport de l'épaisseur des couches conductrices à celle des couches isolantes dans le milieu diélectrique fictivement accepté.

M. Maxwell ne traite cette question que pour s'efforcer d'en déduire la loi des tensions suivant les lignes de force du milieu diélectrique et des pressions qui, conformément aux vues de Faraday, s'établissent perpendiculairement. L'électricité, suivant lui, n'agit pas à distance, et, si nous constatons l'action mutuelle de deux conducteurs séparés par une couche diélectrique, c'est que, dans l'intérieur de la couche, s'établissent des *lignes de force,* sorte de filets continus dont la tension transmet la force. C'est là, d'après la déclaration plusieurs fois répétée de l'éminent professeur, l'idée principale qu'il a voulu mettre en lumière et dont la traduction mathématique est le but essentiel de son Livre : « It is mainly with the » hope of making these ideas the basis of a mathematical method » that I have undertaken this Treatise. » (Tome II, page 163.)

« Nous sommes habitués, dit-il, à considérer l'univers comme » formé de parties, et les mathématiciens commencent par considérer une molécule isolée, dont ils considèrent la relation à une

» autre molécule, et ainsi de suite. On a généralement considéré
» cette méthode comme la plus naturelle. La considération d'une
» molécule, cependant, n'est qu'une abstraction, puisque toutes
» nos perceptions sont relatives à des corps étendus, de telle sorte
» que l'idée d'un tout est peut-être pour nous aussi primitive que
» celle d'un objet individuel. Il peut donc exister une méthode
» mathématique dans laquelle nous procédions du tout à la partie,
» au lieu de remonter de la partie au tout. Par exemple, Euclide,
» dans son premier Livre, conçoit une ligne comme tracée par un
» point, une surface par une ligne, et un solide comme engendré
» par une surface; mais il définit aussi une surface comme la limite
» d'un solide, la ligne comme celle d'une surface et le point
» comme l'extrémité de la ligne.

» Nous pouvons, de même, considérer le potentiel d'un système
» matériel comme une fonction trouvée par un certain procédé
» d'intégration, en ayant égard aux masses des corps, ou partir, au
» contraire, du potentiel en considérant les masses elles-mêmes
» comme n'ayant pas d'autre signification mathématique que
» $\frac{1}{4\pi}\nabla^2\psi$, où ψ est le potentiel. Dans les recherches électriques,
» nous pouvons employer des formules où figurent les distances de
» certains corps et les électrisations des courants dans ces corps,
» ou leur substituer des fonctions continues dont la valeur existe
» en chaque point de l'espace. Le procédé mathématique dans la
» première méthode est l'intégration le long d'une ligne, sur une
» surface ou dans l'intérieur d'un espace fini; celui qui convient
» au second est la considération d'équations différentielles partielles
» et l'intégration dans l'espace entier.

» La théorie de Faraday semble liée intimement à la seconde de
» ces méthodes; il ne considère jamais les corps comme existant
» isolément sans autre relation que leur distance et agissant sui-
» vant une fonction de cette distance. L'espace entier est pour lui
» un champ de force où les lignes de force sont, en général, curvi-
» lignes; chaque corps en émettant de tous côtés et leur direction
» étant modifiée par la présence d'autres corps, il parle souvent des
» lignes de force qui appartiennent à un corps comme faisant en
» quelque sorte partie du corps même, de telle sorte que, dans son
» action sur les points éloignés, il n'agit cependant qu'au lieu où

il se trouve; mais cette idée n'est pas dominante chez Faraday; je pense plutôt que, suivant lui, l'espace entier est rempli par des lignes de force, dont l'arrangement dépend de celui des corps eux-mêmes, et que l'action sur chaque corps est déterminée par les lignes qui y aboutissent. »

Telles sont les hypothèses auxquelles M. Maxwell s'efforce de donner l'appui et la consécration d'une étude mathématique; mais l'existence supposée d'une tension dans un sens et d'une pression dans le sens perpendiculaire ne saurait ni constituer une théorie ni lui servir de base. La force est pour les mécaniciens la cause nécessaire des phénomènes, et la science du mouvement est trop avancée aujourd'hui et trop parfaite pour qu'on puisse accueillir autrement que comme un pas rétrograde toute tentative qui poserait comme loi primordiale la répartition des tensions au sein d'un milieu continu ou l'expression d'un potentiel dans l'espace. De tels essais, lors même qu'on parviendrait à les constituer logiquement, sans hypothèses surabondantes, laisseraient subsister chez les géomètres le désir, j'oserai dire le besoin, de découvrir les forces qui servent de ressort et de moteur.

Ces objections générales ne sont pas les seules qui s'élèvent, et le Chapitre consacré à la théorie de Faraday laisse, en dehors du principe même, subsister bien des obscurités. L'emploi des formules obtenues par la théorie des actions à distance y semble une hardiesse inexplicable. C'est ainsi que la célèbre équation de Poisson, qui lie la densité au potentiel, se trouve, dit-on, *transformée* dans la théorie nouvelle. On se demande, non la preuve, mais le sens même d'une telle assertion. La démonstration de la formule, telle qu'elle est donnée quelques pages plus haut, ne suppose aucune hypothèse sur la nature du fluide et ne peut être influencée par aucune; mais elle exige l'existence d'une action inversement proportionnelle au carré de la distance, et à laquelle aucune autre ne peut s'adjoindre sans renverser toute la démonstration; comment une telle formule peut-elle être *modifiée* par l'adoption d'une hypothèse qui, supprimant l'action à distance, fait disparaître toutes les bases de la démonstration?

Nous pourrions, aux remarques précédentes, en joindre plus d'une de même nature; mais, sans cesser d'être exacte, je le crois, une telle insistance sur les conséquences d'une situation acceptée

et voulue par l'auteur aurait quelque apparence d'injustice envers un Livre qui, dans son ensemble, fait honneur à son auteur et à la Science anglaise.

La théorie des harmoniques sphériques est présentée élégamment, sous une forme très-bien appropriée aux théories auxquelles on veut l'appliquer, et conduit à l'étude difficile et célèbre des fonctions nommées Y_n.

M. Maxwell la fait naître ingénieusement de l'examen même des phénomènes physiques, et la théorie qu'il en propose sera, pour un grand nombre d'esprits, une satisfaction et un progrès. La théorie des images, créée par M. W. Thomson, est expliquée avec grands détails, et quelques-unes des explications sont d'une rare élégance. On sait combien Poisson a dû déployer d'habileté pour calculer la loi de la distribution électrique sur deux sphères en présence; on trouvera dans le Livre de M. Maxwell, pour le cas des deux sphères se coupant à angle droit, lorsque, bien entendu, on a enlevé à chacune les parties intérieures à l'autre, une solution simple qui donne en chaque point la densité sur forme finie. L'auteur, je me permets de lui adresser encore ce reproche, n'indique pas bien clairement comment la solution découle de ces principes; mais elle est exacte, comme on le vérifie aisément, et restera parmi les résultats les plus élégants acquis jusqu'ici à l'un des plus beaux chapitres de la Physique mathématique.

L'Ouvrage de M. Maxwell est non-seulement un Traité d'Électricité statique, mais du Galvanisme et du Magnétisme; il n'est pas de ceux qu'on puisse juger et lire rapidement. Nous reviendrons sur les autres Parties, mais aujourd'hui, sans sortir du même sujet, nous devons appeler l'attention sur le très-important Ouvrage de M. W. Thomson, dont le titre est inscrit en tête de cet Article.

M. Thomson réunit maintenant, presque sans y rien changer, les opuscules publiés par lui sur la théorie de l'électricité, et dont l'abondante collection, depuis plus de trente ans, lui a valu, dans tous les pays où la Science est en honneur, l'estime et l'admiration des géomètres et des physiciens. Sa théorie de l'électricité statique, réduite à des principes élémentaires, est un vrai chef-d'œuvre d'invention et d'exposition à la fois. Les détails en sont, depuis longtemps, devenus classiques, et aucun maître, en enseignant la théorie de l'électricité, ne peut se dispenser de consulter la collection, de-

ıue rare aujourd'hui, qui la contenait. La lecture en deviendra ıs accessible, sans que la théorie puisse être plus connue et mieux préciée.

Plus d'une promesse inscrite dans les premiers écrits de M. Thomn paraissait depuis longtemps oubliée. Le Volume nouvellement ıblié en acquitte quelques-unes. La plus précieuse, sans doute, t la loi de distribution électrique sur une calotte sphérique isolée. e résultat, annoncé en 1843, comme conséquence facile du prinpe des images et malgré l'indication exacte du point de départ, ait resté comme une énigme pour les géomètres, qui, après avoir dmiré l'élégance du principe, trouveront encore de l'étonnement our la rare habileté avec laquelle sont surmontés les obstacles qui pparaissent dès les premiers pas.

Les travaux inédits, on le regrettera, sont fort rares dans le Voume de M. Thomson. J'en signalerai un seulement dont les conlusions me semblent contestables. Il s'agit d'un principe invoqué ouvent depuis une vingtaine d'années, et dont le savant physicien nglais me semble pousser l'application jusqu'à l'abus. Il ne me délaît pas, d'ailleurs, de terminer cet article en discutant, sans l'acepter, une démonstration de M. Thomson. Peut-être y verra-t-on a preuve que, en critiquant sévèrement son savant compatriote, j'ai pu réserver tout entière mon estime pour son talent et pour l'ensemble de son œuvre. Poisson a composé sur le magnétisme trois Mémoires auxquels, dans cet article même, je crois avoir adressé de très-sérieuses objections. Les calculs reposent sur un lemme essentiel que l'on peut énoncer ainsi : Le fluide, dont la masse totale est nulle, se distribue sur chaque molécule, de telle sorte que son action sur les points intérieurs soit constante de grandeur et de direction. Si l'on désigne par α, β, γ, les composantes de cette force, l'action sur les points extérieurs peut être assimilée à celle de trois iguilles aimantées excessivement petites, parallèles aux axes des coordonnées, et dont les moments magnétiques sont fonctions linéaires de α, β, γ.

Poisson démontre, en outre, en admettant l'absence de toute ientation apparente dans les molécules de la substance, que ces nctions linéaires se réduisent chacune à un terme, et les neuf connıtes à une seule; c'est la base nécessaire de toute son analyse.

M. Thomson, admettant toute cette théorie, sur la démonstration

te actuelle il ne convient pas [illegible] dans les Notes dont je parle, [illegible] ne posséderaient pas les mêmes propriétés sphériques dans toutes les directions, si les molécules ne pourraient pas être considérées comme sphériques.

En considérant une sphère soumise à l'action d'une force magnétique constante, et mobile autour d'un axe passant par son centre, l'éminent géomètre admet, comme condition évidente, que les forces mises en jeu ne peuvent pas produire le mouvement perpétuel.

En admettant les formules de Poisson dans toute leur généralité, l'action du milieu magnétique sur les molécules de la sphère donne naissance à des couples, dont le travail total, pendant une rotation complète de celle-ci, se trouve positif et ne devient nul que si trois équations, tenues dès lors comme nécessaires, sont satisfaites par les coefficients. Les formules dans lesquelles Poisson conserve une seule arbitraire doivent, dans le cas général, en contenir six et non pas neuf.

Un tel raisonnement ne me semble pas acceptable. Le calcul du travail produit par les forces magnétiques suppose, en effet, que, pendant la rotation, les molécules magnétiques prennent instantanément l'arrangement qui correspond à leur état d'équilibre dans la position actuelle du système. Cela ne saurait avoir lieu. Les conditions mécaniques sont changées, et l'expression du travail total ne reste pas la même, si l'on a égard à l'état variable du magnétisme et aux vitesses incessamment acquises par les molécules du fluide.

Quoique l'objection puisse se passer de développement, j'essayerai de la rendre plus claire encore.

Les forces d'attraction vers des centres fixes, lorsqu'elles sont fonctions de la distance, satisfont, quelle que soit cette fonction, à la loi des forces vives, et leur action ne peut, par aucune combinaison, produire un mouvement perpétuel; on pourrait cependant, en imitant le principe de la méthode que je critique, obtenir une condition que la loi d'attraction doit remplir pour rendre impossible le mouvement perpétuel.

Considérons, en effet, le mouvement d'une tige pesante rectiligne mobile dans un plan vertical autour de l'une de ces extrémités supposées fixes, et portant, pendant la rotation, un curseur mobile qui

ut glisser librement sur toute sa longueur. Supposons que ce rseur soit attiré vers un centre fixe placé dans le plan et sur le ımètre horizontal du cercle décrit par la tige; une telle combiison ne réalisera pas le mouvement perpétuel, cela va sans dire, si l'on écrit que le travail produit par la pesanteur et par le ıtre d'action entre deux positions semblables de la tige et du curır est égal à zéro, on obtiendra une identité; mais, si l'on admet ns le calcul que le curseur prenne, à chaque instant, sur la tige, position à laquelle il parviendrait, le frottement aidant, si la tige ıit maintenue dans sa position actuelle, cette manière de calculer nnera, pour le travail développé pendant un tour entier, une pression dans laquelle figurera la fonction qui exprime la loi attraction, et, en écrivant qu'elle est nulle, on obtiendrait une ndition à laquelle, contrairement à l'évidence, cette fonction derait nécessairement satisfaire.

Les procédés d'un esprit inventif sont toujours excellents quand e succès les justifie, et, si la critique rigoureuse a toujours le devoir de discerner les raisonnements qui prouvent de ceux qui ne prouvent pas, c'est, on le comprend, en faisant toute réserve sur le mérite de l'auteur et la juste estime qu'on lui doit. M. Thomson, plus d'une fois, dans ces théories mystérieuses et complexes, s'est écarté de la rigueur géométrique; il serait d'autant plus injuste de le lui reprocher, que lui-même a souvent signalé, de la manière la plus formelle, le point douteux qu'il laisse subsister, la difficulté dont il se débarrasse pour pouvoir passer outre. Nous trouvons, par exemple, dans un Mémoire sur les courants thermo-électriques (*Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, t. XXI, 1854), une découverte physique d'une nature tellement délicate, que les expériences ultérieures ne l'ont ni condamnée ni formellement confirmée, et qui repose sur des hardiesses analogues à celles que nous venons de signaler.

Le raisonnement de M. Thomson, réduit à ses termes les plus imples, repose sur le fait suivant :

Si un cercle métallique est formé de deux parties, de cuivre et de r par exemple, soudées aux extrémités d'un diamètre, et que, une des soudures étant maintenue à la température zéro, on hauffe l'autre graduellement, un courant électrique prendra naissnce, et le cercle métallique agira sur une aiguille aimantée placée

dans le voisinage; c'est la découverte de Seebeck. L'intensité du courant ainsi produit est sensiblement proportionnelle à la différence de température des deux soudures, mais pour de petites différences seulement; car, si, la soudure froide étant maintenue à zéro, on échauffe l'autre de plus en plus, le courant atteint un maximum correspondant à la température de 280 degrés environ, puis il décroît, s'annule vers 500 degrés et change ensuite de direction.

D'un autre côté, Pelletier a montré qu'un courant tel que celui dont nous parlons tend toujours à refroidir la soudure la plus chaude et à réchauffer la plus froide, de telle sorte que, si l'on veut l'entretenir, il faut fournir incessamment de la chaleur à la première et en enlever à la seconde; le courant est donc assimilable à une machine dans laquelle l'effet est produit par le transport de la chaleur qui passe d'un corps chaud à un corps froid. Si, dans le phénomène réel, des circonstances accessoires inévitables ne venaient pas s'adjoindre à celles que nous avons dites, le cercle de Seebeck pourrait être assimilé à une machine thermique, et les principes aujourd'hui si célèbres sur la théorie des machines à vapeur, celui de Sadi Carnot particulièrement, pourraient lui être appliqués. M. Thomson signale très-expressément l'échauffement de tous les points du fil par l'action du courant comme une circonstance contraire aux suppositions faites dans la démonstration du principe; il passe outre cependant, en faisant observer que les conséquences qu'il va obtenir deviennent par là incertaines; l'une de ces conséquences, celle que l'on peut regarder comme la traduction du principe admis, est la proportionnalité du courant à la différence de température des soudures, et l'expérience, malheureusement, est formellement contraire, nous l'avons dit, à un tel résultat.

Considérant alors plus particulièrement le cas où le courant a atteint son intensité maxima, M. Thomson admet que, dans ce cas, en traversant la soudure la plus chaude, il n'y produit aucun effet thermique, et la raison qu'il en donne semble au moins fort plausible : la soudure a acquis, en effet, la température à laquelle correspond la plus grande force électromotrice, et, par conséquent, soit qu'on l'échauffe, soit qu'on la refroidisse, l'intensité du courant diminue; un échauffement, en d'autres termes, ferait naître un courant contraire à celui qui existe, et celui-là doit, par consé-

t, d'après le principe de Pelletier, refroidir la soudure; mais
froidissement produisant le même effet, un courant, de sens
sé à celui qui existe, doit échauffer la soudure; et, comme les
assertions sont contradictoires, il faut admettre qu'à cette
érature l'effet calorifique découvert par Pelletier ne saurait se
uire.

raisonnement n'est qu'une induction, il faut le remarquer, et
u être produit qu'à ce titre. M. Thomson en conclut que le
ant dont une soudure est maintenue à cette température parti-
re présenterait cette propriété paradoxale de réchauffer la sou-
froide sans refroidir la soudure chaude, et donnerait, par con-
ent, en même temps que le travail qu'on peut lui demander,
production de chaleur sans dépense; et c'est pour ne pas
ettre une telle dérogation aux principes incontestés que
Thomson est conduit à annoncer que, dans l'intérieur d'un fil
ogène dont les températures sont inégales, un courant peut
luire du froid.

e raisonnement est ingénieux et hardi; il doit faire grand hon-
r à son auteur, si ses conclusions sont confirmées, mais sans
verser aucun principe dans le cas où elles ne le seraient pas.

I. Maxwell, à qui je reviens, consacre un Chapitre au travail
uis longtemps célèbre de M. Thomson, et s'adresse un peu trop,
me dans plus d'une page de son Livre, à un lecteur déjà fami-
isé avec la question. La base essentielle du raisonnement, en
t, est l'existence d'une température pour laquelle le cuivre et le
sont neutres, en ce sens qu'un courant peut traverser la sou-
e qui les réunit sans produire ni chaleur ni froid. Or les preuves
érimentales ou théoriques d'une assertion aussi importante sont
olument passées sous silence. Après avoir dit qu'à cette tempé-
ure la force électromotrice est maxima, on lit, sans aucune ex-
ation : « A la température de 280 degrés, le fer et le cuivre sont
eutres l'un pour l'autre, et aucun effet réversible n'est produit
la soudure ». Si je cite cette lacune aisée à corriger, c'est que
elles négligences sont trop fréquentes pour qu'il ne soit pas
nis, sinon de les tenir pour volontaires, tout au moins de les
rder comme indifférentes à l'auteur. La question, d'ailleurs,
de grande importance; quand la force électromotrice des deux
aux atteint sa valeur maxima, les deux métaux, à la température

correspondante, sont-ils à l'état neutre? Le raisonnement rapport plus haut prouve seulement qu'un courant infiniment petit ne doit à cette température, ni réchauffer ni refroidir la soudure; mais e est-il de même pour un courant fini? L'expérience serait for difficile, et n'a pas jusqu'ici, à ma connaissance, donné de résultats décisifs. Est-il bien certain, d'ailleurs, comme l'indiqu M. Thomson dans son très-ingénieux Mémoire, que l'effet thermique produit sur la soudure, changeant de signe avec le sens d courant, soit proportionnel à son intensité? Est-il vrai ensuit qu'un courant qui traverse un anneau composé de cuivre et de fe échauffe l'une des soudures précisément autant qu'il refroidi l'autre? La soudure chaude se refroidit et la soudure froide s'échauffe; ces deux effets simultanés tendent à ralentir le courant: ne faut-il pas en conclure qu'il y a en ce moment production d'énergie, puisqu'une partie du courant disparaît et que l'échauffement de la soudure froide doit l'emporter sur le refroidissement de la soudure chaude? Pour étudier le phénomène, il faudrait d'ailleurs faire entrer en ligne de compte l'effet de la conductibilité calorifique et l'échauffement normal proportionnel au carré de l'intensité du courant. On aimerait à rencontrer cette discussion, si délicate qu'elle soit, dans un Traité général sur l'Électricité et le Magnétisme.

J. BERTRAND.

SCHLEUSING (R. VON). — BEITRAG ZUR INTEGRALRECHNUNG, enthaltend die Integration einiger algebraischen und transcendenten Functionen. — Berlin Weidmann'sche Buchhandlung, 1873. Gr. in-4°, 76 p. Prix : $2\frac{2}{3}$ Thlr.

L'auteur a été conduit à composer ce Recueil, en cherchant à former, d'une manière régulière, les coefficients de certaines séries dans le cas où ces coefficients se présentent sous forme d'intégrales L'Ouvrage se compose de deux Sections et d'un Appendice. La première Section donne le développement des intégrales à différentielle algébrique, et des intégrales qui se ramènent immédiatemen à celles-là, telles que

$$\int x^{mn-1}(1-x^n)^p\,dx,\quad \int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}},\quad \int \sin^m v\cos^n v\,dv,\ldots,$$

pour les divers cas de m et de n pairs ou impairs. La seconde Section contient les intégrales à différentielle algébrique et trigonométrique, comprises dans la formule générale

$$\int x^n \cos^m x \sin^p x \, dx.$$

L'Appendice reprend certains cas particuliers, non traités dans ce qui précède. L'exécution typographique de cet Ouvrage mérite des éloges; seulement on y trouve la faute, si commune, qui consiste à remplacer les zéros par des *o* italiques.

GAUSS (F.-G.). — FÜNFSTELLIGE VOLLSTÄNDIGE LOGARITHMISCH-TRIGONOMETRISCHE TAFELN FÜR DECIMALTHEILUNG DES QUADRANTEN. Zum Gebrauche für Schule und Praxis bearbeitet. — Berlin, L. Rauh, 1873 (¹).

Ce Volume est le complément du Recueil dont nous avons déjà rendu compte (²), et nous en avions déjà annoncé la publication, en exprimant d'avance nos regrets de ce que l'auteur adoptât des dénominations qui donnent à la réforme toutes les apparences et tous les inconvénients des demi-mesures. Maintenant, que nous avons le Livre entre les mains, nous ne pouvons que persister dans notre manière de voir. Cet Ouvrage, élaboré et imprimé avec tant de soin, est à nos yeux une entreprise manquée, et nous doutons qu'il contribue à vaincre les préjugés qui militent en faveur de la division traditionnelle du cercle.

Outre la confusion perpétuelle que ne peut pas manquer d'amener la similitude des notations employées à la fois pour les *degrés de la nouvelle division* et pour les *degrés de l'ancienne division,* nous signalerons dans le nouveau Volume, comparé au premier, une infériorité typographique provenant de la disproportion entre la hauteur des pages et la force du caractère employé. Les interlignes trop larges et les chiffres trop maigres fatiguent la vue,

(¹) GAUSS (F.-G.). — *Tables logarithmiques et trigonométriques complètes à cinq figures, pour la division décimale du quadrant; Ouvrage destiné à l'enseignement et à la pratique.* 1 vol. in-8°, 140-XX p. Prix : 2 Thlr.

(²) *Bulletin*, t. III, p. 234.

et la malencontreuse division des lignes en groupes de 1, 3, 3, 3, introduite par M. Bremiker, est loin de contribuer à la clarté.

Malgré ces graves défauts, qu'il eût été si facile d'éviter, les Tables que nous annonçons pourront rendre de grands services aux calculateurs, en attendant que la France, à qui est due l'initiative de la réforme, continue son œuvre et se décide enfin à tirer parti des précieux manuscrits qui dorment, depuis trois quarts de siècle, dans les bibliothèques de l'Observatoire et de l'Institut.

J. H.

GRELLE (Prof. Dr. Fr.). — Leitfaden zu den Vorträgen über höhere Mathematik I. am Königl. Polytechnikum zu Hannover. Manuscript. — Hannover, Riemschneider, 1871. 1 vol. in-8°, 163 p. Prix : 2 Thlr.

Ce résumé contient les éléments du Calcul différentiel et du Calcul intégral, jusqu'à la théorie des équations différentielles exclusivement. Il se divise en trois Parties principales :

I. *Théorie des fonctions explicites d'une seule variable.* — Ce Chapitre comprend la différentiation et l'intégration des fonctions d'une seule variable, avec des applications à la théorie des courbes planes.

II. *Théorie des fonctions explicites de plusieurs variables.* — Dérivées partielles, différentielles totales, théorème de Taylor, maxima et minima, formes indéterminées (cet article aurait pu être omis sans inconvénient pour les fonctions de plusieurs variables), intégration de la différentielle $P dx + Q dy$, intégrales doubles, changement de variables dans ces intégrales.

III. *Théorie des fonctions implicites.* — Différentielles et dérivées, changement des variables indépendantes, maxima et minima relatifs, théorème de Lagrange.

Le Volume est terminé par un *Appendice*, traitant de la résolution des équations numériques et suivie d'une Table des matières détaillée et d'une courte Notice historique sur les diverses méthodes qui ont servi successivement pour l'exposition du Calcul différentiel.

Chaque Chapitre du Livre est suivi d'un Recueil d'exercices.

J. H.

SSANI (Dott. Pietro), professore di Matematica e di Meccanica applicata presso l'Istituto Tecnico di Venezia. — GEOMETRIA RIGOROSA. — Venezia-Trieste-Milano, C. Coen; 1872. 1 vol. in-12.

La Géométrie, comme toutes les sciences concrètes, s'appuie sur n certain nombre de postulats, qu'il ne faut pas chercher à démontrer, parce qu'ils ne sont nullement des vérités nécessaires, ondées exclusivement sur les lois de la raison, mais seulement 'expression scientifique de *faits* reconnus par l'expérience.

L'indication précise de ces postulats sous la forme la plus simple, le rétablissement explicite de ceux qui sont habituellement sous-entendus, la suppression de ceux qui ne sont point primordiaux, c'est-à-dire qui sont des conséquences nécessaires des autres, tel est l'objet de la vraie philosophie géométrique, qui a fait, dans ces derniers temps, de remarquables progrès.

Mais ces progrès n'ont guère été suivis par les auteurs de Traités classiques, qui continuent généralement, soit à admettre des propositions que l'on peut démontrer, soit à sous-entendre certains postulats nécessaires, ou à en remplacer d'autres par des démonstrations vicieuses.

L'auteur du Livre dont nous venons de transcrire le titre a entrepris d'établir les éléments de la Géométrie sur des bases rationnelles, depuis le début jusqu'au point où aucun postulat nouveau n'est plus nécessaire, et où les Traités ordinaires ne laissent plus rien à désirer, en général, sous le rapport de la rigueur.

Son Ouvrage comprend trois Parties principales, respectivement consacrées à la sphère, à la droite et au plan.

L'idée de commencer la Géométrie par l'étude de la sphère n'est pas nouvelle; mais M. Cassani nous paraît avoir fait faire à cette étude un progrès sérieux, en donnant une démonstration simple et ingénieuse de ce théorème, que deux sphères ne peuvent se toucher qu'en des points isolés.

L'auteur, après avoir démontré ensuite que ces points isolés doivent se réduire à un seul, considère la ligne droite, correspondant à deux points donnés, comme le lieu des points de contact des sphères tangentes entre elles, qui ont leur centre en ces deux points. Ce mode de génération nous paraît être le meilleur que l'on puisse adopter. Les autres parties de la « Géométrie rigoureuse »

sont susceptibles, d'après nous, de perfectionnements e temps que de simplifications. Nous essayerons de justifier préciation en publiant prochainement une « Exposition des principes fondamentaux de la Géométrie », dans laqu emprunterons seulement à M. Cassani, outre le plan génér Ouvrage, les deux propositions remarquables que nous avc plus haut. D. T

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ABHANDLUNGEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE DER KÖNIGL ISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN. — Leipzig, S. Hirzel

T. IX; 1863-1871 [2].

HANSEN (P.-A.). — *Suite des recherches géodésiques, c en dix Suppléments au Mémoire « Sur la méthode des carrés en général et son application à la Géodésie. »* (18

Voici les titres de ces Suppléments : 1. Réflexions sur sition et l'exécution d'un réseau de triangles. — 2. Sur la nation de l'erreur moyenne des observations brutes. — 3. sement d'une équation de condition, inconnue jusqu'ici, dans la seconde partie de la compensation d'un réseau de — 4. Sur la manière de traiter les directions superflues qu se rencontrer. — 5. Développement d'un cas particulier, quel les équations à résoudre pour les compensations au peuvent se décomposer en deux ou plusieurs systèmes, en indépendants entre eux. — 6. Établissement des équatio dition dans des cas particuliers, en leur conservant la fo tée constamment dans ce qui précède. — 7. Rectificat légère erreur qui se trouve dans le « Mémoire ». — 8. ($f(r, I_{,}), \ldots$, et des $(I_{,}, M), \ldots$, sans faire usage des $\eta(r$

[1] *Mémoires de la Classe mathématique et physique de la Société royale de Saxe.* — Ces Mémoires paraissent par fascicules à des époques indéter fascicules se vendent séparément à des prix divers.

[2] T. XIV de la Collection générale des *Mémoires*.

- 9. Sur les quantités désignées par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, affectés d'accents.
- 10. Sur le procédé d'observation employé par Gauss dans la me-ure du degré de Hanovre.

HANSEN (P.-A.). — *Développement d'un nouveau procédé mo-ifié pour la compensation d'un réseau de triangles, eu égard articulièrement au cas où certains angles doivent avoir des va-eurs déterminées d'avance.* (103 p.)

HANSEN (P.-A.). — *Supplément au Mémoire intitulé « Re-herches géodésiques », relatif à la réduction des angles d'un triangle sphéroïdique.* (67 p.)

L'auteur avait donné, dans le Mémoire cité, des expressions pour la réduction des angles d'un triangle sphéroïdique où, pour la première fois, l'approximation était poussée jusqu'aux quantités du sixième et du huitième ordre. Ces expressions, suffisantes dans les cas ordinaires, donnaient pour les grands triangles des écarts sensibles par rapport aux valeurs rigoureuses. Depuis, M. Hansen a trouvé une autre expression, présentant la même approximation analytique, et d'une grande simplicité, même sous sa forme générale, et cette nouvelle expression donne des résultats beaucoup plus exacts dans le cas des grands triangles. Le Supplément actuel contient la démonstration de cette formule, dont l'énoncé avait été publié dans les *Comptes rendus de la Société royale de Saxe*, et il donne des exemples de leur application.

HANKEL (W.-G.). — *Recherches d'électricité. Huitième Mémoire sur les propriétés thermo-électriques de la topaze.* (98 p., 4 pl.)

HANSEN (P.-A.). — *Détermination de la parallaxe du Soleil par les passages de Vénus sur le disque solaire, en vue principalement du passage qui doit avoir lieu en 1874.* (98 p., 2 cartes.)

Dans ce Mémoire, l'auteur traite la question des passages de Vénus au moyen des équations, légèrement modifiées, qu'il a développées dans son Mémoire *Sur la Théorie des éclipses de Soleil* (1), publié en 1858. Le calcul rigoureux de la parallaxe du Soleil dépend d'une équation du second degré, très-simple, pouvant s'appli-

---

(1) *Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen* (*Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wiss.*, Band IV).

que indifféremment aux observations d'entrée ou de sortie, et aux mesures de distances des bords ou des centres. L'équation différentielle qui sert à fixer les lieux d'observation les plus favorables pour la détermination de la parallaxe solaire se ramène à une forme d'une grande simplicité. Les observations les plus favorables sont celles pendant lesquelles les centres de Vénus et du Soleil se trouvent dans un même vertical. Le Mémoire est accompagné de deux cartes représentant les circonstances du phénomène dans chacun des deux hémisphères boréal et austral.

T. X, 1871.

Weber (W.). — *Déterminations de mesures électrodynamiques; en particulier, sur le principe de la conservation de l'énergie.* (61 p.)

Ce Mémoire se divise en deux Sections. Dans la première, l'auteur expose la relation qui existe entre la loi électrodynamique qui porte son nom et le *principe de la conservation de l'énergie*. On a prétendu trouver une contradiction entre cette loi et ce principe; l'auteur démontre qu'une telle contradiction n'existe pas. Bien plus, la loi ajoute encore au principe un nouveau corollaire, et permet de le transformer de manière que son application à chaque couple de particules ne soit plus restreinte au temps où ce couple n'éprouve, de la part des autres couples, ni gain ni perte de force vive, mais qu'elle ait toujours lieu, indépendamment des circonstances de toute espèce dans lesquelles les deux particules peuvent se trouver relativement aux autres couples. L'auteur fait ensuite, dans la seconde Section, une nouvelle application de sa loi au développement des *lois du mouvement de deux particules électriques abandonnées à leur action mutuelle*. Ce développement conduit à des résultats, sinon susceptibles d'une vérification expérimentale directe, du moins pouvant servir de guides dans les recherches sur l'état et le mouvement moléculaire des corps.

Hansen (P.-A.). — *Étude sur la marche d'un rayon lumineux à travers un nombre quelconque de surfaces sphériques réfringentes.* (140 p.)

§ 1er. Développement de formules rigoureuses pour le calcul de la position d'un rayon lumineux après un nombre quelconque de réfractions à travers les surfaces sphériques. — § 2. Développe-

ent des formules pour le calcul de la position des rayons lumineux centraux après un nombre indéfini de réfractions. — § 3. Calcul de quelques exemples de l'application des formules établies dans ce qui précède.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO, pubblicati dagli Accademici Segretari delle due Classi (¹).

T. V; 1869-1870.

RICHELMY. — *Sur les dynamomètres et sur les ergomètres.* (52 p., 1 pl.)

On admet, en général, implicitement, que la résistance vaincue par l'effort de la machine est proportionnelle à l'ordonnée de la courbe tracée par le dynamomètre enregistreur, d'où l'on déduit, par la quadrature de cette courbe, la mesure du travail effectué. L'auteur étudie théoriquement cette hypothèse, qu'il regarde comme étant généralement inexacte.

BERRUTI (G.). — *Sur les efforts transmis par les roues dentées.* (11 p., 1 pl.)

L'auteur étudie les causes qui font éviter, dans un grand nombre de cas, l'usage des roues dentées comme moyen de transmission. Il conclut de ses expériences que l'inexactude de la division des dents peut avoir une influence très-considérable sur la régularité du travail de la machine. Il cite à l'appui le tableau des résultats de ses expériences.

RICHELMY. — *Eloge de* Carlo-Ignazio GIULIO. (15 p.)

Ingénieur et physicien, né à Turin, le 11 août 1803, mort en 1859.

GOVI (G.). — *Sur un appareil pour démontrer divers phénomènes de Mécanique moléculaire. — Du frottement à distance.* (11 p.)

DORNA. — *Sur la formule barométrique du comte Paul de Saint-Robert.* (21 p.)

(¹) Il paraît annuellement un volume, composé de sept fascicules grand in-8°.

Cette formule diffère de celle de Laplace en ce qu'elle ne contient pas de logarithmes, et qu'elle est d'un usage plus simple. En désignant par

R_0 le rayon terrestre du niveau de la mer à la latitude moyenne λ des deux stations;

X l'altitude de la station inférieure;

x la différence de niveau des deux stations;

h_0, h les hauteurs barométriques réduites à zéro;

$\frac{3}{8}\eta_0$, $\frac{3}{8}\eta$ les diminutions de ces hauteurs par l'humidité;

t_0, t les températures absolues;

a un coefficient $=\frac{5}{4}$ à la surface de la Terre, et $=2$ dans une ascension aérostatique;

la formule dont il s'agit est la suivante :

$$x = 105,173(1+0,0026\cos 2\lambda)\left(1+\frac{a}{2}\frac{x}{R_0}+a\frac{X}{R_0}\right) \times \frac{1}{2}\cdot\frac{374}{76}\left[\frac{h_0-\frac{3}{8}\eta_0}{t_0}+\frac{h\left(1-a\frac{x}{R_0}\right)-\frac{3}{8}\eta}{t}\right].$$

M. Dorna la remplace par une autre formule qu'il en déduit, en égalant deux expressions essentiellement différentes d'une même quantité.

Dorna. — *Sur l'importance scientifique de Soperga et de la Sacra di San Michele pour l'Observatoire de Turin, et sur leurs différences de niveau respectives.* (12 p.)

Govi (G.). — *De l'influence des vibrations sonores sur les jets de gaz froids et enflammés.* (10 p.)

Dorna. — *Table logohypsométrique.* (60 p.)

Après une Introduction, dans laquelle l'auteur expose sa méthode de calcul, vient la Table. (46 p.)

Richelmy. — *Quelques remarques sur les roues dentées.* (30 p.)

Menabrea (L.-F.). — *Sur le principe d'élasticité.* (4 p.)

Cet article est suivi d'observations et de lettres de MM. Em. Subbia, C. Barsotti, J. Bertrand, Yvon Villarceau.

DENZA. — *Aurore polaire observée en Piémont le 5 avril 1870.* (6 p.)

CHIÒ (F.). — *Note sur la formule sommatoire appliquée au calcul de* $S\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x}$. (10 p.)

La formule de Malmsten [1] donne pour ce cas

$$S\frac{1}{x} = C + \log x + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{B_{2m-1}}{2m-2}\,\frac{x^{2m-2} - x}{1} + (-1)^m \frac{B_{2m-1}}{2m}\,\frac{\theta}{x^{2m}},$$

où C est une constante connue, $B_1, B_3, \ldots$ les nombres de Bernoulli, et $0 < \theta < 1$. L'auteur discute l'approximation que l'on peut obtenir à l'aide de cette formule.

LUVINI. — *Expériences et considérations sur l'adhérence entre les solides et les liquides.* (12 p.)

Examen des expériences de Plateau.

GENOCCHI (A.). — *Sur quelques écrits attribués à Augustin Cauchy.* (5 p.)

Voir *Bulletin*, t. II, p. 203.

DORNA. — *Description des instruments et des méthodes en usage à l'Observatoire de Turin pour la mesure du temps.* (3 p.)

T. VI; 1870-1871.

GOVI (G.). — *Correction des coefficients dans la formule donnée par Regnault pour le calcul des dilatations absolues du mercure.* (5 p.)

L'auteur relève des inexactitudes provenant d'erreurs de chiffres dans les calculs numériques. En posant

$$\delta_t = aT + bT^2,$$

les valeurs des coefficients doivent être corrigées ainsi :

$$a = 0{,}00017901, \quad b = 0{,}0000000252222\ldots,$$

d'où

$$\log a = \bar{4}{,}25288, \quad \log b = \bar{8}{,}40178.$$

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 35, 1847.

M. Govi fait suivre sa Note d'une Table corrigée des dilatations du mercure.

Bruno (G.). — *Recherches sur la courbe lieu des points d'un hyperboloïde gauche pour lesquels les deux rayons de courbure principaux de la surface sont d'égale longueur.* (22 p.)

Ce lieu est une courbe sphérique.

Chiò (F.). — *Théorème relatif à la différentiation d'une intégrale définie par rapport à une variable comprise dans la fonction sous le signe ∫ et dans les limites de l'intégrale, étendu au calcul aux différences, et suivi de quelques applications* (¹). (37 p., fr.)

Govi (G.). — *Sur la date d'un travail inédit de Meusnier, relatif à l'équilibre des machines aérostatiques, et sur celle de l'extrait que Monge en a laissé, et que l'Académie des Sciences de Paris vient de publier.* (8 p. fr.)

La Communication de Meusnier à l'Académie des Sciences a eu lieu le 3 décembre 1783. L'essai de son appareil fut fait à Paris, le 15 juillet 1784, dans une ascension faite par Robert, Hullin et le duc de Chartres (père de Louis-Philippe).

Govi (G.). — *Sur l'opportunité de la publication d'une traduction inédite de l'*Optique *de Ptolémée.* (4 p.)

M. Egger a signalé à l'Académie des Sciences de Paris des fragments du texte grec de l'*Optique* de Ptolémée, trouvés à Sakkara, en 1869, en ajoutant que, bien que l'Ouvrage original soit perdu et qu'on n'en possède aucune traduction arabe ou syriaque, il existe cependant, dans diverses bibliothèques, une traduction italienne, faite, probablement vers le XIIᵉ siècle, par un certain Eugenio Ammiraco, Sicilien, d'après un texte syriaque ou arabe dont on ignore la destinée. Il existe deux copies de cette traduction à la Bibliothèque Nationale de Paris, et deux autres à la Bibliothèque Ambrosienne, de Milan. M. Govi en a découvert deux de plus à la Bibliothèque Nationale de Florence. Cet Ouvrage important devrait être imprimé depuis longtemps.

Tessari (D.). — *Sur la description géométrique des engrenages à axes convergents.* (15 p., 2 pl.)

(¹) [illegible]

SIACCI (Fr.). — *Sur quelques transformations des équations férentielles du Problème des trois Corps.* (15 p.)

« Dans un Mémoire publié en 1842 ([1]), Jacobi a démontré que problème des trois corps peut se réduire à celui de deux corps nt la force vive est à chaque instant égale à celle des trois preiers. Il en a déduit que les aires décrites par les rayons vecteurs enés du centre de gravité, supposé en repos, aux deux corps fics, multipliées par les masses respectives et projetées sur un plan uelconque, donnent une somme constante. Il a réduit finalement s six équations différentielles du second ordre, qui expriment le ouvement des deux corps, à six autres, dont une est du second rdre et les cinq autres du premier. Les intégrales connues du Problème des trois Corps n'étant qu'au nombre de quatre, savoir l'intégrale des forces vives et les trois intégrales des aires, il en résulte ue la réduction de Jacobi équivaut à la découverte d'une nouvelle ntégrale du fameux problème.

» M. Brioschi ([2]) a, depuis, trouvé un nouveau système de sept quations différentielles du premier ordre, équivalent aux six quations de Jacobi, et a fait voir aussi comment on en peut déuire une formule de Bour ([3]), à laquelle celui-ci est parvenu par ne analyse assez compliquée, et qui fournit un système d'équaions analogue aux précédents.

» Dans la présente Note, l'auteur propose une méthode d'où l'on eut déduire une infinité de systèmes d'équations, analogues à ceux le Jacobi, de Bour et de M. Brioschi, et qui donne, comme cas parculiers, les systèmes trouvés par ces auteurs. »

REGIS (D.). — *Sur les surfaces d'égale pente.* (21 p., 1 pl.)

« Ce Mémoire contient quelques propositions relatives aux rayons le courbure d'une ligne de niveau, de la directrice et de l'arête de ebroussement, ainsi qu'au rayon de courbure principale maximum le la surface en un quelconque de ses points; en outre, un théorème relatif au volume compris entre les deux nappes d'une telle

---

([1]) *Sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois Corps* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1842. — *Opuscula mathematica*, t. I, p. 30).

([2]) *Sur une transformation des équations différentielles du problème des trois Corps* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1868).

([3]) *Mémoire sur le problème des trois Corps* (*Journal de l'Éc. Polyt.*, t. XXI, 1856).

surface ayant une directrice commune (aussi d'égale pente), un plan horizontal quelconque et les plans verticaux projetant sur ce plan horizontal les génératrices de la surface qui passe par les extrémités de la directrice. »

T. VII; 1871-1872.

DENZA (P.-F.). — *Programme des observations physiques qui seront exécutées dans le tunnel du Mont-Cenis, par MM.* SECCHI, DIAMILLA-MÜLLER *et* DENZA. (9 p.)

GOVI (G.). — *Sur l'invention de quelques étalons naturels de mesure.* (15 p., fr.)

BRUNO (G.). — *Généralisation et corollaires d'un théorème de Géométrie.* (14 p.)

M. de la Gournerie a énoncé [1] un théorème relatif à la surface de la vis à filet triangulaire, que M. Bruno généralise ainsi :

« Étant donnée une surface gauche quelconque Σ, si l'on considère une de ses génératrices rectilignes AB, dont le plan central soit vertical, les droites tangentes à Σ aux divers points de AB et faisant avec l'horizon un angle maximum ont pour lieu géométrique un hyperboloïde réglé, dont les sections horizontales sont des cercles. »

FOSCOLO (G.). — *Sur les demi-diamètres menés par les sommets ou par les points de contact d'une ligne polygonale semi-régulière, inscrite ou circonscrite à une conique.* (24 p., 1 pl.)

Les propriétés les plus remarquables, relatives aux diamètres conjugués de l'ellipse, appartiennent aussi à d'autres systèmes de diamètres ou de demi-diamètres liés par des conditions particulières concernant les angles qu'ils font entre eux et avec les axes principaux. On obtient ces systèmes de demi-diamètres en joignant le centre d'une ellipse aux sommets ou aux points de contact de certains polygones semi-réguliers, inscrits ou circonscrits à cette courbe, en se rappelant que cette qualification de semi-régulier se rapporte à la projection d'un polygone régulier sur un plan quelconque. L'auteur est arrivé à étendre aux diverses espèces de coniques les propriétés connues de ces polygones, et d'autres pro-

---

(1) *Traité de Géométrie descriptive*, n° 992.

·iétés analogues, par une voie élémentaire, indépendante de la ıéorie des projections et des figures homographiques.

Govi (G.). — *Sur la dispersion anormale et les foyers chro-atiques des lames et des prismes.* (15 p., 1 pl.)

Strüver (G.). — *Études cristallographiques sur l'hématite de 'raversella.* (51 p., 5 pl.)

Sclopis (F.). — *Communication d'une Lettre de Lagrange au ıarquis D. Caracciolo.* (7 p.)

Dans cette Lettre, datée de Berlin et écrite en italien, Lagrange répond d'abord à quelques questions sur les Mathématiques, qui lui avaient été adressées par son correspondant; il décline ensuite les offres d'une haute position scientifique dans le royaume des Deux-Siciles, que lui avait faite son ami, devenu vice-roi de l'île de Sicile.

Gobbi-Belcredi (G.). *Sur les erreurs azimutales du théodo-lite.* (10 p.)

Berrutti. — *Description et théorie d'un thermodynamomètre.* (19 p., 2 pl.)

Dorna (A.). — *Sur l'aurore boréale du 4 février 1872.* (3 p.)

Zucchetti (F.). — *Note sur un mode de transmission du mouvement entre deux axes concourants.* (7 p., 1 pl.)

Govi (G.). — *Le Saint-Office, Copernic et Galilée, à propos d'un Ouvrage posthume du P. Olivieri sur le même sujet.* (2 art., 56 p.)

Le P. Olivieri, ex-général des dominicains et commissaire de l'Inquisition, mort en septembre 1845, est connu depuis longtemps par le récit que fait Biot d'*Une Conversation au Vatican* [1]. L'Ouvrage posthume qui vient de paraître à Bologne est le développement d'un article publié sans nom d'auteur dans l'*Université Catholique,* en 1841. Le contenu de l'Ouvrage peut se résumer ainsi en quelques lignes : « Les Congrégations du Saint-Office et de

[1] *Journal des Savants,* 1858, p. 137. — *Mélanges scientifiques et littéraires,* t. II, p. 451.

l'Index condamnèrent les doctrines de Copernic et de Galilée, comme contraires aux saintes Écritures, non parce que l'immobilité du Soleil et le mouvement de la Terre ne pouvaient s'accorder avec les livres sacrés, mais parce que ces deux auteurs les soutinrent par de mauvaises raisons qui, étant contraires à la saine philosophie, paraissaient opposées à l'Écriture sainte. Si Galilée avait connu la pesanteur de l'air, et ne se fût pas obstiné à attribuer les marées à la combinaison des deux mouvements, diurne et annuel, de la Terre, les choses se seraient passées autrement, l'Église ayant toujours eu pour but le progrès, mais le progrès véritable, dégagé d'erreurs, soumis à la parole révélée et à l'autorité suprême constituée par le Christ sur la terre. » M. Govi n'a pas de peine à faire voir que les erreurs physiques de Galilée n'ont joué aucun rôle dans son procès, et qu'il n'a été condamné que pour les vérités dont il s'était fait le champion. D'ailleurs il est inexact que Galilée ignorât la pesanteur de l'air, dont il avait, bien avant son premier procès, donné une valeur assez approchée ($\frac{1}{400}$).

Curioni. — *Sur la résistance transversale dans les solides élastiques*. (18 p., 1 pl.)

Chiò (F.). — *Troisième Mémoire sur la série de Lagrange*. (14 p.; fr.)

Ce Mémoire posthume, présenté à la Société Philomathique de Paris, renferme des additions aux deux Mémoires soumis par l'auteur à l'Académie des Sciences, en 1844 et en 1847, et insérés dans le *Recueil des Savants étrangers* (¹). L'auteur discute certaines propositions énoncées par Cauchy dans ses Ouvrages, et reproduites par d'autres géomètres, soit sur la convergence de la série de Lagrange, soit sur les caractères distinctifs de la racine fournie par cette série.

Genocchi (A.). — *Études sur les cas d'intégration sous forme finie*. Second Mémoire (Extrait). (4 p.)

Dans un précédent travail, présenté à l'Académie de Turin en 1864, et imprimé dans les *Memorie* de cette Académie, l'auteur a

(¹) T. XII. Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* des 7 septembre 1846 et 2 mars 1852.

léré quelques équations différentielles particulières du pre-
et du second ordre, et leur a appliqué les méthodes de
ouville, pour déterminer dans quels cas elles sont intégrables
orme finie, c'est-à-dire au moyen des fonctions algébriques et
anscendantes élémentaires, ainsi que des quadratures indéfi-
Pfaff a traité le cas d'une équation particulière du second
, comprenant toutes celles dont il est ici question ; il a ajouté
eurs cas d'intégrabilité à ceux qu'avait indiqués Euler, mais il
u déterminer si ces cas étaient les seuls possibles. M. Genocchi
lu essayer si les méthodes employées dans son premier Mé-
e pourraient lever tous les doutes relativement à l'équation
faff, et il expose une partie de ses résultats dans le Mémoire
il indique l'objet dans la présente Note.

auteur continue, dans ce second Mémoire, à faire usage des
iodes de M. Liouville, la plus grande facilité que présentent
utres méthodes pouvant bien n'être qu'apparente. La recherche
propriétés d'une fonction définie par une équation différentielle
'usage des propriétés données d'une fonction pour former une
ation différentielle propre à la définir, sujets de recherches que
ont proposés Riemann et d'autres, relativement à la série hyper-
métrique et à des séries plus générales, offrent des questions
ie haute importance, mais distinctes de celles que M. Genocchi
lie. De telles équations différentielles comprenant des fonc-
is exprimables par les signes algébriques, exponentiels et loga-
imiques, ou par les quadratures indéfinies, et tout aussi bien
fonctions non exprimables de cette manière, il est clair que les
priétés auxquelles on a recours ne peuvent servir à distinguer
unes des autres.

En outre, si l'on admet l'importance des questions que l'on vient
idiquer, on ne peut méconnaître celle de l'autre recherche sur la
sibilité ou l'impossibilité de représenter, par les symboles con-
s ou par les quadratures indéfinies, une forme bien déterminée
lement par une équation différentielle, puisque la classe suscep-
le d'une telle représentation comprend les fonctions dont les
priétés et l'usage nous sont le plus familiers. L'auteur cite,
mme preuve, le grand nombre des travaux récents relatifs à cet
jet, et il indique, en terminant, les équations différentielles pour
quelles il a établi les conditions d'intégrabilité.

DORNA (A.). — *Sur les Cartes célestes de l'Académie royale des Sciences de Turin.* (3 p.)

Suivi d'une Lettre de M. Schiaparelli.

SIACCI (F.). — *Sur une transformation simultanée de deux formes quadratiques, et sur la conique par rapport à laquelle deux coniques données sont polaires réciproques.* (12 p.)

La question de trouver une conique par rapport à laquelle deux coniques données soient polaires réciproques a été résolue géométriquement par M. Cremona, analytiquement par MM. Rufini et Battaglini. Ce dernier (1), à l'aide de la théorie des invariants, est parvenu à une solution développée, et a découvert, en outre, des propriétés remarquables des coniques qui satisfont au problème général.

M. Siacci, en s'occupant d'une substitution spéciale, au moyen de laquelle, étant données deux formes quadratiques, on peut transformer chacune d'elles dans l'autre, à un coefficient constant près, a été conduit à considérer une troisième forme qui possède, entre autres propriétés remarquables, celle de devenir, dans le cas de trois variables, la conique même, par rapport à laquelle les deux premières sont polaires réciproques. L'objet de la présente Note est l'étude de cette forme.

SIACCI (F.). — *Théorème sur les déterminants et quelques-unes de ses applications.* (12 p.)

BRUNO. — *Propositions sur les coniques.* (16 p., 1 pl.)

DORNA (A.). — *Sur la priorité des découvertes, et sur quelques observations d'aurores boréales et de perturbations magnétiques, au point de vue des actions électromagnétiques mutuelles supposées du Soleil et des planètes.* (7 p.)

---

(1) *Atti della R. Accademia dei Lincei di Roma*, séance du 7 avril 1872.

SKRIFT FOR MATHEMATIK. 3e Série ([1]).

I; 1871 (fin).

EUTHEN (H.-G.). — *Sur le principe de dualité.* (Deuxième roisième article, 30 p.)

ntroduction de la dualité dans la Géométrie analytique plane. ıte proposition géométrique est renfermée dans une proposition quelle le principe de dualité peut s'appliquer.

ETERSEN (J.). — *Courbes parallèles.* (4 p.)

TEEN (A.). — *Le nombre des cycles que l'on peut former avec nombres entiers et positifs, dont la somme est un nombre pre-r donné p, est égal à* $\frac{2^p - 2}{2}$. (5 p.)

On entend par *cycle* un groupe de deux nombres au moins dis-sés en cercle.

T. II; 1872.

LORENZ (L.). — *Compensation des erreurs d'observation.* 0 p.)

Exposition de la méthode des moindres carrés.

BUCHWALD (E.). — *Condition pour qu'une fonction algébrique, tionnelle et homogène du second degré de N variables soit nstamment positive ou constamment négative pour toutes les aleurs de ces variables.* (5 p.)

Cette condition fondamentale dans la théorie des maxima et des inima des fonctions de plusieurs variables consiste en ce que, la nction proposée étant représentée par $\Sigma\, n_{r,s}\, x_r\, x_s$, l'expression

$$(\pm 1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

it positive pour $r = 1, 2, \dots, N$, le signe + étant pris lorsque polynôme doit être positif, le signe — lorsqu'il doit être négatif.

---

[1]) Voir *Bulletin*, t. II, p. 15.

Zeuthen (H.-G.). — *Démonstration élémentaire d'un théorème de la nouvelle Algèbre.* (24 p.)

Théorie des invariants et des covariants.

Steen (A.). — *Condition pour que trois cercles ou quatre sphères passent par un même point.* (8 p.)

Petersen (J.). — *Démonstration des théorèmes de Wilson et de Fermat.* (1 p.)

Zeuthen (H.-G.). — *Sur les $n(n-1)$ tangentes menées d'un point à une courbe du $n^{ième}$ ordre.* (2 p.)

Lorsqu'on sait que $n(n-1)$ droites, passant par un même point, sont tangentes à une même courbe du $n^{ième}$ ordre, on peut construire une nouvelle courbe du $n^{ième}$ ordre, tangente aux mêmes droites et satisfaisant, en outre, à trois conditions arbitraires. D'où il suit que l'on ne peut choisir arbitrairement que $\frac{n(n+3)}{2}-3$ lignes seulement, passant par un même point et tangentes à une même courbe du $n^{ième}$ ordre.

Petersen (J.). — *Contribution à la théorie des enveloppes.* (17 p.)

Cette théorie, intimement liée à celle des solutions singulières des équations différentielles, est traitée d'une manière incomplète dans la plupart des Ouvrages sur le Calcul différentiel. L'auteur présente plusieurs remarques dont on n'a pas généralement tenu compte jusqu'à présent. Il faut d'abord distinguer le cas où le paramètre de l'enveloppée est fonction d'une autre variable du cas où il est lui-même une variable indépendante, le premier cas pouvant fournir des solutions que le second ne donne pas. Il y a lieu aussi d'examiner ce qui se passe lorsque le point d'intersection des deux enveloppées consécutives est un point double. La nature du problème peut changer avec la forme sous laquelle on présente l'équation de l'enveloppée.

Zachariæ (G.). — *Compensation des erreurs d'observation.* (6 p.)

Remarques au sujet du Mémoire de M. Lorenz publié dans le même volume. (*Voir* plus haut.)

Hansen (P.-C.-V.). — *Courbure des surfaces.* (12 p.)

ENZ (L.). — *Contribution au problème des compensations.*
)

lition au Mémoire précédent. Réponse aux remarques de
ıchariæ.

:EN (A.). — *Sur l'écoulement d'un fluide pesant par une*
ture latérale. (4 p.)

CTHEN (H.-G.). — *Sur le principe de dualité.* (Quatrième et
er article, 20 p.)
marques historiques.

TERSEN (J.). — *Sur la transformation des coordonnées en*
ométrie. (2 p.)

CHARIÆ (G.). — *Compensation des erreurs d'observation.*
)

IVES NÉERLANDAISES DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES. In-8° (1).

I, 1871.

:HR (G.-W.-F.). — *Sur le mouvement de l'œil.* (35 p.,

mouvement de l'œil est celui d'un corps assujetti à tourner r d'un point fixe ; mais sa généralité est restreinte par deux lont la première, énoncée par Donders, consiste en ce que la on que prend le globe de l'œil autour de la ligne du regard d uniquement, pour certaine position de la tête, de la direcle cette ligne, et non de la volonté de l'observateur, ni du n qu'a parcouru cette ligne pour arriver à sa direction. Suia seconde loi, celle de Listing, la position du globe oculaire, ıne direction quelconque de la ligne du regard, est la même :lle que prendrait ce globe, en partant d'une certaine position *ıle* ou *primaire,* pour venir immédiatement dans sa nouvelle ɔn, par une rotation unique autour d'un axe fixe, perpendi: à la ligne du regard dans sa direction primaire et dans sa lle direction. M. Baehr développe les conséquences mathéıes de ces deux lois, et traite des moyens de les vérifier.

---

(1) ɔir *Bulletin*, t. III, p. 347.

(J.-W.). — *L'Empirisme et la Science, esquisse his- Lavoisier.* (11 p.)

extrait d'un Discours prononcé en 1871 devant la Sciences naturelles d'Amsterdam, l'auteur défend contre les injustes critiques dont il a été l'objet de la part des savants allemands.

1872.

ns (A.). — *Sur les différentielles à indices quelconques.*

fonction y étant développée en une série exponentielle de $\Sigma A_m e^{mx}$, M. Liouville définit sa dérivée d'ordre fraction- par la formule

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \Sigma A_m e^{mx} m^p + \chi(x),$$

désignant un terme complémentaire, dont M. Liouville a dé- né la forme générale. On en déduit une expression d'une inté- d'ordre fractionnaire quelconque sous forme d'une intégrale ie ordinaire. M. Rutgers développe les conséquences de cette ule, et indique une méthode pour développer une fonction née en série d'exponentielles.

OSSCHA (J.) jr. — *Les déterminations des températures dans expériences de M. Regnault sur les forces elastiques de la eur d'eau.* (13 p.)

E JONG (J.). — *De l'équation intégrante.* (6 p.)

I. Aloys Mayr [1] a donné une démonstration très-simple du érium établi par Euler pour reconnaître si une équation diffé- tielle d'ordre quelconque est directement intégrable. M. de g, dans une thèse intitulée : « *De Integreerende factor en Integreerende vergelijking* », Leyde, 1871, et dont la présente te est une analyse, applique cette condition à la recherche du fac- ur d'intégration pour l'équation linéaire à coefficients constants

$$\Sigma a_i y^{(i)} = 0,$$

(1) *Der integrirende Factor und die particularen Integrale.* Würzburg, 1868. 1 vol. 8°, 140 p.

à laquelle se ramène ensuite l'équation $\Sigma a_i x^i y^{(i)} = 0$. Si
un facteur tel que le produit $\varphi\, dx\, \Sigma a_i y^{(i)}$ soit une différe
exacte, φ est déterminé par l'équation

$$(2) \qquad \Sigma(-1)^i \frac{d^i(a_i \varphi)}{dx^i} = 0,$$

que M. Mayr a nommée *l'équation intégrante*, et qui est liné
comme l'équation (1) et de même ordre qu'elle. Ces équati
montrent que, si $y = f(x)$, φ sera égal à $f(-x)$. On en concl
que y est le facteur d'intégration de l'équation (2). L'auteur déd
théoriquement, de ces considérations, que les intégrales partic
lières sont de la forme $y = e^{\lambda x}$, ce qu'Euler avait posé en quel
sorte empiriquement.

Versluys (J.). — *Démonstration nouvelle de la propriété a
ciative de la multiplication des quaternions.* (6 p.)

On sait que la multiplication de deux quaternions q, q' n'est
une opération *commutative*, c'est-à-dire que l'on n'a pas, co
dans la multiplication ordinaire, $q \times q' = q' \times q$; mais la m
plication des quaternions jouit, comme la multiplication ordi
de la propriété *associative*, exprimée par l'équation

$$(q \times q') \times q'' = q \times (q' \times q''),$$

et de la propriété *distributive*, exprimée par les équations

$$(q + q') \times q'' = q \times q'' + q' \times q'',$$
$$q \times (q' + q'') = q \times q' + q \times q''.$$

La propriété associative a été démontrée par Hamilton
Möbius au moyen de considérations géométriques. M. Versl
donne une démonstration plus simple, analogue à celle de
priété distributive.

Oudemans. — *Rapport général sur les observations de l
totale du 12 décembre 1871, dressé d'après les rapports
des différents observateurs à l'île de Java, par l'Ingén
chef du service graphique des Indes orientales.* (10 p.)

Donders (F.-C.). — *La projection des phénomènes
suivant les lignes de direction.* (19 p.)

Discussion relative à l'appréciation de la distance d'un ol

NS DE HAAN (D.). — *La methode d'Euler, pour l'intégra-quelques équations différentielles linéaires, démontrée à e l'équation intégrante.* (16 p.)

:ur reprend avec de nouveaux développements le sujet ar M. de Jong dans le travail que nous avons mentionné ıt.

. (G.-W.-F.). — *Sur les racines des équations*

$$\text{os}(x\cos\omega)\,d\omega = 0, \quad et \quad \int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\sin^2\omega\, d\omega = 0.$$

FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von BORCHARDT.

Cahiers 1 et 2; 1873.

R (H.). — *Sur les courants stationnaires de l'électricité cylindres.* (20 p.)

émoire fait suite à un autre, publié par le même auteur, : 75 du *Journal de Borchardt* (*Bull.*, t. IV, p. 89). ıer y avait montré comment les fonctions besséliennes ser-ésoudre le problème pour un cylindre conducteur. Cepen-'ormule qu'il avait trouvée alors, et qui exprime la tension ieur du cylindre, offre l'inconvénient d'être très-peu con-: pour les points de la surface courbe; par conséquent, elle ète à l'expérience que pour les points intérieurs et pour les anes. Il serait donc intéressant d'exprimer la tension par ıule qui fût applicable aux points de la surface cylindrique; que fait l'auteur dans ce nouveau Mémoire.

ıe la nature du problème proposé entraîne la discontinuité :tions qui le résolvent, il faut renoncer à une bonne con-e dans une surface quelconque qui contient les électrodes ıppose être des points séparés. Le problème consiste donc r une surface de divergence qu'on ne peut guère aborder périence; tel a été le résultat du beau Mémoire de Rie-ır le problème des anneaux de Nobili. Ainsi l'auteur cherche

une transformation semblable pour exprimer la tension de l'él tricité dans un cylindre limité, si elle y entre et qu'elle en sorte deux électrodes situées symétriquement à la surface et au plan n dian. Au lieu de prendre, comme antérieurement, la surface cyl drique pour surface de mauvaise convergence, l'auteur renonce c fois à la convergence dans les deux sections normales qu'on p mener par les électrodes, et il réussit par là à trouver des exp sions convergentes sur la surface à une petite distance de ces s tions.

La même méthode s'applique encore à quelques cas plus com qués. M. Hermann avait engagé M. Weber à entreprendre ces cherches pour expliquer un phénomène électrique observé Matteucci (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. L p. 760, et t. LXV, p. 151, 194). La théorie mathémati se trouve d'accord avec l'explication du phénomène qu'a don M. Hermann. Ce savant ramène la propagation du courant, dans fluide qui environne le fil conducteur, à une polarisation pro tionnelle à l'intensité du courant et prenant son origine à la sur limite.

KIEPERT (L.). — *Exécution effective de la multiplication fonctions elliptiques pour des nombres entiers.* (13 p.)

Le problème de la multiplication rationnelle des fonctions el tiques se résout par deux méthodes distinctes ; l'une repose sur l plication réitérée du théorème de l'addition des fonctions elli ques ; l'autre demande deux transformations consécutives ; mai opérations algébriques qu'elles exigent sont tellement compliqu qu'elles deviennent illusoires quand il s'agit de calculer le rés pour un multiplicateur premier plus grand que 7, et, quand m on aurait effectué les calculs laborieux, les formules se prése raient sous une forme rebutante. M. Kiepert développe des mules d'une élégance remarquable et qui donnent le résultat, forme explicite, pour un multiplicateur quelconque. La fonc cherchée s'exprime immédiatement par certaines autres, q trouve être des déterminants dont les éléments sont formés p fonction de l'argument simple et par ses dérivées. N'oublions de faire observer qu'il faut toujours encore calculer ces *déte nants* et ces *dérivées*.

PERT (L.). — *Résolution des équations de transformation, ision des fonctions elliptiques.* (11 p.)

résolubilité des équations dont dépend la division des fonc- elliptiques a été découverte par Abel (*OEuvres compl.*, t. I, 5). M. Kiepert recherche les expressions des racines elles- s; il réduit la résolution de l'équation du degré n^2 à celle de équations du degré n, qui dérivent de la transformation du n. Le développement subsiste pour un nombre n quelconque, u impair, premier ou composé. Dans toutes ses recherches, iepert se sert de la forme normale introduite par M. Weier- pour les fonctions elliptiques, mais dont personne n'avait e fait usage. Il faut vivement regretter que cet illustre géo- ne cède pas aux vœux de ses élèves et du monde mathéma- , en facilitant, par la publication de ses recherches, la lecture lémoires dont il a souvent suggéré lui-même la première idée.

RCHARDT (C.-W.). — *Sur la transformation, en coordonnées rales orthogonales, des équations d'élasticité.* (14 p.)

ient x, y, z les coordonnées cartésiennes et orthogonales d'un d'un corps élastique en équilibre d'élasticité; $x+u$, $y+v$, v les coordonnées du même point après une déformation que; alors la détermination des déplacements u, v, w dé- de trois équations simultanées aux différences partielles, li- es et du second ordre, et encore de trois conditions de limites la surface du corps. Mais, si le corps est isotrope, ces équations lifférences partielles se simplifient beaucoup; car, si, outre les dilatations

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial z}$$

s trois glissements

$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},$$

nsidère aussi les trois composantes doubles de la rotation élé- taire

$$U=\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y},\quad V=\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z},\quad W=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}$$

[illegible]

[illegible]

À cet effet, M. [illegible] part de la variation d'une intégrale triple à laquelle Green a réduit les équations de l'élasticité; c'est une voie indiquée déjà par Jacobi (t. 36 du même Journal). Mais la méthode de Jacobi ne suffit pas cette fois : car les dilatations et les glissements forment un groupe de grandeurs, tandis que les rotations élémentaires en forment un autre, et, pour chacun de ces groupes, il y a une transformation particulière et très-simple ; mais quand on mêle ces deux groupes, on ne peut plus reconnaître de loi simple de transformation. En séparant donc ces deux groupes et en considérant les différences ordinaires au lieu des différences partielles, on retrouve le résultat de Lamé presque sans aucun calcul.

Durège (H.). — *Supplément au Mémoire « Sur les formes des courbes du troisième ordre »* (t. 75, p. 153. *Bull.*, t. IV, p. 90). (2 p.)

M. Durège avait cru qu'une ovale faisant partie d'une courbe du troisième ordre possède toujours des asymptotes imaginaires; cependant M. Schröter a étudié, dans les *Mathematische Annalen*,

ırbe du troisième ordre qui a ses trois asymptotes réelles et e ovale fait partie; donc il faut ajouter aux formes des courbes ·ées par M. Durège celles-ci, appartenant au premier genre : *s asymptotes rectilignes :* la partie U consiste en trois traits ı l'infini; chaque asymptote est touchée par deux branches ppartiennent pas au même trait; S forme une ovale; *asymptote rectiligne et une autre parabolique :* lapartie U : en deux traits allant à l'infini; une branche de chaque trait her l'asymptote *rectiligne,* l'autre se rattache à l'asymptote lique; S forme une ovale.

ois-Reymond (P.). — *Nouvelle théorie de la convergence ı divergence des séries dont les termes sont positifs.* (32 p.) teur parvient à des critères assez simples, en mettant un terme ıque de la série sous la forme

$$u_p = \chi_p(w_p - w_{p+1}).$$

critères ressemblent en quelque sorte à ceux qu'a donnés mmer (t. 13 du *Journal*); il y entre des fonctions d'ordre p. herche de ces fonctions se trouve, en général, réduite à des hmes réitérés. Quoiqu'il ne nous semble pas que les auteurs ru que ces critères logarithmiques pussent épuiser à fond la gence, il est pourtant intéressant d'avoir, dans ce Mémoire, monstration de l'existence de séries qui, quoique convergentes, ; si peu que les critères logarithmiques ne suffisent pas pour ıtater.

ıtens. — *Sur le problème de Malfatti pour le triangle sphé-* (5 p.)
Schellbach a donné, au tome 45 du même *Journal,* une so- très-élégante de ce problème; actuellement M. Mertens fait : quelle manière on peut déduire de la solution de M. Schell- le formules qui ressemblent parfaitement à celles par les- s Malfatti a résolu le problème du plan.

.et (John-C.). — *Sur la réduction des intégrales abéliennes.* ; angl.)
ignons la fonction

$$\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)(1-k_1^2x^2)\ldots(1-k_{2m-3}^2x^2)}$$

par le symbole $\Delta_{2m-1}(k, x)$, où k est le type des modules et le suffixe $2m-1$ de Δ en désigne le nombre; alors, si les modules $k, k_1, k_2, \ldots$ satisfont aux équations

$$k = k_1 k_2 = k_3 k_4 = \ldots = k_{2m-3} k_{2m-2}: \tag{1}$$

1° Les intégrales

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta_{2m-1}(k, x)}, \quad \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\Delta_{2m-1}(k, x)}, \ldots, \quad \int_0^x \frac{x^{2m}\,dx}{\Delta_{2m-1}(k, x)},$$

$$\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)\Delta_{2m-1}(k, x)}, \quad \int_0^x \frac{dx}{(1-k^2x^2)\Delta_{2m-1}(k, x)}, \quad \int_0^x \frac{dx}{x^2\Delta_{2m-1}(k, x)}$$

dépendront d'intégrales ayant cette forme :

$$\int_0^y \frac{dy}{\Delta_{m-1}(\lambda, y)}, \quad \int_0^y \frac{y^2\,dy}{\Delta_{m-1}(\lambda, y)}, \ldots, \quad \int_0^y \frac{y^{2(m-1)}\,dy}{\Delta_{m-1}(\lambda, y)};$$

2° L'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\Delta_{2m-1}(k, x)}$$

dépendra des mêmes intégrales et encore d'autres ayant cette forme

$$\int_0^y \frac{dy}{(1+\nu y^2)\Delta_{m-1}(\lambda, y)}.$$

Le nombre des modules compris sous les intégrales réduites sera $m-1$ si m est pair, m si m est impair. L'auteur démontre ce théorème, développe par des transformations d'autres conditions qu'on peut substituer aux équations (1), et en fait l'application à la réduction d'intégrales abéliennes.

Hamburger. — *Note sur la forme des intégrales des équations différentielles linéaires et à coefficients variables.* (15 p.)

La résolution des équations différentielles linéaires et à coefficients constants dépend d'une équation algébrique. Si quelques racines de cette équation sont égales, M. Jordan a fait voir, dans une Note insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, de quelle manière on peut utiliser une série de substitutions, pour ramener le système d'équations différentielles linéaires à une forme

anonique. Les équations différentielles s'y trouvent séparées en ertains groupes qui peuvent immédiatement être intégrés. Si les oefficients de l'équation différentielle sont variables, M. Fuchs a été conduit à considérer aussi une certaine équation appartenant à un point singulier; elle détermine les intégrales qui se changent en elles-mêmes, multipliées par une constante, lorsque la variable décrit un contour fermé autour du point singulier. Si μ racines de cette équation sont égales, il survient encore $\mu - 1$ intégrales dont M. Fuchs a aussi établi la forme. En appliquant les considérations de M. Jordan à ce cas, M. Hamburger a reconnu que ce groupe de μ fonctions se compose, en général, de plusieurs groupes distincts et indépendants les uns des autres. Les relations qui existent entre les coefficients des termes multipliés par des logarithmes ne subsistent que pour les fonctions qui appartiennent à un même groupe partiel. En même temps, les intégrales de chaque groupe partiel sont susceptibles d'une forme simple qui permet de saisir ces relations d'un seul coup d'œil.

SCHLÄFLI. — *Sur le faisceau le plus général de surfaces du second ordre formant un système orthogonal avec deux autres faisceaux de surfaces quelconques.* (23 p.)

Le paramètre d'un faisceau de surfaces formant avec deux autres un système orthogonal satisfait à une équation aux différences partielles du troisième ordre. L'auteur commence par la transformer en la rendant entière et rationnelle par rapport aux dérivées du paramètre, prises par rapport aux trois coordonnées orthogonales. Supposons maintenant que le premier faisceau ne se compose que de surfaces algébriques du degré θ; soit $\Phi = (w, x, y, z)^\theta = 0$ l'équation du faisceau, où x, y, z désignent les trois coordonnées orthogonales, w l'unité de longueur, et où les coefficients sont des fonctions inconnues du paramètre; dénotons par Φ' le polynôme où l'on a remplacé ces coefficients par leurs premières dérivées par rapport au paramètre et posons enfin

$$d\Phi = n\,dw + p\,dx + q\,dy + r\,dz,$$

$$\sum \pm \frac{\partial n}{\partial w}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z} = \Delta,$$

$$p^2 + q^2 + r^2 = \rho^2.$$

En remplaçant chaque ligne du tableau du déterminant Δ, l'une après l'autre, respectivement par φ, χ, ψ, ω, on obtiendra quatre expressions N, P, Q, R. Mettons $\varphi = \frac{\partial}{\partial w}, \ldots$, on aura

$$Nn = \Delta, \quad Np = 0, \quad Nq = 0, \quad Nr = 0, \quad Pn = 0, \quad Pp = \Delta, \ldots$$

A l'aide de ces symboles, l'auteur obtient un système d'équations différentielles linéaires et du premier ordre pour les coefficients du polynôme Φ; on peut lui substituer la seule condition que le polynôme

$$\rho^3 \begin{vmatrix} w & 0 & N & 0 \\ x & p & P & \chi \\ y & q & Q & \psi \\ z & r & R & \omega \end{vmatrix} \left(\frac{\Phi'}{\rho}\right)$$

$\left[\text{où } \varphi\chi = \frac{\partial^2}{\partial w\, \partial x}, \ \chi^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \ldots\right.$; la quantité soumise à ces opérations est $\left.\left(\frac{\Phi'}{\rho}\right)\right]$ soit divisible par Φ, par rapport aux grandeurs w, x, y, z. (Ce polynôme est du degré $7\theta - 10$ en w, x, y, z, par rapport aux coefficients, linéaire pour les variations des coefficients.)

L'auteur n'entre pas dans la question de la possibilité de ce système, qui contient un grand nombre de conditions surabondantes; mais c'est M. Serret, autant que je sache, qui a démontré l'existence d'un faisceau de surfaces algébriques d'un degré supérieur formant un système orthogonal avec deux autres faisceaux. Pour $\theta = 2$, le système revient à sept conditions; elles ne portent pas sur les dix éléments du polynôme Φ et ne concernent que leurs variations; car six conditions exigent la fixation du centre et des directions des axes principaux, et la septième est une équation différentielle linéaire et du premier ordre pour les carrés des demi-axes, qui ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité

$$A(B - C)dA + B(C - A)dB + C(A - C)dC = 0,$$

$\sum \frac{x^2}{A} = 1$ étant l'équation d'une surface. Si l'on choisit une fonction arbitraire ω de ψ, qu'on intègre l'équation différentielle $dt = d\psi + \frac{d\omega}{t}$ et qu'on désigne la fonction intégrale t, pour trois

différentes constantes fixes d'intégration, par A, B, C, pour une quatrième arbitraire ε par t, l'équation $\sum \frac{x^2}{A} = 1$ représentera toutes les surfaces du premier faisceau. Chacune d'elles est déterminée par la valeur du paramètre ψ; et, si l'on élimine ψ des deux équations $\sum \frac{x^2}{A} = 1$, $\sum \frac{x^2}{A - t} = 1$, on a l'équation d'une surface du deuxième ou du troisième faisceau avec le paramètre ε. Ces deux faisceaux en forment un seul où chaque surface est orthogonale à chaque autre; le premier faisceau n'a pas cette propriété ([1]).

Schläfli. — *Sur les relations linéaires entre les 2p chemins circulaires de première espèce et les 2p de seconde espèce dans la théorie des fonctions abéliennes de MM. Clebsch et Gordan.* (7 p.)

Pasch. — *Sur les surfaces caustiques des systèmes de rayons et sur les surfaces des singularités des complexes.* (14 p.)

Dans son Mémoire d'habilitation (*Zur Theorie der Complexe und Congruenzen,* Giessen, 1870), l'auteur avait donné une démonstration géométrique du théorème de Plücker, que le lieu des points singuliers et l'enveloppe des plans singuliers d'un complexe sont identiques. Après avoir résumé cette démonstration, qui repose sur ce que la surface des singularités est l'une des surfaces caustiques de la congruence des lignes singulières, M. Pasch démontre l'identité des deux définitions de la surface des singularités d'un complexe et, plus généralement, de la surface caustique d'une congruence, en s'appuyant sur les représentations analytiques des éléments singuliers. Enfin l'auteur développe une méthode qui fournit l'équation de la surface des singularités par l'expression du discriminant d'une forme ternaire; ce résultat s'accorde avec celui de Clebsch pour la forme normale de l'équation du complexe (*Math. Ann.,* t. II, p. 1; t. V, p. 435). La surface caustique d'une congruence s'obtient par un calcul analogue; enfin l'auteur obtient les équations de la surface caustique de deux complexes du second degré en coordonnées ponctuelles et tangentielles, et montre que, pour les lignes singulières du complexe du second degré, l'équation

([1]) *Voir* un travail de M. Maurice Levy, signalé *Bulletin*, t. I, p. 271.

de la surface caustique se décompose en une équation du ... degré, et en une autre du quatrième qui représente la surface singularités.

Pochhammer (L.). — *Note sur la représentation des polyg d'arcs circulaires.* (5 p.)

Démonstration d'une formule employée plusieurs fois M. Schwarz pour résoudre des questions de représentation conf (t. 70 du même *Journal*, etc.)

Fuchs (L.). — *Sur la représentation des fonctions de varia complexes* (addition au Mémoire, t. 75 du même *Journal*, p. 1 (2 p.)

E. L.

МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ (¹).

T. VI. livraisons 1, 2 et 3; 1872-73.

1re Partie.

Sonine (N.-I.). — *Sur la différentiation avec un indice qu conque.* (38 p.)

L'étude de cette question, dont l'idée primitive remonte à Le nitz, et que Euler, Laplace et Fourier ont à peine effleurée, a développée, pour la première fois, par M. Liouville en 1832 (et continuée depuis par MM. Kellend (³), S. Roberts (⁴), Gr wald (⁵), Tardy (⁶), Genocchi (⁷), Holmgren (⁸), Letnikof (⁹), e L'auteur du présent Mémoire signale, dans les travaux de ses p décesseurs, des points obscurs, incomplétement étudiés, quelque même inexacts, tels que le théorème de M. Liouville relatif à fonction complémentaire, dont l'existence rendrait entièrement i déterminé tout le calcul des dérivées.

(¹) *Journal de la Société Mathématique de Moscou.* Voir *Bulletin*, t. III, p. 11.

(²) *Journal de l'École Polytechnique*, 21e cahier.

(³) *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, t. XX.

(⁴) *The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics*, nos 26, 27, 29, 30.

(⁵) *Schlömilch's Zeitschrift für Math. und Physik*, t. XII; 1867.

(⁶) *Annali di Matematica*, serie Ia, t. I; 1858.

(⁷) *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, serie IIa, t. XXVI.

(⁸) *Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar.* Ny följd, t. V; 1864.

(⁹) *Математическій Сборникъ*, t. II; 1867.

Après avoir défini l'opération représentée par le symbole

$$\frac{d^p}{dx^p},$$

et établi les formules relatives aux dérivées de e^{mx} et de $(x-a)^m$, il prend pour point de départ le théorème de Cauchy : « Une fonc- » tion $f(x)$, synectique en tout point d'une certaine aire T, peut » s'exprimer, en tout point de T, par l'intégrale fermée

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\alpha}\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\alpha-x},$$

« prise le long du contour de T »; et il en déduit une formule générale pour exprimer

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p},$$

p étant quelconque, positif ou négatif, réel ou complexe, pourvu que la partie réelle de p soit différente de zéro. Cette formule,

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p}=\frac{\Gamma(p+1)}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\alpha}\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{(\alpha-x)^{p+1}}+\frac{d^p 0}{dx^p}$$

devient identique à celle de Cauchy pour les valeurs entières et positives de p.

M. Sonine discute ensuite les limites de l'intégrale et la nature de la fonction complémentaire $\frac{d^p 0}{dx^p}$. La discussion des équations qui déterminent les limites de l'intégrale conduit à cette remarque, que la dérivée d'une fonction quelconque et la dérivée de son développement en série ne sont égales que lorsque tous les termes du développement ont une racine commune entre eux et avec la fonction primitive. La fonction complémentaire $\frac{d^p 0}{dx^p}$ est toujours *nulle* pour p positif; dans le cas de p négatif, c'est une fonction entière, composée d'un nombre de termes déterminé et fini, qui reste le même pour tous les indices p dont la partie réelle est comprise entre les deux mêmes nombres entiers consécutifs. Enfin l'auteur établit une formule générale pour les dérivées d'indice quelconque du produit de deux fonctions.

$i-1$ respectivement, tout nombre premier impair n, considéré ur rapport au module 4, peut être exprimé par la formule

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots.$$

ient N_{4h+1} le nombre des diviseurs de la forme $4h+1$, et N_{4h-1} lui des diviseurs de la forme $4h-1$. L'auteur démontre que : lorsque l'un des exposants β est impair, c'est-à-dire lorsque $= 4h-1$, alors on a $N_{4h-1} = N_{4h+1}$; 2° si $n = 4h+1$, les mbres N_{4h+1}, N_{4h-1} sont des nombres pairs exprimés par la forule

$$N_{4h\pm1} = \tfrac{1}{2}(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots[(2\beta_1+1)(2\beta_2+1)\ldots\pm1];$$

pour tout nombre impair, le rapport $\frac{N_{4h+1}}{N_{4h-1}}$ ne peut être exprimé r un nombre entier autre que 1 ou 2. L'auteur donne les types s nombres pour lesquels ce rapport a l'une ou l'autre de ces deux leurs. Des théorèmes analogues ont lieu pour les diviseurs de ne des formes $8h\pm1$, $8h\pm3$.

Serdobinsky (V.). — *Sur un problème d'Algèbre numérique.* p.)

Dans un Mémoire intitulé : « Identités numériques se rattachant aux propriétés du symbole E », M. Bougaïef donne trois méthodes ur former des identités numériques. La présente Note indique le quatrième méthode, fondée sur la résolution des équations connant le symbole E.

Schiller (N.-N.). — *Remarque sur les courants induits dans s circuits ouverts.* (8 p.)

L'auteur se propose d'étudier les phénomènes produits par un urant inducteur sur un courant ouvert. Des expériences convenblement dirigées (introduction d'un électrodynamomètre, d'un be de Geissler, d'un condensateur dans un circuit ouvert) font ir que le mouvement de l'électricité dans un tel circuit a tous les ractères des charges et des décharges successives d'un condensaur, dans lequel l'air et l'enveloppe du fil jouent le rôle de l'isolaur, et le fil lui-même celui des armatures. L'auteur étudie les s de ce mouvement et en donne les équations qui satisfont au

principe de la conservation de la force vive. La discussion de ces équations conduit aux résultats suivants :

1° La quantité d'électricité du courant inducteur est indépendante de la présence du courant induit, que ce dernier soit ouvert ou fermé;

2° Dans un conducteur induit, soit fermé, soit ouvert, se meut toujours la même quantité d'électricité; seulement, pour le premier cas, le mouvement a lieu dans un même sens, et, pour le second cas, dans deux sens opposés.

[illegible] (V.-A.). — *Nouvelle théorie du champ de la vision et du grossissement des instruments d'optique.* (14 p.)

Cette théorie consiste à considérer un instrument d'optique comme une ouverture simple, et l'image produite comme un objet placé en arrière de cette ouverture à une distance convenable. À ce point de vue, la loupe peut être envisagée comme une ouverture en arrière de laquelle, au lieu d'un objet très-petit, on a placé un objet très-grand dont la dimension est déterminée par l'angle que forment les deux lignes allant du centre de la loupe aux extrémités de l'objet, la distance de cet objet pouvant être calculée d'après la formule connue.

L'auteur étudie principalement la lunette de Galilée, dont la théorie admise jusqu'ici est erronée, et il donne pour expression du diamètre du champ de vision la formule suivante :

$$\frac{360°}{2\pi}\cdot\frac{l}{F-F_2}\cdot\frac{F_2}{F},$$

dans laquelle l est le diamètre de l'objectif, F, F_2 les distances focales de l'objectif et de l'oculaire. Pour la lunette de Kepler, il arrive à la formule connue.

[illegible] (V.-N.). — *Théorie des dérivées numériques.* Seconde Partie [illegible] 48 p.

Ce Mémoire se divise en trois Chapitres, dont voici les titres :

1° *Séries numériques généralisées*, que l'on peut déduire de l'intégrale prise par rapport aux diviseurs

$$[illegible]$$

---

(1) Voir *Bulletin*, t. III, p. [illegible].

δ et d sont des diviseurs complémentaires du nombre n, c'est-à-
e tels que l'on ait $n = d\delta$.

1° *Liaison des dérivées numériques avec les identités numé-
ues.*

5° *Inversion des séries numériques.* Étant données deux séries
nériques

$$F(n) = \bar{F}(1)E\frac{n}{1} + \bar{F}(2)E\frac{n}{2} + \ldots + \bar{F}(k)E\frac{n}{k} + \ldots,$$

$$\varphi(n) = \bar{\varphi}(1)E\frac{n}{1} + \bar{\varphi}(2)E\frac{n}{2} + \ldots + \bar{\varphi}(k)E\frac{n}{k} + \ldots,$$

$\bar{F}(k)$, $\bar{\varphi}(k)$ sont les coefficients des développements de $F(n)$,
1), on peut toujours trouver le développement de $F(n)$ suivant
fonctions $\varphi(n)$, et réciproquement.

Stolétof (A.-S.). — *Déduction inverse de la loi fondamentale
l'électrodynamique.* (12 p.)

Les lois qui régissent l'action mutuelle de deux éléments de cou-
it ont été déduites des expériences d'Ampère sur l'équilibre des
urants fermés. Cette méthode présente quelques côtés faibles,
s en évidence par plusieurs physiciens. La discussion des expé-
nces fondamentales renferme certains points admis par conven-
n plutôt que rigoureusement démontrés; aussi Grassmann ([1])
Stefan ([2]), tout en prenant pour base ces mêmes expériences,
nt-ils arrivés à des résultats différents. En outre, la théorie d'Am-
re, comme celles qui en dérivent, n'est rigoureuse que pour les
urants fermés, et les travaux de Helmholtz ([3]) montrent que la loi
s *éléments vrais* (d'un courant ouvert) n'est pas celle que l'on
btiendrait en étendant les formules d'Ampère, de Stefan et de
rassmann aux courants ouverts.

Le fait le plus remarquable et le plus incontestable de l'électro-
ynamique est l'identité, à un certain point de vue, des courants
rmés et des aimants. Ce fait, considéré dans la théorie d'Ampère
omme une conséquence de la loi fondamentale, est pris comme
oint de départ par M. Stolétof, qui en déduit des expressions du

---

([1]) *Poggendorff's Annalen*, t. LXIV; 1845.
([2]) *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. LIX; 1869.
([3]) *Crelle-Borchardt's Journal*, t. 72; 1870.

RAKHMANINOF (I.-I.). — *Formule fondamentale de la théorie namique des machines.* (10 p.)

Toute la théorie du travail des organes des machines repose sur principe des forces vives, établi dans l'hypothèse que les liaisons nt indépendantes du temps, ainsi que sur le théorème de Carnot, atif à la perte de force vive produite par le choc. L'auteur établit e expression générale du travail mécanique, en supposant les isons fonctions du temps et en tenant compte du choc instantané i se produit au moment où le moteur commence à agir sur les ganes de la machine.

ZINGER (V.-I.). — *Sur un cas d'équilibre des liquides.* (9 p.)

Ce cas est celui d'un tube cylindrique d'une longueur indéfinie, ongeant verticalement dans un liquide. L'auteur détermine l'at-action exercée par le tube sur le liquide, et la forme d'équilibre la surface de celui-ci autour du tube et dans son intérieur, en mettant que le tube attire le liquide d'après la loi de Newton et isant abstraction des actions moléculaires.

SLOUDSKY (F.-A.). — *Détermination du solide produisant une traction locale donnée.* (4 p.)

La formule de Gauss [1]

$$\int \frac{dV}{dn_i}\, dS = 4\pi M,$$

lative à l'influence d'un corps perturbateur sur la longueur du endule à seconde, peut être mise sous la forme

$$\int \delta l\, dS = \frac{4\pi M}{g},$$

l étant la variation locale de la longueur du pendule; sous cette rme, elle peut servir à déterminer la masse M du corps perturba-ur. L'auteur ajoute quelques considérations en vue de la détermi-tion de la position et de la forme de ce corps.

SONINE (N.-I). — *Sur l'intégration d'une équation diffé-ntielle complète, de la forme*

$$(A + Cz)\, dx + (B + Dz)\, dy + K\, dz = 0$$

l'occasion d'une Dissertation de M. ANDRÉIEFSKY). (17 p.)

---

[1] *Allgemeine Lehrsätze*, § 36 (Gauss Werke, Bd. V.).

Les coefficients A, C, B, D, K représentent ici des fonctions de x et de y seulement. L'auteur examine surtout le cas où z est une fonction de x, de y et des dérivées des divers ordres de y par rapport à x, c'est-à-dire le cas où l'on a

$$z = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}).$$

Il donne une formule générale exprimant les intégrales de toutes les équations de la forme considérée.

KRASNOKHOV (M.-F.). — ***Remarque sur le calcul** des orbites des planètes et des comètes, d'après la méthode de Gauss.* (8 p.)

Suivant la méthode de Gauss, le calcul d'une orbite dépend de certaines fonctions P, Q [1], exprimées au moyen des rapports des aires décrites par les rayons vecteurs aux surfaces des triangles correspondants. Ces rapports étant eux-mêmes inconnus, l'évaluation de P et de Q entraîne à des calculs longs et pénibles. En introduisant, à la place de ces rapports, les éléments des orbites, on parvient à obtenir plus simplement les expressions de ces fonctions. Ces expressions sont les mêmes que celles qui ont été trouvées par Gauss [2].

BERDICHEVSKY (F.-A.). — *Quelques mots à propos de la nouvelle théorie de M. Lioubimof.* (6 p.)

L'auteur remarque que la théorie de la lunette de Galilée, donnée par M. Lioubimof dans son Mémoire intitulé : « Nouvelle théorie du champ de vision et du grossissement des instruments d'optique » [3], n'est autre chose qu'une application du cercle annulaire de Biot, et que la formule qu'il a obtenue a été donnée depuis longtemps par Brandes, dans un article étendu sur les télescopes, inséré dans le *Dictionnaire de Physique* de Gehler.

IIe Partie.

Suite de la traduction de l'*Aperçu historique* de M. Chasles. (32 p.)

SERDOBINSKY (V.-E.). — *Application du théorème de Ménélaüs à la démonstration de quelques porismes d'Euclide.* (45 p., 2 pl.)

---

(1) *Theoria motus corporum cœlestium*, p. 156.

(2) *Ibid.*, p. 191.

(3) Voir *Bulletin*, t. III, p. 200, et l'*art. actuel*, p. 296.

e but de ce Mémoire est de donner à la jeunesse russe une idée porismes d'Euclide, tels qu'ils ont été rétablis par M. Chasles. ateur démontre cinquante-sept de ces porismes à l'aide du théo-e de Ménélaüs relatif à une transversale coupant les côtés d'un ngle ([1]). A. P.

MÉLANGES.

L'ELLIPSOÏDE DE VOLUME MINIMUM PARMI CEUX DANS LESQUELS UN CERTAIN NOMBRE DE SECTIONS CENTRALES ONT DES AIRES DONNÉES;

PAR M. C.-W. BORCHARDT.

Extrait du *Compte rendu mensuel de l'Académie royale des Sciences de Berlin,* Juin 1872.)

Après avoir résolu, par une méthode algébrique spéciale, le blème, posé par Lagrange, de la détermination du tétraèdre de ume maximum dont les quatre faces ont des aires données, et ttension de ce problème à un nombre quelconque de dimensions, avoir publié cette solution dans les *Mémoires* de cette Académie ar l'année 1866, p. 123, je trouvai, dans l'année 1867, que la estion algébrique à laquelle conduit le problème de Lagrange est sceptible d'une autre interprétation géométrique, relative à l'el-soïde, savoir, la détermination de l'ellipsoïde de moindre vo-ne, étant données les aires de quatre sections centrales faites r des plans donnés de position. Ce résultat et la solution de deux oblèmes sur l'ellipsoïde qui se rattachent à celui-là ont fait l'objet ıne Communication, adressée par moi à l'Académie, le 5 dé-mbre 1867 (*voir* les *Comptes rendus mensuels* de 1867, p. 779), ıs que j'aie, toutefois, publié les résultats obtenus. Ceux-ci étant tés, de cette manière, inconnus en dehors des limites de l'Aca-

---

[1]) Nous nous permettrons, au nom des abonnés bibliophiles de ce *Journal,* de plier l'éditeur de ne plus mutiler les marges des livraisons, comme on l'a fait r la dernière que nous avons reçue. (*Note de la Rédaction.*)

démie, il me semble à propos de rattacher à la Communication que vient de faire mon ami M. Kronecker [1], dans laquelle il a également appliqué la solution d'un même problème algébrique, d'une part, au problème du tétraèdre de Lagrange, et, d'autre part, à un problème de maximum et de minimum concernant l'ellipsoïde, une exposition de mes recherches de l'année 1868.

Il ressortira de là que les deux problèmes de maximum et de minimum concernant l'ellipsoïde, dont M. Kronecker s'occupe en ce moment et que j'ai étudiés il y a cinq ans, malgré la diversité des formes géométriques dont ils sont revêtus, ne sont pas cependant essentiellement distincts au point de vue algébrique, puisque, dans les deux problèmes, on donne au déterminant d'une forme quadratique ternaire sa valeur maximum, tandis que dans l'un la forme elle-même, dans l'autre la forme adjointe prend des valeurs données pour des systèmes connus de valeurs des variables, et que, de plus, comme on sait, le déterminant de la forme adjointe est le carré du déterminant de la forme primitive.

« Soient donnés p plans, passant tous par le centre connu d'un ellipsoïde variable d'ailleurs. Supposons que l'on donne la surface de l'ellipse suivant laquelle chacun de ces plans centraux coupe l'ellipsoïde. Il s'agit alors, parmi tous les ellipsoïdes dans lesquels ces p sections centrales ont des aires données, de déterminer celui dont le volume est minimum. »

Le nombre p, qui reste encore indéterminé, doit, bien entendu, être moindre que 6, puisque la détermination d'un ellipsoïde de centre donné ne dépend plus que de six éléments.

En coordonnées rectangulaires x_1, x_2, x_3, dont l'origine est au centre de l'ellipsoïde, soit $f = 1$ l'équation de cette surface, où

$$f = \sum a_{gh} x_g x_h; \qquad (g, h = 1, 2, 3)$$

supposons, de plus, les plans des p sections centrales déterminés par les équations

$$u_i = \alpha_1^i x_1 + \alpha_2^i x_2 + \alpha_3^i x_3 = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

de sorte que les $3p$ quantités α sont données, et que les six coeffi-

[1] Voir *Bulletin*, t. IV, p. 256.

$_{gh}$ de la forme ternaire f sont les variables du problème.
e problème proposé, au point de vue algébrique, s'énoncera
il suit :
ndre maximum le déterminant

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

éterminants

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \alpha_1^i \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \alpha_2^i \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \alpha_3^i \\ \alpha_1^i & \alpha_2^i & \alpha_3^i & 0 \end{vmatrix}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

es valeurs négatives données $-K_i$. »
nt A_{gh} les quantités adjointes des a_{gh}, de sorte que

$$A_{gh} = \frac{\partial A}{\partial a_{gh}};$$

loppement de Δ_i donnera

$$-\Delta_i = \sum_{g,h} A_{gh} \alpha_g^i \alpha_h^i,$$

e sorte que, en désignant par $F(x_1, x_2, x_3)$ la forme adjointe
$_i$ représentera la valeur de F pour les valeurs α_1^i, α_2^i, α_3^i des
es. On a alors, par différentiation,

$$\left.\begin{aligned} 2\,dA &= \sum a_{gh}\, dA_{gh}, \\ -d\Delta_i &= \sum \alpha_g^i \alpha_h^i\, dA_{gh}. \end{aligned}\right\} \qquad (g, h = 1, 2, 3)$$

les différentielles des p expressions Δ_i s'annulant, puisque
des Δ_i doit être égal à une constante donnée $-K_i$, et la
ntielle de A s'annulant aussi, puisque A doit être un maxi-
on obtient, d'après les règles du Calcul différentiel, les équa-
u problème, en égalant à zéro la somme

$$2\,dA + \lambda_1 d\Delta_1 + \ldots + \lambda_p d\Delta_p,$$

ne connu sur les déterminants, l'expression combinatoire

$$A = \sum (ikl)^2 \lambda_i \lambda_k \lambda_l,$$

ommation devant s'étendre à toutes les $\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}$ combisons i, k, l des indices $1, \ldots, p$. De plus, les p expressions

$$K_i = -\Delta_i = \sum A_{gh} \alpha_g^i \alpha_h^i \qquad (g, h = 1, 2, 3)$$

transforment, à l'aide de l'équation (1), en

$$K_i = \sum_{g,h} \frac{\partial A}{\partial a_{gh}} \frac{\partial a_{gh}}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial A}{\partial \lambda_i},$$

il en résulte les p équations

$$K_i = \sum_{k,l} (ikl)^2 \lambda_k \lambda_l,$$

la sommation doit s'étendre aux $\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}$ combinaisons l des indices $1, \ldots, p$, à l'exclusion de i.

Par là, le problème de maximum et de minimum est ramené au blème algébrique de déduire des p équations (4)* les p multicateurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, c'est-à-dire d'exprimer ces multiplicateurs au yen des p constantes données K_i et des $\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}$ déternants (ikl), ces derniers devenant de simples grandeurs anguces, si l'on assujettit les quantités α_1^i, α_2^i, α_3^i, pour chaque valeur i, à la condition que la somme de leurs carrés soit $= 1$, ce qui délivre du facteur arbitraire qu'elles renfermeraient sans cela. r la substitution des multiplicateurs obtenus $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dans la ction

$$f = \sum \lambda_i u_i^2 = \sum \lambda_i (\alpha_1^i x_1 + \alpha_2^i x_2 + \alpha_3^i x_3)^2, \quad (i = 1, \ldots, p)$$

quation $f = 1$ de l'ellipsoïde cherché se trouve enfin déterminée.

Il y a maintenant trois cas, $p = 3, 4, 5$, à considérer séparément.

Cas de trois sections centrales. — Dans ce cas, en vertu de l'équan (5), les trois plans $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ des sections cen-

ire (3) et (4)* a, dans ce cas, la forme suivante :

$$A = \sum (ikl)^2 \lambda_i \lambda_k \lambda_l, \qquad (i, k, l = 1, \ldots, 5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = \frac{\partial A}{\partial \lambda_1} = \left\{ \begin{array}{l} (123)^2 \lambda_2 \lambda_3 + (124)^2 \lambda_2 \lambda_4 + (125)^2 \lambda_2 \lambda_5 \\ + (145)^2 \lambda_4 \lambda_5 + (135)^2 \lambda_3 \lambda_5 + (134)^2 \lambda_3 \lambda_4, \end{array} \right. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

lalgré leur apparente complication, la résolution de ces équa-
s n'exige, comme nous le montrerons plus loin, que deux ex-
tions de racines carrées consécutives.

e premier membre f de l'équation de l'ellipsoïde ordonné sui-
t les coordonnées x_1, x_2, x_3, est

$$f = \sum a_{gh} x_g x_h, \qquad (g, h = 1, 2, 3)$$

es coefficients ont pour valeurs, d'après l'équation (1),

$$a_{gh} = \sum_i \lambda_i \alpha_g^i \alpha_h^i. \qquad (i = 1, \ldots, 5)$$

intre ces six équations (pour g, h = 1, 2, 3), on peut éliminer
cinq multiplicateurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$. Le résultat de l'élimination
st représenté par

$$\sum B_{gh} a_{gh} = 0, \qquad (g, h = 1, 2, 3)$$

uation (6) devra devenir identique, si l'on y substitue aux a_{gh}
s expressions (1). Les B_{gh} doivent donc satisfaire aux cinq
ations

$$\sum B_{gh} \alpha_g^i \alpha_h^i = 0, \qquad (g, h = 1, 2, 3)$$

r $i = 1, \ldots, 5$. Or ces équations définissent les quantités ad-
ites des coefficients b_{gh} de la forme ternaire

$$\varphi = \sum b_{gh} x_g x_h, \qquad (g, h = 1, 2, 3)$$

, étant égalée à zéro, détermine le cône du second degré tangent
: cinq plans $u_i = 0$; car, pour que le cône $\varphi = 0$ touche les cinq

plans $u_i = 0$, il faut que les cinq équations

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \alpha_1^i \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \alpha_2^i \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \alpha_3^i \\ \alpha_1^i & \alpha_2^i & \alpha_3^i & 0 \end{vmatrix} = 0$$

soient satisfaites pour $i = 1, \ldots, 5$, lesquelles équations, développées suivant les quantités B_{gk} adjointes des b_{gk}, donnent les équations (7). *Les coefficients* B_{gk} *dans les équations* (6) *ne sont donc autre chose que les quantités adjointes des coefficients* b_{gk} *de la forme ternaire* $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, *qui, égalée à zéro, détermine le cône tangent aux cinq sections centrales* $u_i = 0$.

En multipliant l'équation (6) par A, et remplaçant les produits $A a_{gk}$ par leurs expressions au moyen des quantités adjointes A_{gk}, il vient

$$(6)^* \quad B_{11}(A_{22}A_{33} - A_{23}^2) + \ldots + 2B_{23}(A_{12}A_{13} - A_{11}A_{23}) + \ldots = 0.$$

Entre les six quantités A_{gk} il existe déjà les cinq équations

$$(4) \qquad K_i = \sum_{g,h} \alpha_g^i \alpha_h^i A_{gh},$$

qui définissent les cinq quantités K_i comme fonctions linéaires des A_{gh}. En introduisant arbitrairement une sixième fonction linéaire homogène

$$(9) \qquad U = \sum_{g,h} q_{gh} A_{gh};$$

puis, en exprimant, par la résolution de ces équations, les A_{gk} en fonctions linéaires homogènes de $K_1, \ldots, K_5$, U et portant ces valeurs dans $(6)^*$, cette équation se changera en une équation du second degré en U. La résolution de cette dernière donnera pour U une fonction linéaire homogène des quantités K_i, augmentée de la racine carrée $\sqrt{R}$ d'une fonction quadratique homogène des K_i; par conséquent, les quantités A_{gk} et leur déterminant A^2, ainsi que les produits $A a_{gh}$, $A\lambda_i$, peuvent s'exprimer en fonctions entières de $K_1, \ldots, K_5$ et de $\sqrt{R}$; d'où l'on voit que, pour obtenir A, on a besoin d'une seconde extraction de racine carrée. Ce qui précède peut donc se résumer ainsi :

La forme ternaire $f(x_1, x_2, x_3)$, qui compose le premier
nbre de l'équation de l'ellipsoïde, étant multipliée par son déter-
iant A, peut s'exprimer au moyen d'un seul radical carré $\sqrt{R}$.
n est de même du carré du déterminant A. L'expression de f
-même exige deux extractions consécutives de racines carrées. »
Le développement du calcul qui donne la solution des cinq équa-
is (4)*, et dont on peut apercevoir sans aucune difficulté la
rche générale, conduit à des résultats intéressants.

Le radical $\sqrt{R}$, qui se présente dans la résolution de l'équation
idratique, est, comme il est aisé de s'en convaincre, indépen-
it du choix des coefficients q_{gh} de l'équation (9). Ces coefficients
ntrent que dans la fonction linéaire des K_i, qu'il faut ajouter à
I pour obtenir U; mais, comme cette fonction linéaire des K_i,
e je désignerai par U_0, peut elle-même se mettre aussi sous la
me d'une fonction linéaire des A_{gh}, il existe une nouvelle fonc-
n linéaire homogène,

$$T = U - U_0$$

es A_{gh}, indépendante du choix des coefficients q_{gh}, et dont le
arré $= R$; en d'autres termes, *les coefficients q_{gh} peuvent être
articularisés de telle manière que la fonction* U, *définie au
noyen de ces coefficients par l'équation* (9), *et que j'appelle-
ai* T, *dépende d'une équation quadratique pure.*

Cette particularisation, abstraction faite d'un facteur arbitraire
ffectant la fonction T tout entière, ne peut s'effectuer que d'*une
eule* manière, savoir, comme il est facile de le démontrer, en po-
ant $q_{gh} = b_{gh}$, et, par suite,

10) $$T = \sum_{g,h} b_{gh} A_{gh},$$

s b_{gh} étant toujours les coefficients, définis par (8), de l'équation
= o du cône tangent.

On peut donner, comme on sait, à l'équation $\varphi = 0$ du cône tan-
nt, différentes formes, dont une particulièrement simple, que l'on
tient en rapportant le cône à trois quelconques des cinq plans
= o. La fonction φ, exprimée au moyen de u_1, u_2, u_3, par

exemple, prend la forme

$$\varphi = \mu_1^2 u_1^2 + \mu_2^2 u_2^2 + \mu_3^2 u_3^2 - 2\mu_2\mu_3 u_2 u_3 - 2\mu_1\mu_3 u_1 u_3 - 2\mu_1\mu_2 \ldots$$

où

$$\mu_1 = (234)(235)(145), \quad \mu_2 = (134)(135)(245), \quad \mu_3 = (124)(125 \ldots$$

Si l'on conçoit que le facteur arbitraire, contenu dans les [illegible]cients b_{gh} de l'équation (8), soit déterminé de cette manière, le déterminant B de cette équation deviendra $= -4\varpi^2$, [illegible]gnant le produit de tous les dix déterminants (ikl). Si, de p[illegible] substitue dans (10) les valeurs des coefficients b_{gh}, et que l'[illegible] les A_{gh} en vertu de l'équation (2), au moyen des λ, [illegible] pour T l'expression symétrique

$$T = [(123)(124)(125)(345)]^2 \lambda_1 \lambda_2 + \ldots,$$

la somme devant s'étendre aux dix termes formés d'après [illegible].

[illegible] de la fonction T, *donnée dans l'équatio[n]* [illegible] *la formation du déterminant de la form[e]* [illegible] $- \varrho\varphi$, ou, ce qui revient au même, *à la* [illegible] *du troisième degré en* ρ, *dont dépend la* [illegible] *conjugués, commun à l'ell*[illegible] $\varphi = 0$. En effet, si l'on dévelo[ppe] [illegible] puissances de ϱ, A sera le terme in[dépendant] [illegible] T sera, d'après l'équation (10), le coefficien[t] [illegible] d'après l'équation (8), celui de ρ^2; enfin $-B$ sera le coefficient de ρ^3. L'équation du troisième degré en q[uestion] sera donc

$$\text{(12)} \qquad A - T\varrho - 4\varpi^2\varrho^3.$$

Les valeurs des A_{gh}, tirées des six équations (4), (10), étan[t sub]stituées dans (8) et dans le déterminant A^2 des A_{gh}, donn[ent les] équations

$$\text{(13)} \qquad T = R \ldots R\,K \ldots - R_1 K_1 K_2 + \ldots,$$

$$\text{(14)} \qquad \ldots = -\tfrac{1}{2} S - R^{\frac{3}{2}}.$$

$$S = S_{111}K_1^3 + \ldots + S_{112}K_1^2K_2 + \ldots + S_{123}K_1K_2K_3 + \ldots.$$

s coefficients $R_{11}, \ldots$ et $S_{111}, \ldots$, qui entrent ici, peuvent, ès mes calculs de 1867, se représenter comme il suit :
rmons, au moyen des déterminants (ikl), les produits

$$r_{gh} = (ghi)(ghk)(ghl),$$

désignant une permutation des cinq indices 12345, et com-
s, au moyen de ces produits, les expressions

$$s_{ik}^{gh} = r_{gi}r_{hk} + r_{gk}r_{hi}.$$

$_{gh}$ sont des fonctions alternées de leurs indices, de sorte que
$-r_{gh}$; les s_{ik}^{gh} sont des fonctions qui restent invariables :
ınd on échange entre eux leurs indices supérieurs; 2° quand
hange entre eux leurs indices inférieurs; 3° quand on échange
ıis les deux indices supérieurs avec les deux indices inférieurs.
posé, les coefficients des équations (4) sont donnés par les for-
s

$$\left\{\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{2}(r_{23}^2 r_{45}^2 + r_{24}^2 r_{35}^2 + r_{25}^2 r_{34}^2), \\ R_{12} &= r_{13} r_{23} r_{45}^2 + r_{14} r_{24} r_{35}^2 + r_{15} r_{25} r_{34}^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} S_{111} &= s_{45}^{23} s_{35}^{24} s_{34}^{25}, \\ S_{112} &= s_{45}^{13} s_{35}^{24} s_{34}^{25} + s_{45}^{25} s_{35}^{14} s_{34}^{25} + s_{45}^{23} s_{35}^{24} s_{34}^{15}, \\ S_{123} &= s_{45}^{23}(s_{25}^{14} s_{34}^{15} + s_{24}^{15} s_{35}^{14}) + s_{45}^{13}(s_{15}^{24} s_{34}^{25} + s_{14}^{35} s_{35}^{24}) \\ &\qquad + s_{45}^{12}(s_{25}^{34} s_{14}^{35} + s_{24}^{35} s_{15}^{34}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

ns ces formules, il n'entre ainsi que les deux fonctions homo-
R et S des cinq quantités $K_1, \ldots, K_5$, lesquelles sont com-
s symétriquement avec ces quantités, et dont l'une est du
d ordre, l'autre du troisième.

rès le calcul des irrationnelles $\sqrt{R}$ et $\sqrt{-\frac{1}{2}S + R^{\frac{3}{2}}}$, les dif-
ts multiplicateurs λ s'obtiennent, comme on l'a vu plus haut,
forme de fractions, dont le dénominateur commun se com-

pue de la seconde de ces irrationnelles, tandis que les numérateurs sont des fonctions homogènes du second ordre des six quantités $K_1, \ldots, K_5, \sqrt{R}$.

Tout en réservant pour une autre occasion la discussion des valeurs que l'on vient de trouver, je résumerai comme il suit le résultat algébrique obtenu pour le cas de cinq sections centrales :

« Pour résoudre le système d'équations

$$K_1 = \frac{\partial A}{\partial \lambda_1}, \ldots, \quad K_5 = \frac{\partial A}{\partial \lambda_5},$$

où

$$A = \sum (ikl)^2 \lambda_i \lambda_k \lambda_l \qquad (i, k, l = 1, \ldots, 5)$$

$$(ikl) = |x_g^h|, \qquad \begin{pmatrix} g = i, k, l \\ h = 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

et dont dépend la détermination de l'ellipsoïde de moindre volume parmi ceux pour lesquels cinq sections centrales ont des aires données, joignons aux cinq fonctions $K_1, \ldots, K_5$, quadratiques et homogènes par rapport à $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$, une sixième fonction

$$T = [(123)(124)(125)\ldots(345)]^2 \lambda_1 \lambda_2 + \ldots;$$

le carré de T pourra être représenté sous forme d'une fonction R, quadratique et homogène de $K_1, \ldots, K_5$, en vertu des équations (12), (12)*. A l'aide du radical carré $T = \sqrt{R}$, on pourra ensuite mettre le carré de A, abstraction faite d'un facteur indépendant des K, sous la forme

$$-\frac{1}{2} S + R^{\frac{3}{2}},$$

$-\frac{1}{2} S$ étant une fonction homogène du troisième ordre de $K_1, \ldots, K_5$, donnée par les équations (14), (14)*; enfin chacune des quantités $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ sera exprimable par une fraction ayant pour dénominateur

$$\sqrt{-\frac{1}{2} S + R^{\frac{3}{2}}},$$

et pour numérateur une fonction quadratique homogène des six quantités $K_1, \ldots, K_5, \sqrt{R}$. »

NOTICE SUR LES TRAVAUX DE JULES PLÜCKER;

PAR M. P. MANSION.

Au commencement de ce siècle, l'Allemagne ne possédait guère e deux géomètres, Gauss et Pfaff, tandis qu'en France une iade de savants illustres travaillaient avec ardeur aux progrès Mathématiques. A partir de 1826, il n'en est plus ainsi. Les vaux et les leçons de Jacobi et de Dirichlet suscitent de nomuses et belles recherches d'Analyse, tandis que Möbius, Steiner Plücker étendent les limites de la Géométrie. Nous résumons la Notice consacrée par M. Clebsch à la mémoire du dernier de savants ([1]).

1. Jules Plücker, né à Elberfeld, le 16 juin 1801, fit ses études gymnase de Düsseldorf, aux Universités de Bonn, de Heidelberg de Berlin, et à Paris. Il fut successivement privat-docent (1826) professeur extraordinaire (1828-1833) à l'Université de Bonn, au mnase Frédéric-Guillaume, à Berlin (1833), professeur ordinaire Halle (1834) et à Bonn (1836). Il enseigna à la fois les Mathémaues et la Physique dans cette dernière ville. Jusqu'en 1840, tous s efforts furent consacrés à la Géométrie; il publia sa *Géométrie l'espace,* en 1846, et, à partir de cette époque jusqu'en 1864, il occupa exclusivement de Physique. Dans les dernières années de vie, il revint aux Mathématiques pour créer la nouvelle Géoétrie, fondée sur la considération de la ligne droite comme élément de l'espace. Il mourut le 22 mai 1868.

Les recherches de Physique de Plücker, comme ses recherches géoétriques, montrent bien la tendance d'esprit de cet homme éminent. aimait mieux étudier sans cesse de nouvelles séries de phénoènes physiques et mathématiques, étendre les limites des deux iences qu'il cultivait avec tant d'ardeur, que de scruter minutieunent un petit nombre de faits et de problèmes. De là la nature

---

[1]) *Voir* le travail de M. CLEBSCH : *Zum Gedächtniss an Julius Plücker* (*Mém. de tingue,* t. XVI). Nous avons traduit ce Mémoire en français, et il a été inséré dans *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche* de M. le ce B. Boncompagni, t. V, p. 183-212. Le Mémoire original et la traduction se vent aussi séparément.

qualitative de ses recherches de Physique, de là aussi la multiplicité des aperçus et des points de vue nouveaux que renferment ses Ouvrages et surtout ses Mémoires de Géométrie. Plutôt porté à produire qu'à analyser, Plücker négligea souvent l'étude des publications contemporaines, et refit des découvertes que d'autres avaient déjà publiées. Le contraire arriva souvent aussi.

Plücker a rendu un grand service à cette partie de la Géométrie, que nous appelons maintenant *Géométrie projective*, et qu'il a tant contribué à créer, en mettant ses découvertes sous une forme analytique, quelque imparfaite qu'elle puisse paraître à notre génération, habituée à l'élégance des méthodes modernes. L'Analyse permit en effet à Plücker d'introduire dans ses recherches des idées fondamentales, dont la méthode synthétique ne s'est rendue maîtresse que plus tard : d'abord l'idée des courbes et des surfaces générales, élucidée plus tard par Grassmann, puis les imaginaires que v. Staudt a rendues plus tard encore accessibles à la Géométrie pure.

2. Carnot et Monge, le dernier surtout, ont été les précurseurs de la Géométrie moderne, dont Poncelet semble avoir été le vrai créateur, en introduisant dans la Science la méthode projective et un grand nombre d'idées importantes, dont Gergonne se fit l'ardent promoteur. Plücker, en étudiant les Mémoires de ce dernier, découvrit, en même temps que Bobillier, la *méthode des notations abrégées*, qui permet de composer *a priori* l'équation d'une figure, et d'en lire ensuite les propriétés de celle-ci. Plücker fit de belles applications de cette méthode à la théorie des courbes du troisième ordre.

Les propriétés du pôle et de la polaire relativement aux coniques avaient permis à Poncelet d'établir le principe de *dualité*, principe qui s'étendait de lui-même à l'espace. Gergonne donna à la théorie des courbes et des surfaces la forme dualistique qui caractérise actuellement la Géométrie, mais en enlevant au principe de Poncelet sa vraie base, la théorie des pôles et des polaires. Plücker, en étudiant à fond cette théorie de la corrélation, la fit reposer sur la notion des coordonnées de la droite ou du plan. La relation de la forme

$$[illegible] \quad \text{ou} \quad ux + vy + wz + 1 = 0,$$

existe entre les coordonnées de la droite ou du plan (u et v, ou et w), et celle du point (x et y, ou x, y et z) étant symétrique rapport à ces deux sortes de quantités, le principe de dualité ent évident, et la notion de classe imaginée par Gergonne re son interprétation naturelle dans l'équation tangentielle e courbe ou d'une surface. Plücker vit parfaitement d'ailleurs l'on pouvait imaginer des corrélations d'ordre supérieur.

ι fond, le principe de dualité est démontré de la même manière, sous une forme moins saisissante, dans l'admirable livre de us, sur le *Calcul barycentrique*, où il manque, il est vrai, des coordonnées des plans et des droites, mais qui contient des idées fondamentales de la Géométrie moderne (le rapport rmonique, les coordonnées homogènes, les diverses sortes de lations, les courbes et les surfaces à coordonnées rationnelles nction d'un paramètre). On ne connut l'importance de cet age de Möbius que plus tard, quand les idées fondamentales rent exposées sous une forme plus systématique par Steiner, rtout par Chasles (*Aperçu historique*), qui y était arrivé par de ses propres études. Plücker étudia très-peu les corrélations re supérieur, signalées déjà par Poncelet et étudiées plus tard Iagnus, Steiner, Möbius, et surtout par Cremona.

ücker introduisit aussi dans la Science les *coordonnées homo-s*, qui devaient servir à Hesse pour relier la Géométrie à l'Al-e moderne; mais il faut remarquer que les coordonnées bary-riques de Möbius sont au fond la même chose que les coordonnées ogènes. A Plücker revient l'honneur d'avoir vu toute l'impor-e de celles-ci, pour donner une forme définitive aux équations tangentes et des points-contacts et à la théorie générale des po-s, grâce aux propriétés des fonctions homogènes.

Cramer et Euler avaient remarqué, au siècle passé, qu'il t qu'un certain nombre des points d'intersection de deux courbes connu pour que les autres soient déterminés. Il s'écoula beau- de temps avant que l'on vît la portée de cette remarque. Lamé, emier, donna à ce sujet ce théorème que, par les n^2 points d'in-ction de deux courbes d'ordre n, $C_n = 0$ et $C'_n = 0$, en pas- une infinité $C_n + \lambda C'_n = 0$ de même ordre, et Gergonne fit aître un principe plus général encore. Plücker découvrit quel

[illegible]

6. [illegible] a consacré une grande partie de ses ouvrages [illegible] [illegible] points sur une [illegible] [illegible] qui sont réels, qu'il y a [illegible] lignes [illegible] [illegible] Moebius a simplifié cette théorie. Hesse l'a complétée et étendue aux courbes quelconques. Il a aussi étudié, ainsi que Sylvester, Cayley, Salmon et Clebsch, les équations du troisième degré résolubles, qui donnent les points d'inflexion des cubiques. Plucker a trouvé bien des théorèmes curieux sur ces courbes, entre autres le théorème relatif à la conique surosculatrice. Disons, en

-ant, que sa classification des cubiques, tout ingénieuse qu'elle , est moins simple que celle de Salmon, dont le germe se trouve Möbius. Quant aux courbes du quatrième ordre, Plücker en nné deux classifications, fondées, l'une sur la nature de leurs nches infinies, l'autre, plus importante, sur leurs singularités. montré que ces courbes ont vingt-huit tangentes doubles, par-toutes réelles; mais il s'est trompé sur leur position relative, Steiner et surtout Hesse ont fait connaître d'une manière :te.

'Ouvrage qui contient ces recherches (la *Théorie des courbes ébriques*) appelle l'attention des géomètres sur la *Méthode l'énombrement des constantes,* dont l'idée fondamentale est à près celle-ci : un système d'équations, correspondant à un blème *déterminé,* est résoluble quand le nombre des équations égal au nombre des inconnues.

ignalons encore, parmi les sujets traités par Plücker dans sa nière période d'activité géométrique : 1° la théorie générale des rs, auparavant effleurée par Poncelet, et étudiée ensuite par nmer, Salmon, Hart, Chasles et Cayley; 2° la théorie du tact des surfaces; 3° la Géométrie sur les surfaces du second re, où il fut le précurseur de Chasles; 4° enfin les propriétés de *urface des ondes,* sujet repris et étendu par Kummer et Klein.

5. La *Géométrie linéaire* est la dernière création de Plücker, et le peut-être qui a ouvert aux mathématiciens le champ le plus ndu d'explorations et de découvertes.

Les idées fondamentales de cette Géométrie se retrouvent dans is cycles de recherches antérieures. On n'y trouve pas explici-nent, mais implicitement, l'idée des complexes et des congruences nsemble des droites dont les paramètres satisfont à une ou à deux uations). Dans le premier cycle, qui est purement géométrique, faut signaler, relativement à des complexes du premier ordre, des émoires de Möbius, de Magnus, de Chasles et de Sylvester; re-ivement à des complexes du second ordre, des recherches de et et de Chasles, complétées récemment par Reye, Lie et iller; enfin, au point de vue général, un grand travail de Cayley, , d'ailleurs, apparait déjà la trace des idées de Plücker. Le second le de recherches sur la Géométrie linéaire appartient à la Méca-

nique. Poinsot, Chasles, Möbius, Sylvester, Cayley, principalement dans l'étude des systèmes de forces qui peuvent remplacer un système donné, ont trouvé des théorèmes qui ne s'exposent simplement que dans la nouvelle Géométrie linéaire. La théorie des systèmes de rayons est encore plus rapprochée de la Géométrie plückérienne que les recherches précédentes. Monge, Möbius et Sturm et, plus récemment, Hamilton, Kummer et Abel Transon ont étudié des systèmes de rayons (*congruences* de Plücker).

Plücker a donné, dans sa *Géométrie de l'espace* (1846), l'idée fondamentale de la Géométrie linéaire; mais il ne put faire fructifier cette idée que quand il l'eut associée à celle de complexe. Dans sa nouvelle conception, la ligne droite, la surface réglée, la congruence et le complexe sont comme les étages successifs d'une nouvelle Géométrie. Plücker a très-bien signalé cette conséquence de l'existence de quatre variables dans l'équation du complexe : la Géométrie linéaire est une sorte de Géométrie à quatre dimensions. En général, disait-il, même dans le plan, on peut construire une Géométrie à autant de dimensions que l'on veut, c'est-à-dire, pour parler plus clairement, on peut y étudier une figure fondamentale dans l'équation de laquelle entrent autant de paramètres variables que l'on veut. L'Ouvrage de Plücker et ses Mémoires sur la Géométrie linéaire sont consacrés surtout à l'étude des complexes du second ordre. Ces derniers travaux du géomètre de Bonn ne sont pas à la hauteur de la Science, au point de vue de la forme analytique; mais les idées qui en constituent le fond, par leur fécondité et leur portée, ont déjà eu une grande influence sur le développement de la Science, comme on peut le voir dans les écrits de Klein, de Lie et de Clebsch. L'importance des travaux antérieurs de Plücker a parfois été méconnue ou même niée. Dieu ne pouvait lui préparer une plus belle compensation à cette injustice de ses contemporains qu'en lui permettant de créer, au soir de sa vie, une nouvelle branche de la Science, dont la haute importance est incontestable.

6. Le Mémoire de Clebsch, dont nous faisons ici l'analyse, contient une Notice de M. le professeur Hittorf sur les travaux de Physique de Plücker. Ne pouvant la résumer ici, nous nous contenterons de dire que l'on doit à cet homme éminent l'étude du ma-

ne et du diamagnétisme des cristaux, et celle de l'action décharge électrique sur les gaz raréfiés. Avant Bunsen et ıoff, il annonça que les raies du spectre sont caractéristiques haque substance, et qu'elles peuvent être utilisées dans l'ana-imique; il découvrit aussi, avec M. Hittorf, que l'écartement es du spectre se produisait sous l'influence d'une chaleur in-résultat de la plus haute importance pour l'étude de l'atmo- solaire. Plücker avait, en Physique comme en Géométrie, rit essentiellement généralisateur; les recherches originales isaient par-dessus tout, de sorte que, dans ce domaine aussi, t pas souvent une attention suffisante aux travaux de ses con-rains. Il ne pouvait se résoudre à l'étude pénible des résultats ıs par d'autres physiciens. Quand un pareil examen se pré-naturellement, il préféra retourner à ses recherches géomé-s. Les mathématiciens s'en consoleront aisément, puisque c'est circonstance que nous devons une partie de la science, à le restera, il faut l'espérer, le nom de *Géométrie plückérienne*.

P. Mansion.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

r et Bouquet, professeurs à la Faculté des Sciences. — Théorie Fonctions elliptiques. — Deuxième édition. Premier fascicule. Paris, Gauthier-Villars; 1873. 1 vol. in-4°. 30 fr.

IAISSANCE DES TEMPS et des Mouvements célestes, à l'usage des tronomes et des Navigateurs, pour l'an 1875, publiée par le reau des Longitudes. Avec Additions. 1 vol. in-8°. 6 fr. 50.

TABLE DES ADDITIONS.

la Roche-Poncié : Sur la Table des positions géographiques, additions et tions faites cette année. — *Puiseux :* Note sur le calcul des positions ap-es de l'étoile λ de la Petite Ourse. — *Puiseux :* Note sur le passage de de 1882. — *Hatt :* Mémoire sur la longitude de Saigon. — *Hatt :* Mémoire é au Bureau des Longitudes sur la détermination de la position géogra-du phare de Port-Saïd. — *Caspari :* Note sur la détermination de la de de la Guadeloupe. — *Janssen :* Rapport relatif à l'observation de e du 12 décembre 1871, observée à Shoolor (Indoustan).

STRE (L.). — Cours complet de Dessin linéaire gradué et pro-

MÉLANGES.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

E GÉNÉRALE DES MÉMOIRES ET OUVRAGES

CITÉS DANS CE VOLUME.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE DE MATIÈRES.

ISTOIRE DES MATHÉMATIQUES. — GÉNÉRALITÉS.

ARITHMÉTIQUE. — ANALYSE.

[illegible]

MÉCANIQUE. — PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

IIE. — GÉODÉSIE. — PHYSIQUE DU GLOBE. — PROBABILITÉS.

FIN DU TOME CINQUIÈME.

Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.

BULLETIN

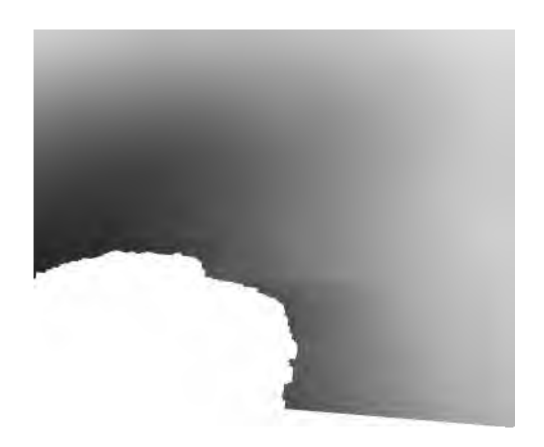
DES

ENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.



JE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
'S AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

ES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES,

PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,

AVEC LA COLLABORATION

DRÉ, LESPIAULT, PAINVIN ET RADAU,

DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

OME VI. — 1er SEMESTRE DE 1874.



PARIS,
:R-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
:S LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1874

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. CHASLES, *président*.

BERTRAND.

PUISEUX.

SERRET.

N...,

LISTE DES COLLABORATEURS DU BULLETIN

PENDANT LES TROIS PREMIÈRES ANNÉES.

MM. Baillaud, agrégé de l'Université.
Battaglini, professeur à l'Université de Rome.
Beltrami, professeur à l'Université de Bologne.
Bertrand (J.), membre de l'Institut.
Bonnet (O.), membre de l'Institut.
Bouquet, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.
Clebsch, professeur à l'Université de Goettingue.
De Tilly, capitaine d'Artillerie, à Bruxelles.
Dewulf, commandant du Génie aux îles d'Hyères.
Ermakof, à Kazan.
Hermite, membre de l'Institut.
Imschenetsky, professeur à l'Université de Kharkof.
Klein, professeur à l'Université d'Erlangen.
Laguerre, répétiteur à l'École Polytechnique.
Lampe, professeur à Berlin.
Laurent (H.), répétiteur à l'École Polytechnique.
Lie, professeur à l'Université de Christiania.
Lindelöf, professeur à l'Université de Helsingfors.
Lipschitz, professeur à l'Université de Bonn.
Mannheim, professeur à l'École Polytechnique.
Padova, professeur à Pise.
Pellet, professeur au Lycée de Bourg.
Potocki, licencié ès Sciences, à Bordeaux.
Resal, membre de l'Institut.
Serret (J.-A.), membre de l'Institut.
Simon (Ch.), professeur au Lycée Louis-le-Grand.
Tisserand, directeur de l'Observatoire de Toulouse.
Zeuthen, professeur à l'Université de Copenhague.

\

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

3ADIE (Antoine), membre de l'Institut. — Géodésie d'Éthiopie, ou Trian-
ation d'une partie de la haute Éthiopie, exécutée selon des méthodes nou-
es. Vérifiée et rédigée par R. Radau. Paris; 1873. Gauthier-Villars. —
i°, 534 p., avec 11 cartes et 10 planches. — Prix : 30 fr.

ADIE (Antoine). — Observations relatives a la physique du globe,
s au Brésil et en Éthiopie. Rédigées par R. Radau. — Paris, Gauthier-
ars. — In-4°, 204 p., avec 1 planche. — Prix : 15 fr.

:s deux voyages en Abyssinie dont M. d'Abbadie publie aujour-
i les résultats ont eu lieu de 1837 à 1839 et de 1839 à 1849; ils
prennent un espace de douze ans, pendant lequel l'infatigable
orateur a recueilli d'immenses matériaux d'observation en
ébattant au milieu de difficultés de tout genre. En 1836, il
t déjà fait un court voyage au Brésil, afin d'y observer les varia-
s diurnes de l'aiguille aimantée. L'impression de la *Géodésie
thiopie* ne put être commencée qu'en 1859; elle avait été pré-
e de la publication d'un *Résumé géodésique des positions dé-
unées en Éthiopie,* brochure de 36 pages, où l'on trouve déjà
:oordonnées de 831 points. Ce délai de vingt-quatre ans, ap-
é à la publication complète des observations, des calculs et des
:s que renferment les deux Ouvrages de M. d'Abbadie, prouve

assez qu'il s'agit ici d'une œuvre de longue haleine, qui n'a pu être menée à bonne fin qu'au prix de grands et sérieux efforts, et qui, enfin achevée, fait honneur à la Science française.

La *Géodésie d'Éthiopie* renferme la description des instruments emportés par le voyageur; les observations elles-mêmes dans la mesure où la reproduction en paraissait utile, et, dans les autres cas, les résultats du calcul; l'exposé des méthodes d'observation et des procédés de réduction employés; l'histoire détaillée de la construction des cartes; la liste des positions géodésiques, avec onze cartes topographiques et dix planches de profils de montagnes; l'itinéraire complet, d'après les manuscrits de voyage. Les instruments étaient des chronomètres, des sextants et des cercles à réflexion, enfin des théodolites, ou lunettes à deux cercles qui permettent de relever l'azimut et l'apozénith (distance zénithale) des objets terrestres. C'est sur l'emploi du théodolite que reposent les méthodes dont l'ensemble constitue ce que M. d'Abbadie nomme la *Géodésie expéditive*, méthodes ingénieuses et fécondes dont son Ouvrage est, pour ainsi dire, un long exemple.

Les opérations de la Géodésie ordinaire exigent des instruments lourds et très-précis, des signaux artificiels, installés en des points choisis à l'avance, et un personnel nombreux; elles nécessitent la mesure d'une base, la mesure des trois angles de chaque triangle, sans compter les observations astronomiques qui font connaître directement les latitudes et les longitudes des stations principales, et les nivellements qui déterminent les différences des hauteurs. Évidemment on ne peut songer à exécuter de pareils travaux en pays sauvage, avec les ressources restreintes dont dispose un voyageur isolé, trop heureux si la défiance toujours en éveil des indigènes ne l'empêche pas de profiter des occasions que lui procurent les hasards de la route. Aussi la plupart des voyageurs se bornent-ils à dresser une carte du pays qu'ils ont exploré, en mettant à profit des levés à vue ou des relèvements à la boussole, contrôlés par quelques observations de latitudes ou de latitudes et par l'estimation des temps de parcours. Les itinéraires dressés à l'aide de pareilles données sont en général très-défectueux, surtout lorsqu'il s'agit d'une contrée où le minerai de fer abonde, comme en Éthiopie, car alors l'usage de la boussole expose à des mécomptes sérieux; on peut s'en convaincre en parcourant les pages 255-259 de la *Géodésie d'Éthiopie*,

ı M. d'Abbadie a réuni les déclinaisons de l'aiguille aimantée qui sultent de ses relèvements.

Un simple coup d'œil jeté ensuite sur la longue série des *Tours 'horizon* (p. 150-215) et des *Azimuts ordonnés* (p. 216-255), ır la *Liste des positions* (p. 423-448) et sur la *Carte des princiıux triangles,* suffit pour faire apprécier le pas immense qui a été it. La Géodésie expéditive, telle que l'a imaginée M. d'Abbadie et ı'il l'a pratiquée pendant douze ans avec une étonnante persévéınce, constitue, à n'en pas douter, un progrès qui fait époque dans histoire des voyages scientifiques. Elle est fondée sur le relèvement ɾstématique des *signaux naturels,* c'est-à-dire de tous les objets ıillants et faciles à identifier qui se dessinent à l'horizon. Le oyageur improvise des stations sur chaque éminence de terrain où l lui est permis de s'arrêter, ou bien dans les haltes dictées par les ıolontés de la caravane. Il y installe son théodolite sur une pierre ɔu sur un pied portatif, et il commence son *tour d'horizon,* en relevant avec soin le gisement et la hauteur angulaire des signaux qui s'offrent à son choix : pics de montagnes, toits d'édifices, cimes d'arbres, bosquets sacrés, angles de précipices, bords d'un lac ou d'une île. En même temps, s'il le peut, il prend la hauteur et l'azimut du Soleil, afin d'*orienter* son tour d'horizon, c'est-à-dire afin de pouvoir rapporter au méridien les angles azimutaux observés. L'observation du Soleil, combinée avec celle d'un bon signal, qui est nécessaire pour orienter un tour d'horizon, doit être faite le matin ou le soir : il y a un grand avantage à la faire des *deux* côtés du méridien, à deux moments de la journée où le Soleil se trouve à la même distance du zénith; c'est là le principe de la *méthode des azimuts correspondants,* généralisation ingénieuse de la méthode bien connue des hauteurs correspondantes, et qui sert à trouver en même temps la direction du méridien et l'instant de midi vrai (p. 143 et 478). Les tours d'horizon, accompagnés de croquis des signaux, qui permettent d'en constater plus facilement l'identité, forment la base d'une sorte de triangulation naturelle du pays, et fournissent le moyen de déterminer la situation relative d'une foule de points. Des latitudes et des longitudes observées chaque fois qu'on en trouve l'occasion, des altitudes mesurées par le moyen du baromètre ou de l'hypsomètre (thermomètre à eau bouillante), des distances déduites du temps de propagation du son,

de petites bases mesurées au pas ou à la chaîne complètent les matériaux qui permettront plus tard de fixer les trois coordonnées de chaque point de la carte. Il va sans dire qu'il ne faudra pas négliger les renseignements supplémentaires, tels que relèvements à la boussole, esquisses de la route, estimation des distances, temps de parcours d'une station à l'autre, enfin les mille indications qui pourront faciliter le remplissage de la carte, une fois que les positions des points de repère y auront été marquées d'une manière définitive.

La grande affaire, dans une triangulation, c'est de mesurer sur le terrain une base de quelques kilomètres, qui donne la dimension absolue des côtés des triangles. La Géodésie expéditive se procure une base, en déterminant, aussi exactement que possible, les latitudes de deux points, situés à peu près sous le même méridien, et le gisement réciproque de ces deux points. C'est ainsi que M. d'Abbadie a utilisé, comme base de la carte du Tigray, la distance d'environ 93 kilomètres qui sépare les deux stations Digsa et Saloda, et qui correspond à une différence de latitude de 48 minutes, avec un azimut de 22 degrés.

Par ces divers moyens, M. d'Abbadie a réussi à porter une chaîne continue de triangles des bords de la mer Rouge aux confins du pays de Kaffa, c'est-à-dire depuis le seizième jusqu'au sixième degré de latitude au nord de l'équateur. Il est évident, par la nature même de ces observations, qui n'ont pu être faites d'après un plan arrêté à l'avance, qu'il ne faut pas s'attendre à trouver partout une liaison très-rigoureuse entre les différentes parties du canevas géodésique. On s'est efforcé de faire concourir à la fixation de chaque point toutes les données dont on disposait, en attribuant à chacune de ces données une influence proportionnelle au degré de confiance qu'elle inspirait. Appliquer à de tels matériaux les procédés de calcul de la Géodésie de précision, c'est-à-dire la méthode des moindres carrés avec son cortége d'équations et de coefficients péniblement préparés, c'est toujours perdre son temps et méconnaître les principes mêmes du Calcul des probabilités. On trouve dans la Géodésie d'Éthiopie une méthode plus simple, plus directe, adaptée à la nature variée et souvent précaire des observations qu'un voyageur peut recueillir au hasard de la route et selon les facilités que résultent de sa situation. Cette méthode, exposée aux pages [illegible], sous le titre de *Méthode de compensation*, part

ın système provisoire de positions que l'on perfectionne peu à peu r des tâtonnements qui ont pour but d'équilibrer en quelque sorte ıfluence des diverses données (latitudes, longitudes, altitudes ab- ues ou différences de niveau, azimuts, apozéniths, distances), et resserrer ainsi graduellement les mailles du réseau trigonomé- que. Dans ce dessein, on construit de petites cartes spéciales ur chaque point du réseau, où, autour de la position provisoire, trace le parallèle de la latitude observée, les trajectoires des muts observés et les autres lignes droites ou courbes qui repré- ıtent à l'œil des conditions à remplir (un arc de cercle représen- ait une distance estimée). Il convient d'adopter pour ces con- uctions la projection de Mercator, où les azimuts sont des lignes oites. On s'efforce alors de corriger les diverses positions, de çon que, sur les cartes spéciales qui sont dans une dépendance utuelle, les trajectoires se rapprochent et circonscrivent par un olygone de plus en plus petit une position centrale qui deviendra ı position définitive du point que l'on veut fixer. Afin de faire con- ourir à cette compensation progressive des erreurs d'observation es angles zénithaux, on marque sur les trajectoires, de distance en listance, les altitudes correspondant à l'apozénith observé, et l'on herche à mettre d'accord le mieux possible les altitudes dont la noyenne fournira l'altitude définitive du même point. C'est de cette nanière qu'ont été déterminées les trois coordonnées des 857 points ue renferme la *Liste des positions*. D'après M. Radau, l'incertitude le ces positions atteint rarement 1 minute d'arc.

Après avoir indiqué rapidement les principes des méthodes mises n pratique par M. d'Abbadie, il nous reste à donner quelques dé- ails complémentaires sur les résultats que renferme la *Géodésie 'Éthiopie*. Dans l'Introduction, on trouve une brève narration du oyage, quelques explications sur le système de transcription des oms indigènes adopté par l'auteur, l'exposé du plan général de ouvrage, et l'histoire des vicissitudes qui en ont retardé la publi- tion.

Voici ensuite, en peu de mots, le contenu des Chapitres :

Chapitre I. *Instruments*.

Chapitre II. *Calcul du temps*. — Réduction des angles horaires. Calcul des hauteurs correspondantes, avec cinq Tables auxi- ires. — États des chronomètres, etc.

›itre XV. *Résidu des relèvements.* — Azimuts sans croi-
.

›itre XVI. *Journées de route.* — Itinéraire détaillé, avec les de parcours.

›itre XVII. *Liste des positions.* — Positions, notes critiques.

litions. — On y trouve notamment la méthode de M. Radau éterminer la longitude sans chronomètre, par les hauteurs et nuts de la Lune.

uls des Cartes. — Renseignements supplémentaires sur la ıction et le remplissage des *onze Cartes,* où les noms des géodésiques et les lignes de route sont imprimés en rouge.

ıches. — Profils des signaux, ou croquis des contours d'un nombre de signaux naturels relevés dans les tours d'horizon.

le alphabétique des noms et des matières.

ourt sommaire suffit pour donner une idée de l'étendue des ıux qui ont été soumis à une discussion approfondie, de la de travail que représente cet Ouvrage, et du fruit qu'en ›nt les voyageurs qui voudront s'appliquer sérieusement à les matériaux pour la carte d'un pays encore inexploré. Ils ront des perfectionnements qu'ont subis les instruments vation depuis vingt ans : ils pourront employer l'*aba,* théo- à prisme et à lunette horizontale de M. d'Abbadie ; le polémo- qui sert à estimer les distances ; la planchette photogra- d'Auguste Chevallier, qui fournit instantanément un tour on, et une foule d'autres instruments qui permettront de lier et de rendre encore plus précises les données qui servi- : fondement aux cartes futures.

s ne dirons que peu de mots du second Ouvrage de M. d'Ab- qui a pour titre : *Observations relatives à la Physique du* Ce sont des observations de magnétisme terrestre et de mé- gie, faites au Brésil, en Égypte et en Abyssinie, de 1836 à A Olinda, M. d'Abbadie a observé, en 1837, les variations s de la déclinaison de l'aiguille aimantée, l'inclinaison ma- ıe et la force horizontale du magnétisme terrestre. En e, il n'a observé, dans diverses stations, que l'inclinaison et : horizontale. Les observations météorologiques de tout genre : faites pendant une traversée de l'Atlantique, ensuite au en Égypte, en Éthiopie, quelques-unes en Algérie, au mois

de mars 1867, à l'occasion d'une éclipse de Soleil. Il y a là notamment des observations psychrométriques assez nombreuses qui prouvent la sécheresse habituelle du climat éthiopien, des observations de la température du sol à diverses profondeurs, une discussion approfondie des phénomènes du tonnerre en Éthiopie, et des remarques curieuses sur le *qobar*, sorte de brume sèche qui obscurcit l'atmosphère. Parmi les Tables que renferme l'Ouvrage, nous citerons les Tables barométriques et hypsométriques de M. Radau. En résumé, on y trouve des résultats qui ont leur importance; il faut seulement regretter que la publication de ces observations ait été si longtemps différée, ce qui en a un peu diminué l'intérêt; il est vrai que plusieurs des résultats obtenus avaient été publiés séparément depuis longtemps. En définitive, ces deux Ouvrages renferment une somme considérable de faits bien constatés, de chiffres précis et d'idées nouvelles, et, à ce titre, ils garderont une place honorable dans la littérature des Sciences d'observation.

SUTER (Dr. Heinrich). — GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN. — *Erster Theil.* Von den ältesten Zeiten bis Ende des XVI. Jahrhunderts. — 2. Auflage. Zürich, Druck und Verlag von Orell Füssli & Co.; 1873 (¹).

Les perfectionnements essentiels qui, depuis l'apparition des Ouvrages de Montucla et de Bossut, ont été apportés séparément aux diverses parties de l'histoire des Mathématiques, font aujourd'hui sentir l'urgence de la publication d'un Traité général, destiné à remplacer les anciens, dont le plus récent date du commencement de ce siècle. Ce besoin est d'autant plus impérieux pour les jeunes professeurs français, que l'histoire des Mathématiques a pris place, depuis quelques années, parmi les matières exigées pour le concours d'agrégation. Or nous ne voyons pas trop comment, dans l'état de choses actuel, on peut se mettre au courant de cette science, si l'on

(¹) SUTER (H.). — *Histoire des Sciences mathématiques.* Ire Partie. Depuis les temps les plus reculés jusqu'à la fin du XVIe siècle. — 2e édition. Zürich, Orell Füssli et Cie; 1873. — 1 vol. in-8°, VI-196 p., 2 pl. Prix : 10 fr. 75.

a pas à sa disposition une assez nombreuse collection de monophies, publiées soit en France, soit surtout à l'étranger.

Le volume que nous annonçons ici, et qui doit former le commencement d'un travail complet sur cette matière, répond en partie ce *desideratum*. Un livre de cette étendue, rédigé en tenant ompte des recherches modernes, avec des renvois aux sources et es indications chronologiques et bibliographiques aussi nombreuses que possibles, serait assurément du plus grand secours pour les lecteurs auxquels le temps et les ressources matérielles manquent pour compulser eux-mêmes des publications spéciales et fouiller les documents originaux, et qui trouveraient ainsi réunis un tableau général des progrès de la Science et un guide pour des études plus détaillées et plus approfondies.

Malheureusement il s'en faut de beaucoup que ce programme soit omplétement réalisé dans l'Ouvrage qui nous occupe. Si l'on en xcepte les parties où l'auteur a pu mettre à profit la remarquable onographie de M. Bretschneider [1], le Livre de M. Suter a été mposé à un point de vue trop peu technique pour suffire aux igences des lecteurs mathématiciens. Les sources de seconde main ixquelles l'auteur a puisé, et dont il donne lui-même la liste, sont in de correspondre à l'état présent de la Science. Les renseignements bibliographiques sont à peu près absents, et les dates ne ont que très-rarement indiquées.

Comme on le voit par la lecture du titre, ce volume traite de histoire des Mathématiques, depuis les temps les plus reculés jusu'à la renaissance des Sciences en Europe au XVIᵉ siècle. Il se diise en sept Chapitres, précédés d'une Introduction où l'auteur énuière les autorités sur lesquelles il s'appuie. Ainsi que nous l'avons it, cette liste présente des lacunes regrettables, et l'on est surpris e n'y pas voir figurer les noms des Wœpcke, des Th.-H. Martin, es Sédillot, et de tant d'autres savants qui enrichissent de leurs écouvertes le précieux *Bullettino* de M. le prince Boncompagni.

Le Chapitre Iᵉʳ contient un aperçu des commencements de la cience chez les peuples de l'Orient et chez les Égyptiens.

Le Chapitre II est consacré à l'histoire des Mathématiques chez s Grecs jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie. Cette partie,

---

(1) *Die Geometrie und die Geometer vor Euclides*. Voir *Bulletin*, t. IV, p. 113.

ıce actuelle, si, comme il l'indique, il n'a pas consulté d'au-ostérieurs au XVIII[e] siècle, en laissant de côté des géomètres listes du mérite de Wœpcke, dont le nom n'est pas cité une ›is. Aussi a-t-il été facile à M. Hankel (¹) de relever dans ce re d'assez nombreuses erreurs.

hapitre VI traite de l'état des Mathématiques dans l'Occident ıt le moyen âge. Après avoir mentionné Bède et Alcuin, er énumère les travaux de Gerbert (Sylvestre II), sans citer ıt Ouvrage de M. Olleris. Il attribue à Gerbert l'introduction ope des chiffres arabes et hindous, quoiqu'il soit bien établi ›rbert ne connut pas l'usage du zéro, et que c'est à Léonard que revient la gloire d'avoir fait connaître à l'Occident cette on capitale (²).

›uter signale le XIV[e] siècle comme le plus stérile de tout le âge, au point de vue scientifique. Si cependant, au lieu de ›r aux données de Montucla et de Weidler, il eût pris con-ce des travaux récents publiés par M. Curtze dans le *ırift für Mathematik und Physik,* il y aurait trouvé le nom grand génie mathématique du moyen âge, de Nicole Oresme, s découvertes se rattachent immédiatement aux grandes in-ıs de Viète et de Descartes. Il est vrai que cet homme si ıt attend encore de ses compatriotes mêmes la justice qui lui , et que, s'il est permis de l'oublier à Paris, on est presque ›le de l'ignorer à Zurich.

ı le Chapitre VII, l'auteur passe rapidement en revue ic et ses disciples immédiats, puis les géomètres tels que le l de Cusa, Albert Dürer, Luca di Borgo, Zamberti (qu'il à tort Lamberti), Commandin. Il arrive ensuite aux algé-italiens, au sujet desquels il aurait pu consulter l'intéressant de M. Gherardi, dont M. Curtze a publié, dans les *Archives unert,* une traduction allemande (³). De là il passe aux ‹ de Viète, de Stifel, de Rudolf, de Ramus, de Clavius; enfin ›nd l'analyse des progrès de l'Astronomie depuis Copernic

---

ir *Bullettino di Bibliografia,* etc., t. V, p. 297.
›ir FRIEDLEIN, *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen* ›er, etc. Erlangen; 1869.
LII; 1871. Voir *Bulletin,* t. III, p. 85.



[illegible] parmi les [illegible] l'ouvrage de [illegible] commencements [illegible] recommand[illegible] [illegible] troisième édition [illegible]

[illegible]

[illegible] probabilités doit être considéré [illegible]

[illegible] Mathématiques appliquées [illegible] plus intéressants et plus immédiatement [illegible] plus [illegible] conclusions [illegible] probabilités plus ou moins [illegible]

ᵢciables qu'il rend tous les jours, et ceux qu'il est appelé à dans l'avenir par ses applications à la Statistique et à l'Ad-ᵣation.

ı'est pas ici le lieu de rechercher quelles sont les causes de ındon déplorable; mais nous n'en sommes que plus heureux · à signaler aujourd'hui l'apparition du nouveau Traité ma-ṭique, dont nous sommes redevables à un jeune géomètre, ıteur de plusieurs Ouvrages devenus classiques ([1]).

Laurent, comme membre du Cercle des Actuaires français, a casion de s'occuper spécialement des problèmes de proba-qui se rapportent aux questions financières. Il a pu juger de isance des Traités qui existent sur cette matière, et dont ne comble la lacune qui sépare les livres tout à fait élémen-comme ceux de Lacroix et de Cournot, des Ouvrages de science de Laplace et de Poisson. Il s'est attaché à traiter les ıns par des méthodes plus rigoureuses que celle des fonctions trices, employée par Laplace, et il a joint aux résultats ᵢ de ses devanciers ceux qui sont dus aux travaux de Cauchy 1. Bienaymé.

ès avoir résumé, dans son premier Chapitre, les formules de rse combinatoire et des développements en séries trigonomé-., il consacre les deux Chapitres suivants à l'exposition des ıes fondamentaux du Calcul des probabilités.

Chapitre IV traite des méthodes dans les sciences d'observa-e la méthode des moindres carrés, avec les applications au armes à feu et aux Tables de mortalité.

Chapitre V a pour objet les opérations des Compagnies d'as-es.

ıteur nous avertit lui-même, dans sa Préface, qu'il ne traitera l'application du Calcul des probabilités aux sciences morales, que, suivant lui, on ne peut appliquer le mot *probabilité* aux nages, lesquels ne sauraient être considérés comme des nents également probables. Il existe cependant dans les sta-es criminelles une constance de résultats tout aussi frappante lle que l'on rencontre dans les Tables de mortalité. Dans les cas, les causes agissantes sont également inconnues. Or le

---

ıir *Bulletin*, t. II, p. 193.

[illegible] à s'occuper nécessairement [illegible] sur les effets connus, [illegible] suffisante. Il semble [illegible] à des considérations [illegible] en renonçant à poser les [illegible] importantes que soient, à l'heure présente [illegible] cette théorie doit reposer.

[illegible] de la Science, à notre époque, tend à [illegible] comme les faits physiologiques [illegible] qui se manifestent à nous [illegible] résultats moyens; mais quelque incomplètes [illegible] sur un ordre de phénomènes, le Calcul des probabilités [illegible] sur les faits observés, pour [illegible] le meilleur parti, et nous montrer la direction [illegible] pour les compléter. L'homme moral n'est [illegible] pour nous que l'homme physique; le calcul [illegible] aux Tables de criminalité qu'aux Tables [illegible] pas de différence essentielle entre [illegible] en présence du juge et celle du malade en présence du médecin.

Nous regrettons aussi que les limites dans lesquelles M. Laurent [illegible] se renfermer ne lui aient pas permis de donner plus de développement à l'application du Calcul des probabilités aux sciences d'observation et en particulier à la Méthode des moindres carrés, et de nous initier aux nouvelles recherches faites sur cette méthode, entre autres par M. Hansen. Nous espérons que, dans une nouvelle édition, l'auteur trouvera l'occasion d'élargir son cadre.

Il nous reste encore une remarque à faire au sujet de la Note II, relative au Calcul numérique dans les applications de la Méthode des moindres carrés. On sait qu'il est avantageux, dans ce cas, d'exécuter les multiplications à l'aide de la même Table qui donne les carrés, en s'appuyant sur la formule

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

A cette formule, M. Laurent propose de substituer la suivante :

$$ab = \frac{1}{2}\left[(a+b)^2 - a^2 - b^2\right].$$

us semble que cette dernière équation, exigeant trois lectures, 'un usage moins expéditif que la précédente, qui n'en exige leux, surtout quand on a à sa disposition une Table des *quarts rrés,* comme on en trouve une à la suite des Tables de logaes à quatre décimales de J.-H.-T. Müller. Deux nombres écrits l'un sous l'autre, un calculateur exercé peut lire immément, sans l'écrire, leur somme ou leur différence, ce qui ne it compter pour une opération. J. H.

II (R.), professore nella R. Università di Napoli. — TRATTATO D'ALGEBRA.— *te prima :* I primi Elementi d'Algebra. — *Parte seconda :* Completo agli Elementi d'Algebra. — Napoli; 1872-1873. In-8°, 152-363 p. zo : 2[l],50[c]6[l],00.

s deux Volumes que nous annonçons, et dont l'un en est à sa ième, l'autre à sa troisième édition, font partie d'un Cours let de Mathématiques justement estimé, et que l'auteur s'ape sans relâche à perfectionner toutes les fois que le succès de euvre lui fournit l'occasion d'une réimpression nouvelle.

Traité complet d'Algèbre doit se composer de quatre Parties, les deux dernières, qui doivent contenir les théories et les ithmes de la nouvelle Algèbre et les éléments de la Théorie des ıres, sont encore sous presse.

première Partie traite des matières habituelles d'un Précis èbre élémentaire. Dans la deuxième Partie, l'auteur expose la ie des permutations et des combinaisons, la formule du bi-, la théorie des déterminants, les fractions continues, les tités complexes et la résolution de l'équation binôme, la ie générale des équations de degré supérieur, l'élimination, ries avec diverses applications.

us apprenons avec plaisir que M. Rubini prépare en ce moune nouvelle édition de ses excellents *Elementi di Calcolo tesimale.* J. H.

ТОТГЁНТЕРЪ (И.), профессоръ Математики въ Кембриджѣ.— *Дифференціальное вычисленіе, съ собраніемъ примѣровъ для упражненій.* — Съ англійскаго перевелъ и дополнилъ приложеніами къ геометріи пространства трехъ измѣреній В.-Г. ИМШЕНЕЦКІЙ, профессоръ теоретической механики въ Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ. — С.-Петербургъ, изданіе В.-П. Печаткина; 1873. Цѣна : 3 р. (¹).

Avant de publier ses savants Ouvrages d'histoire critique des Sciences mathématiques (²) et son dernier travail sur le Calcul des variations (³), M. Todhunter s'était fait connaître par une série d'excellents livres classiques sur les diverses branches des Mathématiques, formant un Cours élémentaire complet. Les deux volumes qui contiennent le Calcul différentiel et le Calcul intégral (⁴) ont eu déjà plusieurs éditions et ont été traduits dans plusieurs langues. Ces deux Traités, en effet, peuvent être regardés comme des modèles d'exposition rigoureuse des théories fondamentales; mais ce qui les rend surtout précieux, c'est le grand nombre d'exemples bien choisis qui sont développés dans le texte, ou proposés comme exercices à la fin de chaque Chapitre.

Le seul reproche que nous croyions pouvoir adresser à ces Ouvrages, c'est l'attachement trop exclusif de l'auteur à la *forme* d'exposition du Calcul infinitésimal, dite *méthode des limites*. Il est certain que l'introduction des infiniment petits, lorsqu'on ne lui donne pas le principe des limites pour fondement, ne peut conduire qu'à des conclusions dénuées de toute espèce de rigueur: mais cette méthode, dont Poisson a été l'un des derniers représen-

---

(¹) TODHUNTER (I.), professeur de Mathématiques à Cambridge. — *Calcul différentiel, avec un recueil d'exemples pour servir d'exercices.* — Traduit de l'anglais et augmenté des applications à la Géométrie de l'espace à trois dimensions, par V.-G. IMSCHENETSKY, professeur de Mécanique théorique à l'Université impériale de Kharkof. — Saint-Pétersbourg, chez V.-P. Petchatkine; 1873. — 1 vol. in-12, 458-112 p. Prix: 3 roubles.

(²) *A History on the Process of the Calculus of Variations during the nineteenth Century*. Cambridge; 1861. — *A History of the mathematical Theory of Probability from the time of Pascal to that of Laplace*. Cambridge; 1865.

(³) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 273.

(⁴) *A Treatise on the Differential Calculus, with numerous Examples.* — *A Treatise on the Integral Calculus and its Applications, with numerous Examples.*

ts, est aujourd'hui abandonnée par tous les auteurs qui attachent :lque prix à l'exactitude des raisonnements.

Tous les géomètres considèrent maintenant les infiniment petits nme caractérisés, non par leur *petitesse actuelle*, mais par leur *riabilité* et par la *possibilité* de leur attribuer des valeurs aussi isines de zéro que l'on voudra. On tire de cette définition les gles d'après lesquelles on peut altérer les infiniment petits ou les mplacer par d'autres, sans changer les limites de leurs rapports ı de leurs sommes. Grâce à l'emploi de ces règles, rien n'empêche, ut en restant dans la rigueur la plus absolue, de conserver les mplifications qu'offrait l'ancienne conception rudimentaire des finiment petits. On peut s'en convaincre en lisant la première lition du *Cours d'Analyse* de Duhamel (1840-1841).

Cependant un certain nombre de bons auteurs, M. Todhunter ıtre autres, inspirés par une prudence qui nous paraît excessive, ıt cru qu'il était nécessaire d'abandonner entièrement la terminogie du Calcul infinitésimal, et, tout en conservant les notations ibnitziennes, de leur enlever leur signification primitive pour en ire de purs symboles, destinés seulement à *rappeler* l'origine des uantités qu'ils représentent. De cette manière, pour les partisans clusifs du langage de la *méthode des limites*, $\frac{dy}{dx}$ et $\int y\,dx$ sont s symboles indécomposables, dénotant la dérivée et la fonction rimitive de la quantité y, et c'est ainsi que l'on voit des Traités de alcul *différentiel*, dans lesquels il n'est pas question de la *diffé-ntielle*, et où le mot d'*infiniment petit* n'est pas prononcé. uivant notre conviction, cette forme tout artificielle que l'on donne l'algorithme du Calcul infinitésimal n'ajoute en rien à la rigueur nuit considérablement à la clarté des conceptions et à la comodité dans l'usage pratique. Aussi beaucoup de géomètres, après oir voulu, comme Lagrange, écarter des principes de l'Analyse notion des infiniment petits, se trouvent forcés d'y revenir dans applications, mais cette fois aux dépens de la rigueur, puisqu'ils ont traité jusque-là le langage infinitésimal que comme un expént abréviatif.

Le savant traducteur russe, dont les lecteurs du *Bulletin* conissent les excellents travaux sur les équations aux dérivées parlles, a voulu combler, autant que possible, la lacune que nous

re édition, quelques-uns de ses collègues s'occupaient de la aison des quatre éditions publiées jusqu'ici. Prenant pour s matériaux critiques ainsi rassemblés, j'entrepris, avec le de mon collègue Boethke, la constitution du texte. M. le eur Hoüel m'ayant demandé, pour le *Bulletin des Sciences natiques et astronomiques*, un compte rendu de notre édition, npresse de répondre à son appel dans la Note suivante.

e édition se distingue de toutes les précédentes principalem ceci, qu'elle a été faite sur le manuscrit original de Co-

Par un enchaînement remarquable de circonstances, ce crit s'est conservé jusqu'à ce jour; il a heureusement échappé age et aux dévastations que commirent les Espagnols au comnent de la guerre de Trente ans, en Moravie, après la bataille nontagne Blanche, et il se trouve depuis lors en la posses- la maison des comtes de Nostitz, à Prague. L'inspection précieuses pages m'a fourni l'occasion d'étudier à cette même l'histoire de la composition successive du manuscrit. en effet, l'exemplaire de travail de l'auteur, dans lequel, it près de quarante années qu'il a employées à la création de ivre, il a consigné les changements et les corrections qui lui iru nécessaires. D'après la forme modifiée de son écriture s sa jeunesse jusqu'à son âge mûr, d'après la différence de e et du papier employés, on peut conclure assez sûrement ue de la rédaction des divers Chapitres. On peut ainsi prouver, emple, que Copernic a soumis trois fois son Ouvrage à un iement intégral, et que les huit Livres de la rédaction primint été successivement réduits à sept, puis à six. Dans les *gomènes*, je me suis largement étendu sur ce point. J'ai é aussi qu'aucune des quatre éditions publiées jusqu'ici n'a n'a pu être faite sur notre manuscrit original; que l'édition *ps* (Nuremberg, 1543) a été probablement imprimée d'après opie, faite sans doute par l'élève et l'intime ami de Copernic, im Rheticus, et dans laquelle on s'est permis toute sorte de ements arbitraires.

re édition présente le texte du manuscrit original, tant qu'il s été nécessaire d'avoir égard à des erreurs d'écriture maniet encore, en pareil cas, la leçon du manuscrit a-t-elle été iée en note au bas du texte. Elle contient les éléments cri-

tiques, en indiquant toutes les variantes de l'édition. De pl
reproduisant au bas du texte tous les passages raturés qui pr
être de quelque importance pour l'histoire du texte ou pour
autre cause, elle met le lecteur à même de se faire une idée
manuscrit sans l'avoir sous les yeux, et de se livrer lui-même a
recherches personnelles dont j'ai parlé plus haut.

Une édition fondée simplement sur la comparaison des
éditions existantes (Nuremberg, 1543; Bâle, 1566; Amst
1617; Varsovie, 1854) aurait déjà suffi pour mettre en évide
grand nombre d'erreurs dans cette dernière; mais, avec l'a
manuscrit, j'ai eu souvent le bonheur de pouvoir remonter à l
de ces erreurs. La comparaison dont je viens de parler a do
plus ce résultat remarquable, que la première édition est
correcte, et la dernière, celle de Varsovie, la plus incorrecte d
Il y manque souvent des lignes entières, d'autres sont im
en double; on y rencontre les fautes d'impression les plus é
dues en partie à une fausse interprétation des abréviatio
est d'autant plus surprenant, que les éditeurs de Varsovie
manuscrit original à leur disposition. Il est vrai que, en li
préciation qu'ils en font dans leur édition, on serait tenté
qu'ils ont eu un tout autre manuscrit que moi sous les ye
c'est ce que d'autres circonstances ne permettent pas d'adme
siste un peu longuement sur ce point, parce que, aussitôt a
nonce de notre édition, un critique varsovien a sagement p
dans le *Magazin für Litteratur des Auslandes*, qu'une
édition était inutile, par la raison que celle de Varsovi
dait à toutes les exigences. Je puis, au contraire, déclar
une fois publiquement que l'édition des *Revolutiones*
Varsovie ne peut être d'aucune utilité pour l'étude d
quiconque ne comprend pas le polonais, et, quant à la t
polonaise, le premier astronome polonais actuellement
firme, dans une Lettre que j'ai eu l'occasion de voir, q
encore plus mauvaise que le texte latin.

Parmi les découvertes les plus importantes auxquelle
lieu l'examen du manuscrit, on peut compter celle du p
Copernic admet la possibilité d'un mouvement elliptiqu
ciel (p. 116 de notre édition). Bien qu'il ne soit questio
passage que du mouvement de libration de la Lune, l

ınt une grande portée, parce que Copernic s'est servi d'un
nent semblable à la libration de la Lune, selon ses propres
ions, pour expliquer les mouvements des planètes, et parce
ldition de ces mots : *Sed de his alias,* montre qu'il s'était
ıps occupé de l'ellipse, et que peut-être, comme le fait ob-
e critique des *Göttingische gelehrte Anzeigen,* il aurait
rand pas que Kepler a fait après lui, s'il n'avait pas été, avec
contemporains, trop prévenu en faveur de l'excellence du
ıent circulaire. Du reste, Copernic fait encore, dans un autre
(lib. V, cap. IV, p. 326 de notre édition), des allusions à
, que Kepler lui-même avait déjà relevées (1).

joint, comme Appendice à l'Ouvrage de Copernic, l'écrit
ıel ce Livre fut annoncé, pour la première fois, au monde sa-
Narratio prima de Georges Joachim, qui avait pris de son
tal le nom de Rheticus. De cet écrit découlent d'importants
ıements sur la vie de Copernic, et, comme il a été rédigé
yeux mêmes de ce dernier, à Frauenburg, nous croyons qu'il
e ici à sa vraie place. De plus, j'ai ajouté à l'édition une liste
re des observations propres de Copernic, indiquées dans
ge, ainsi qu'un *Index nominum.* Le projet d'un *Index*
auquel j'avais songé, a dû être abandonné, faute du temps
ire.

ɔuvrage a pu, au point de vue matériel, paraître d'une ma-
igne de sa destination comme souvenir de fête séculaire,
devons à la généreuse libéralité du Gouvernement royal,
is à notre disposition des ressources que n'aurait pu fournir
iété d'hommes privés.

ns encore remarquer, en terminant, que l'on peut aussi se
r, auprès de la Société Copernicienne des Sciences et Arts
n, un portrait photographique de Copernic, et neuf *fac-*
photographiés sur le manuscrit original, parmi lesquels
e le passage mentionné plus haut, où Copernic parle de
.

horn, le 22 septembre 1873.

MAXIMILIEN CURTZE.

---

notibus stellæ Martis, lib. I, cap. V.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ATTI DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI, compilati dal Segretario. — ...
12-2[1]

T. XXIV. 1870-1871.

VOLPICELLI (P.). — *Sur l'induction électrostatique, ou influ... électrique. Mémoire historique et critique.* (4 art., 131 p.)

Suite d'un travail inséré au tome XXIII des *Atti.*

RESPIGHI (L.). — *Sur les observations spectroscopiques du l... et des protubérances solaires, faites à l'Observatoire du Capi...* (31 p.)

RESPIGHI (L.). — *Observation de l'éclipse de Soleil du 22 ...cembre 1870, à l'Observatoire du Capitole.* (4 p.)

VOLPICELLI (P.). — *Sur certaines transformations de ... vive en calorique, et sur la question qui s'y rapporte, tant ... le P. Grossi et Galilée, que sur le frottement de l'air.* (...

VOLPICELLI (P.). — *Sur les variations de température ...duites, soit par le choc d'un courant d'air, soit par l'abso... de l'air par les poussières : formules pour déterminer la c... dance entre la quantité absorbée et le calorique qui s'y déve... ainsi que pour traduire les indications d'un thermomètre quelconque dans celles d'un thermomètre à mercure.* (... 40 p.)

RESPIGHI (L.). — *Sur la constitution physique du Soleil.*

RESPIGHI (L.). — *Sur la lunette zénithale de l'Observato... l'Université Royale, au Capitole.* (20 p.)

VOLPICELLI (P.). — *Note sur le plan d'épreuve.* (3 p.)

VOLPICELLI (P.). — *Sur la doctrine de Galilée, concern... résistance relative des poutres.* (13 p.)

L'auteur donne la démonstration mathématique de plusie...

---

(1) L'*Accademia Reale dei Lincei* existe, depuis 1870, distincte de l'*A... Pontificia de' Nuovi Lincei,* dont elle a conservé les règlements et le mode ... cation. Voir *Bulletin*, t. II, p. 19.

**rtes par Galilée sur la résistance que les poutres de di-
ormes opposent à la rupture.**

.V; 1871-1872.

**ICELLI (P.). — *Sur les courants électriques, autrefois dits*
ion (9 p.)**

**ONI (G.). — *Sur un travail critique du professeur Eccher,*
ant l'électrophore et l'induction électrique. (2 art., 5-6 p.)**

**LER (F.). — *Sur la déviation du fil à plomb près des*
cchie. (4 p.)**

**Note indique les résultats obtenus par l'auteur dans ses
hes sur la déviation du fil à plomb, à l'extrémité orientale
se trigonométrique de la Voie Appienne, causée par le cra-
ziale. La montagne étant décomposée en couches horizon-
1 mètre d'épaisseur, on a calculé les attractions exercées
il à plomb par chacune de ces couches, en faisant certaines
èses sur leurs densités.**

**ICELLI (P.). — *Solution complète et générale, par la Géo-*
de situation, du problème relatif à la marche du cavalier
échiquier quelconque. (2 art., 73-92 p., 1 tableau.)**

**avalier, étant assujetti à ne pas toucher deux fois la même
l'échiquier, pourra passer d'une case donnée à une autre,
parcourant toutes les cases de l'échiquier, soit en n'en par-
t qu'une partie. M. Volpicelli distingue ces deux modes de
rs sous les noms de *courses totales* et de *courses partielles*.
opose, dans ce Mémoire, de trouver le nombre et la forme
es les courses totales et partielles que peut faire le cavalier
échiquier de forme quelconque, en partant de chacune des
Ce problème comprend le suivant : Trouver le nombre et la
les divers chemins par lesquels le cavalier, sur un échiquier
e quelconque, peut arriver d'une case donnée à une autre case
, sans jamais repasser deux fois par la même case. L'auteur
re aussi bien les courses partielles que les courses totales,
les dont on se fût occupé jusqu'à présent. Il parvient à la
n de la question par une méthode rationnelle, exclusive de
onnement et n'exigeant pas que l'on ait l'échiquier sous les
ux deux modes déjà connus de représentation de la marche**

[illegible]

[illegible] — *Réponse à la Note du P. Secchi* [illegible] 1871 [illegible] 24 p.

[illegible] — *De la pré*[illegible] *des tempêtes et des phénomènes qui les accompagnent.* [illegible] p. [illegible] fr.

[illegible] — *Sur les observations spectroscopiques du bord et des protubérances solaires, faites à l'Observatoire de l'Université romaine, au Capitole.* 5ᵉ Note. (70 p.

Structure, hauteur et composition de la chromosphère. — 'ormes des protubérances. — § III. Dimensions des protubé. — § IV. Origine, développement et transformations des pronces. — § V. Durée des protubérances. — § VI. Fréquence otubérances et ses variations périodiques. — § VII. Distrides protubérances sur la surface du Soleil, et ses variations iques. — § VIII. Relations des protubérances avec les fa— § IX. Relations des protubérances avec les taches. — Conformation du bord solaire ou de la photosphère sur le ır des taches. — § XI. Relations des protubérances, ou érupsolaires avec les aurores boréales. — § XII. Sur la cause des ions périodiques des protubérances et des taches solaires.

LER (F.). — *Sur l'attraction d'un parallélépipède.* (11 p.)
uteur s'est proposé, dans cette Note, la résolution du problème ıt : « Trouver le rapport des arêtes d'un parallélépipède rec, d'après la condition que les attractions de ce solide sur les es de ses faces soient égales entre elles ». Outre le cube, ouve au moins deux prismes à base carrée satisfaisant à la ion, et dont les arêtes x, y, z sont telles que, pour l'un, $z = \frac{x}{13,95}$, et pour l'autre, $y = z = 2,24x$. La Note se terpar une remarque sur un précédent travail de l'auteur, relatif traction d'une calotte sphérique.

CCI (Fr.). — *Note sur les formes quadratiques.* (3 p.)
U et V étant deux formes quadratiques à n variables, U′ et V′ réciproques, on peut toujours, par une même substitution re, passer de U à AV′ et de V à BU′, A et B étant les discrints de U et de V; le déterminant C′ de la substitution est syque et égal à la moyenne géométrique entre les discriminants ormes U′ et V′. Si l'on considère C′ comme le discriminant fonction W′, on peut, par la même substitution linéaire, réles trois formes U′, V′, W′ à ne contenir que les carrés des bles, et alors un coefficient de W′ est égal à la moyenne géoque entre les coefficients homologues de U′ et de V′. M. Battaa trouvé que la conique, par rapport à laquelle deux autres ues données sont polaires réciproques, jouit précisément de me propriété; d'où l'on peut conclure que, dans le cas de

$n = 3$, W' représente la conique par rapport à laquelle U' et V' sont polaires réciproques. »

Brusotti. — *Considérations sur la loi de Richmann et sur les calories de température des corps.* (8 p.)

Brusotti. — *Détermination de la chaleur spécifique des corps au moyen de la quantité constante de chaleur développée par une action chimique déterminée.* (2 p.)

Brusotti. — *Relation entre le travail nécessaire pour soulever le plateau d'un électrophore et la déviation galvanométrique correspondante.* (6 p.)

Orsoni (Fr.). — *Divers systèmes pour analyser l'intensité relative de deux ou plusieurs sources de lumière.* (6 p.)

Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg (¹).

T. XVII; 1871-72.

Savitsch (A.). — *Observations des planètes à l'Observatoire astronomique de l'Académie des Sciences.* (2 art., 6 col.)

Jacobi (M. v.). — *Note sur la fabrication des étalons de longueur par la galvanoplastie.* (5 col.)

Müller (A.). — *Calculs de la comète de Faye.* (3 col.; all.)

L'auteur, ayant repris en entier le calcul des perturbations de cette comète, en a déduit les corrections qu'il faut appliquer aux éléments donnés dans le n° 1522 des *Astronomische Nachrichten*. Il parvient aux conclusions suivantes :

1° Qu'il ne s'est encore produit aucun raccourcissement sensible du temps de la révolution;

2° Que la masse de Jupiter adoptée par Bessel s'accorde complétement avec les observations de la comète.

Wild (H.). — *Sur un nouvel instrument pour l'observation des variations de l'intensité verticale du magnétisme terrestre.* (9 col.; all.)

(¹) Voir *Bulletin*, t. [illegible], p. [illegible].

[. XVIII; 1872.

MIDDENDORFF (A.-Th. v.). — *Quelques nouvelles observations* *vant à la connaissance du courant du cap Nord.* (5 col.; all.)

JACOBI (M. v.). — *Réduction galvanique du fer sous l'action* *un puissant solénoïde électromagnétique.* (7 col.; all.)

GLASENAPP (M.-S.). — *Observations des satellites de Jupiter.* 2 col.)

Les astronomes sont d'accord sur la nécessité de refondre la éorie des satellites de Jupiter, donnée par Laplace. Malheureument les observations de ces astres ayant été extrêmement négées dans ces derniers temps, il serait difficile de déterminer ijourd'hui, avec une précision suffisante, les nouvelles constantes cette théorie. M. Glasenapp, après avoir rappelé les recherches Bailly sur les éclipses de ces satellites, donne le tableau des obrvations les plus récentes, faites, par divers astronomes, à Poulkova à Moscou.

SOMOF (J.). — *Sur les vitesses virtuelles d'une figure invaable, assujettie à des équations de condition quelconques de* *rme linéaire.* (23 col.)

« M. Mannheim, dans son Mémoire intitulé : *Étude sur le dé-* *lacement d'une figure de forme invariable* (¹), a trouvé, par ne voie purement géométrique, diverses propriétés intéressantes es déplacements infiniment petits, ou des vitesses virtuelles, d'une gure invariable, en admettant que ces déplacements sont assuttis à des conditions descriptives, capables d'être réduites à une u à plusieurs conditions simples savoir : « qu'un point de la figure doit se déplacer sur une surface immobile. » Or cette ondition n'est pas la plus générale; elle n'est qu'un cas particulier 'une autre, qui peut être exprimée par une équation quelconque e forme linéaire et homogène par rapport aux projections sur trois xes de la vitesse de translation et de la vitesse angulaire de rotation ortées sur l'axe instantané, appartenant à un mouvement quelonque que peut avoir la figure invariable.

» Dans le présent Mémoire, l'auteur donne un moyen analytique

[1]) Voir *Bulletin*, t. I, p. 297.

pour déterminer les vitesses virtuelles d'une figure invariable, en supposant que ces vitesses doivent satisfaire à des équations de condition de la forme générale qu'on vient de citer. Il prend en même temps en considération les propriétés des complexes linéaires de Plücker, auxquelles les vitesses virtuelles d'une figure invariable sont intimement liées. »

ÖFVERSIGT AF KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR. In-8° (1).

T. XXVI; 1869.

WREDE (F.-J.). — *Sur le calcul des rentes viagères combinées.* (8 p.)

L'auteur propose une méthode approchée pour abréger les calculs énormes qu'exige la détermination de la valeur actuelle d'une rente viagère reposant sur plusieurs têtes.

BJÖRLING (C.-F.-E.). — *Sur le mouvement rectiligne d'une molécule sous l'influence d'une force attractive ou répulsive, représentée par une fonction algébrique, rationnelle et entière de la distance à un centre fixe.* (3 p.)

En désignant par η la fonction qui exprime la valeur de la force vive $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, la nature du mouvement dépend de celle des racines de l'équation $\eta = 0$.

ERICSSON (J.). — *Sur l'influence de la chaleur solaire sur la rotation de la Terre.* (22 p.)

L'auteur examine l'influence que peut exercer sur la position de l'axe de la Terre et sur sa vitesse de rotation le déplacement des masses énormes de matière détachées des continents par l'action des eaux et portées dans la mer par les fleuves. D'une part, ces matières, en tombant au fond de la mer, se rapprochent du centre et tendent à accélérer la vitesse angulaire; d'autre part, elles peuvent être ou rapprochées ou éloignées de l'équateur, ce qui peut causer, suivant les cas, soit un ralentissement, soit une accélération

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm.* Voir *Bulletin*, t. I, p. 245.

nouvement. Il calcule les actions qui peuvent être exercées l'un ou l'autre sens par les principaux fleuves, et il en conclut la constance de la vitesse de rotation de la Terre est incompa- avec l'action de la chaleur solaire.

ɪɴᴅʜᴀɢᴇɴ (D.-G.). — *Les déplacements de matières qui ont à la surface de la Terre sont-ils capables d'altérer d'une ıière sensible la durée du jour sidéral?* (13 p.)

emarque au sujet du Mémoire précédent. M. Lindhagen établit les diverses causes étudiées par M. Ericsson ne peuvent pro- ·e que des effets insensibles, ce qu'il était important de constater, urée du jour sidéral étant un des éléments fondamentaux de ıtronomie.

ᴅʟᴜɴᴅ (E.). — *Sur la cause des phénomènes galvaniques de ·oidissement et de réchauffement découverts par Peltier.* p.)

ᴇᴍsᴛʀöᴍ (K.-S.). — *Observations sur l'électricité atmosphé- ue et l'aurore polaire pendant l'Expédition polaire suédoise* 1868. (26 p.)

Eᴅʟᴜɴᴅ (E.). — *Sur le passage des courants électriques d'in- ction et de disjonction à travers des gaz d'inégale densité et tre des pôles de forme dissemblable.* (24 p.)

ɾ. XXVII; 1870.

Eᴅʟᴜɴᴅ (E.). — *Sur la force électromotrice dans le contact deux métaux.* (15 p.)

Dᴀʜʟᴀɴᴅᴇʀ (G.-R.). — *Sur quelques applications des lois du ɔuvement géométrique à la dynamique.* (8 p.)

L'auteur établit entre autres ce théorème : « Dans le mouvement ın corps solide, la vitesse orthogonale est perpendiculaire au plan ıgent commun aux deux surfaces coniques, dont le roulement ıe sur l'autre peut être considéré comme produisant le mouve- ıt du corps autour de son centre de gravité. Elle forme un angle 270 degrés avec l'accélération angulaire normale. »

ʀɪᴄssᴏɴ (J.). — *Influence de la chaleur solaire sur le mouve- ıt de rotation de la Terre.* (17 p.)

'auteur défend les idées et les calculs exposés dans son précé- t Mémoire contre les objections de M. Lindhagen.

s travaux de M. Liouville, et il propose une méthode générale d'intégration, conduisant à des intégrales complètes où la va- la variable indépendante n'est sujette à aucune restriction.

IND (E.). — *Détermination du rapport de poids entre la* *édoise* (skålpund) *et le kilogramme français*. (31 p.).

ltats des comparaisons faites à Paris, en 1867, par ngström et Nordenskiöld. D'après ces recherches, le rap- tre les poids suédois et français en laiton, de densité = 8,16, ans l'air à 15 degrés de température et $0^{m},76$ de pression trique, est exprimé par les égalités

$$ = 2,3525214 \text{ livres suéd.}, \quad 1 \text{ liv. suéd.} = 425^{gr},0758.$$

[; 1869.

TRÖM (S.). — *Recherches expérimentales sur la marche* *sité des courants d'induction voltaïque*. (86 p., 4 pl.; fr.)

TRÖM (S.). — *Observations magnétiques pendant l'Expé-* *polaire suédoise de* 1868. (47 p.)

GREN (K.). — *De l'électricité considérée comme force* *ue*. (45 p., 1 pl.)

; 1870.

ER (A.). — *Étude sur le mouvement de la planète Pan-* 122 p.)

eur a calculé, à l'aide de la méthode de M. Hansen, les per- ons de cette planète, dues aux actions de Jupiter, de Saturne ars.

ES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE (1).

e, t. III; 1873.

NT (J.). — *Fonctions invariables des paramètres de l'équa-* *égrale des surfaces du second degré*. (56 p.)

équation du second degré entre trois variables étant rappor- ois axes quelconques, si l'on vient à changer les directions

---

(1) aissant à des époques indéterminées, par volumes in-8°.

varieront : mais il existe
angles que font entre eux les
transformation. L
algèbre ordinaire.
et à la recherche de ses

grales définies.
connues

$$dx,$$

$$dx.$$

un certain nomb

la théorie de

rendre la théorie
elle du plus gr
un principe
ilité d'un nom
et applicab
nécessaire de cl
base par ce nom
théorème, qu
tible sont né

principes du
d'un A

du Calcu
a cru préf
dans sa
pas i
même de la
départ la possi

veloppement de l'accroissement de la fonction en une série
mée suivant les puissances de l'accroissement de la variable.
ferons seulement remarquer que c'est en vain que l'on espé-
éviter ainsi la considération des *limites;* car le développe-
d'une fonction en série suppose nécessairement l'existence
limite de la somme d'un nombre indéfiniment croissant de
s de cette série, et nous ne voyons pas en quoi la conception
tte limite de somme est plus simple que celle de la limite du
rt de deux variables infiniment petites. Il semble qu'il y ait
ue malentendu entre l'auteur et les géomètres qui adoptent,
une forme plus ou moins modifiée, les principes établis avec
de netteté par Carnot, Cauchy et Duhamel. Sans cela il eût été
le de prévenir le lecteur que dx ne sera jamais supposé égal à
ni dans le calcul, ni dans les applications, cette quantité per-
son caractère d'infiniment petit, c'est-à-dire de *variable,* dès
lui assigne une valeur constante, telle que zéro. L'auteur
que sa méthode aux problèmes fondamentaux de la théorie des
bes et de la Mécanique.

LIE (F.). — *Note sur l'extension des théorèmes de Pascal et rianchon aux courbes planes et aux surfaces du troisième e et de la troisième classe.* (9 p.)

ASSEUR (J.-B.). — *Double perspective.* (23 p.)
bjet de ce travail est une modification des méthodes de la
étrie descriptive, où l'on remplace la double projection cylin-
e par une double projection conique. Le procédé consiste à
ruire sur un même tableau deux perspectives d'un même
, ou de deux points différents. Le plan horizontal de projection
is pour tableau; les deux positions de l'œil sont données par
projections sur le tableau et les cotes de leurs hauteurs.
eur applique sa méthode à la démonstration de diverses pro-
ons de Géométrie.

AINDORGE (J.). — *Problème de Mécanique.* (14 p., 1 pl.)
de du mouvement d'un point sollicité vers une courbe fixe
ne force exprimée en fonction de la distance r par la formule
$\frac{B}{r^3}$, la vitesse initiale étant supposée perpendiculaire au rayon
r initial.

[illegible]

[illegible]

[illegible] — [illegible]

[illegible] parties, de [illegible] ; [illegible]

[illegible] à l'aide de [illegible]

[illegible] elle se [illegible] générale de la [illegible] particulières sur [illegible] groupes de sur[illegible] étudiées par [illegible]

[illegible] — [illegible] Leyde. (1 p.)

[illegible] — [illegible] la diffé[illegible] (1 p.)

[illegible] — Sur [illegible] électrodynamique. [illegible]

[illegible] — Sur [illegible] charge d'une [illegible]

[illegible] — Sur une [illegible] des surfaces minima [illegible]

[illegible] minima jouissent de la pro[illegible] somme des valeurs récipro-

---

[illegible] Bulletin [illegible]

ies des mesures des courbures principales est égale à zéro. En ppuyant sur cette remarque, l'auteur établit les formules qui finissent les quantités minima dans les variétés de $n-1$ dimen-ons. En faisant $n=3$, ces formules conduisent à la solution relare aux surfaces minima, donnée par Riemann et Weierstrass.

SPÖRER. — *Sur les relations entre les taches et les protubérances laires*. (8 p.)

KUMMER. — *Sur quelques genres particuliers de surfaces du uatrième degré*. (9 p.)

Les enveloppes de surfaces du deuxième degré, dans le cas où le ntact entre l'enveloppe et l'enveloppée a lieu suivant une courbe a quatrième degré, sont de la forme

$$\varphi^2 = \psi \cdot \chi,$$

ù φ, ψ, χ sont des fonctions arbitraires du deuxième degré des oordonnées. Le groupe des enveloppées est alors représenté par équation

$$\alpha^2 \psi + 2\alpha\varphi + \chi = 0.$$

L'auteur établit que, pour ce genre de surfaces du quatrième de-ré, le système de rayons (*Strahlensystem*), qui est en général du louzième ordre et de la vingt-huitième classe, se décompose en leux systèmes, l'un du quatrième ordre et de la douzième classe, 'autre du huitième ordre et de la sixième classe.

L'autre groupe de surfaces considéré est exprimé par la formule

$$\Phi^2 = pqrs,$$

ù Φ est une fonction du deuxiène degré et p, q, r, s des fonctions inéaires des coordonnées. L'auteur étudie particulièrement le cas ù Φ représente une surface sphérique, et p, q, r, s les quatre faces l'un tétraèdre régulier inscrit.

KRONECKER (L.). — *Sur la théorie algébrique des formes qua-ratiques*. (11 p.)

Des traductions de cette Note et de la suivante ont paru dans Bulletin, t. IV, p. 256, et t. V, p. 301.

BORCHARDT (C.-W.). — *Sur l'ellipsoïde de volume minimum*

pour des valeurs données des aires d'un certain nombre de ses sections droites (31 p.).

SCHWARZ (H.-A.). — *Expression de la deuxième variation de l'aire des surfaces minima en général, et des portions d'hélicoïde en particulier* ([illegible] p.).

L'auteur étudie principalement la relation entre les surfaces minima et les surfaces d'équilibre des masses liquides sans pesanteur; suivant M. Plateau, l'hélicoïde gauche à plan directeur n'a pas de limites de stabilité [1]. M. Schwarz établit que l'équilibre stable est limité et qu'il dépend du rapport entre la hauteur de la spire et le rayon du cylindre de l'hélice.

Quelques expériences qu'il a entreprises ont donné des résultats conformes à sa théorie.

[illegible]. — *Contribution à la connaissance plus exacte de la machine électrique de deuxième espèce* (18 p.).

KRONECKER (L.). — *Démonstration de la loi de réciprocité pour les restes quadratiques* (2 p.).

Démonstration donnée par M. Zeller, inspecteur des écoles [illegible] (Wurtemberg).

A. P.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES [2].

T. LXXVI, 1er semestre [illegible].

N° 18. Séance du 5 mai 1873.

DUPUY DE LÔME. — *Rapport sur un Mémoire de M.* BERTIN, *relatif à la résistance opposée par la carène des navires aux mouvements de roulis.*

COLLET. — *Mémoire sur les conditions d'intégrabilité des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction.*

---

[1] [illegible] d'une masse liquide sans pesanteur. *Mémoires de* [illegible] *Académie de Belgique*, t. XXXVI.

[2] Voir *Bulletin*, [illegible].

Si $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_m = 0$ sont m équations renfermant n variables indépendantes $q_1, q_2, \ldots, q_n$, et les dérivées partielles $p_1, p_2, \ldots, p_n$, prises par rapport à ces variables, d'une fonction z, qui, d'ailleurs, n'entre pas dans ces équations, on pose

$$(1) \qquad (f_i, f_k) = \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_h} \frac{\partial f_k}{\partial p_h} - \frac{\partial f_i}{\partial p_h} \frac{\partial f_k}{\partial q_h} \right);$$

l'auteur se propose de chercher les relations qui existent entre les fonctions diverses que l'on obtient en effectuant l'opération (1), soit avec les fonctions proposées, soit avec celles qui résultent déjà de cette opération.

STEPHAN. — *Nouvelle observation de la comète II, 1867.*

N° 19. Séance du 12 mai 1873.

SPOTTISWOODE (W.). — *Note sur la représentation algébrique des lignes droites dans l'espace.*

M. Spottiswoode remarque qu'on peut représenter une droite de l'espace au moyen de trois équations homogènes et linéaires à cinq variables, et étend à ce cas la définition et les relations que Plücker a données pour le cas où la droite est définie par deux équations homogènes et linéaires à quatre variables.

MATHIEU (É.). — *Mémoire sur la théorie des dérivées principales et son application à la Mécanique analytique.*

L'auteur montre d'abord que les théorèmes relatifs aux dérivées ordinaires d'une somme et d'une fonction composée sont vrais pour les dérivées qu'il appelle *dérivées principales;* il applique ensuite sa théorie des dérivées principales au problème des *perturbations.*

N° 20. Séance du 19 mai 1873.

FAYE. — *Note sur les cyclones solaires, avec une réponse de M.* RESPIGHI *à MM.* VICAIRE *et* SECCHI.

TRESCA. — *Note sur les propriétés mécaniques de différents bronzes.*

N° 21. Séance du 26 mai 18[illegible].

Sébillot (L.-Am.). — *Rectification d'un point de la Communication de M. M[illegible] au sujet de la découverte de la variation.*

Boussinesq (J.). — *Sur le calcul des phénomènes lumineux produits à l'intérieur des milieux transparents animés d'une translation rapide, dans le cas où l'observateur participe lui-même à cette translation.*

L'auteur énonce la loi suivante:

« Les phénomènes lumineux que perçoit un observateur entraîné, dans un mouvement commun de translation par rapport à l'éther, avec la source de lumière et avec les milieux interposés, ne diffèrent pas de ceux qu'il observerait en regardant la même source à travers les mêmes milieux transparents, si la translation n'existait pas, la densité de l'éther devenant, dans chaque milieu respectif et pour des ondes d'une direction déterminée, plus grande qu'elle n'est dans le rapport de l'unité au carré de la somme de l'unité et du quotient de la composante de la vitesse translatoire suivant la normale aux ondes par la vitesse de propagation de celles-ci à travers le milieu considéré. »

N° 22. Séance du 2 juin 18[illegible].

Puiseux (V.). — *Note sur le passage de Vénus devant le Soleil en 1882.*

M. Puiseux communique à l'Académie les résultats de calculs entrepris pour déterminer à l'avance les principales circonstances du passage de Vénus sur le Soleil en 1882. Les calculs ont été faits à l'aide des Tables du Soleil et de Vénus de M. Le Verrier, le diamètre apparent du Soleil étant supposé de [illegible] à la distance moyenne; la parallaxe solaire a été supposée égale à 8″,86; on a négligé l'aplatissement de la Terre et quelques autres petites quantités.

Circonstances du phénomène pour un observateur supposé au centre de la Terre.

[illegible] décembre. Temps moyen de Paris.

	h m s
Entrée du centre de Vénus sur le disque du Soleil.	2.14.94
Sortie du centre de Vénus	8.12,00
Durée du passage du centre	5.57,06

constances du phénomène pour un observateur placé à la
:e de la Terre :

Heure de l'entrée..... .	$2^h.14^m,9 + 7^m,9 \cos A_1M$,
Heure de la sortie......	$8.12,0 - 7,9 \cos A_2M$,
Durée du passage.......	$5.57,1 + 14,5 \cos A_3M$;

, A_2M, A_3M désignent les arcs de grand cercle qui, sur la
e supposée sphérique, joignent le lieu M d'observation aux
points A_1, A_2, A_3, définis comme il suit :

	Longitude.	Latitude.
A_1.............	$-95°.26'$	$+50°.43'$
A_2.............	-45.31	$+23.25$
A_3.............	$+114.24$	-39.42

près une étude détaillée des diverses phases du phénomène,
Puiseux conclut en ces termes : « En résumé, les mesures de
nces et d'angles de position pourront donner la parallaxe, en
ı, à peu près avec le même degré de précision qu'en 1874;
le passage de 1874 sera notablement plus avantageux que le
nt pour la détermination de la parallaxe solaire par les obser-
ns de contact, c'est-à dire par la méthode qui, après tout,
ıera probablement les meilleurs résultats. Il est donc à désirer
rien ne soit négligé pour assurer dans les meilleures conditions
ervation du prochain passage. »

CCHI (le P.). — *Essai, pendant une éclipse solaire, de la nou-
méthode spectroscopique proposée pour le prochain passage
'énus.*

ND, STEPHAN, HENRY (Paul et Prosper), ANDRÉ et BAILLAUD.
ɔcuments relatifs à la Comète à courte période II, 1867.

:NRY (J.). — *Nouvelle petite planète, découverte à Washing-*

BAUCOUR. — *Propriétés relatives aux déplacements d'un corps
etti à quatre conditions.*

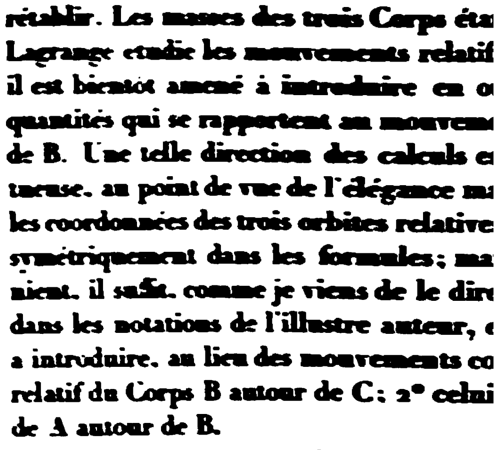
l'on fait prendre au corps toutes les positions infiniment voi-
d'une position déterminée, une droite quelconque engendre
inceau; parmi les pinceaux ainsi engendrés, il y en a qui sont
ıinceaux de normales à une famille de surfaces; les droites qui

Le Chapitre premier du Mémoire de Lagrange sur le *Problème rois Corps* mérite d'être compté parmi les travaux les plus im- nts de l'illustre auteur. Les équations différentielles de ce lème, lorsqu'on ne considère, ce qui est permis, que des mou- nts relatifs, constituent un système du *douzième ordre*, et la ion complète exige en conséquence *douze* intégrations; les s intégrales connues étaient celle des *forces vives* et les trois fournit le principe des *aires* : il en restait donc *huit* à décou- En réduisant à *sept* le nombre des intégrations nécessaires l'achèvement de la solution, Lagrange a fait faire à la question as considérable, et les géomètres qui se sont occupés après u Problème des trois Corps ne sont pas allés au delà. Leurs s, cependant, n'ont pas été inutiles : des méthodes nou- s et ingénieuses ont été proposées, comme, par exemple, que Jacobi a développée dans son célèbre Mémoire sur l'*Éli- tion des nœuds dans le Problème des trois Corps;* mais ces odes, comme celle de Lagrange, font dépendre la solution du lème de *sept* intégrations.

La méthode de Lagrange est des plus remarquables; elle montre la solution complète du Problème exige seulement que l'on aisse à chaque instant les côtés du triangle formé par les trois s; les coordonnées de chaque corps se déterminent effective- ensuite sans aucune difficulté. Quant à la recherche du gle des trois Corps, elle dépend de trois équations différen- s, parmi lesquelles deux sont du *deuxième ordre*, et la troi- du *troisième ordre*. Ces équations renferment deux constantes raires introduites, l'une par le principe des *forces vives*, e par celui des *aires*, en sorte que les distances des corps sont nctions du temps, et de *neuf* constantes arbitraires seulement. i les *douze* arbitraires que l'intégration complète doit intro- , il y en a donc *trois* qui ne figurent pas dans les expressions istances, circonstance que l'examen des conditions du Pro- e permet d'ailleurs de mettre en évidence *a priori*.

Préoccupé assurément de l'application qu'il voulait faire de sa elle méthode à la *Théorie de la Lune*, application qui fait t du Chapitre IV de son Mémoire, Lagrange a négligé d'intro- , dans ses formules, la symétrie que comportait son analyse, trie qu'un très-léger changement dans les notations permet de





rétablir. Les masses des trois Corps éta
Lagrange étudie les mouvements relatif
il est bientôt amené à introduire en o
quantités qui se rapportent au mouvem
de B. Une telle direction des calculs e
tueuse, au point de vue de l'élégance m
les coordonnées des trois orbites relative
symétriquement dans les formules; ma
nient, il suffit, comme je viens de le dire
dans les notations de l'illustre auteur, e
a introduire, au lieu des mouvements co
relatif du Corps B autour de C; 2° celui
de A autour de B.

» Un habile géomètre allemand, M. (ment l'analyse de Lagrange en se pla je viens d'indiquer, et il a publié son du *Journal de Crelle* (imprimé à Berli considère que ce qu'il nomme le *Prob* celui qui a pour objet de déterminer à des trois Corps; c'est à ce problème re mené d'ailleurs, comme je l'ai déjà dit pl ral. M. Hesse, auquel la Science est rede importants, a été moins heureux ici qu'i tres occasions. Non-seulement il n'a p l'analyse parfaitement rigoureuse que nou une inadvertance l'a fait tomber dans u diquerai plus loin, et qui infirme absolu tons que la notation particulière dont l usage, pour abréger l'écriture des formul à celle de son illustre devancier.

» Pour justifier les remarques qui pr d'entrer dans quelques détails; je le ferai en introduisant dans l'analyse de Lagran saires pour rétablir la symétrie des form solution de tout ce qui n'est qu'accessoire

» 1. Soient x, y, z les coordonnées rect port à C; x', y', z' celles du Corps C p

e A par rapport à B; on aura

$$x + x' + x'' = 0, \quad y + y' + y'' = 0, \quad z + z' + z'' = 0.$$

it aussi

$$: \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad r' = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}, \quad r'' = \sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}.$$

s équations différentielles du mouvement forment trois dont l'un est

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r^3}x - A\left(\frac{x}{r^3} + \frac{x'}{r'^3} + \frac{x''}{r''^3}\right) = 0,\\ &\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r'^3}x' - B\left(\frac{x}{r^3} + \frac{x'}{r'^3} + \frac{x''}{r''^3}\right) = 0,\\ &\frac{d^2x''}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r''^3}x'' - C\left(\frac{x}{r^3} + \frac{x'}{r'^3} + \frac{x''}{r''^3}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

les deux autres se déduisent du précédent en changeant x en z. A cause des formules (1), les équations de chaque peuvent être réduites à deux distinctes; ces équations coïnent avec les équations (A), (B), (C) de Lagrange, si l'on y le simple changement de x, y, z, x'', y'', z'' en $-x''$, $-z''$, $-x$, $-y$, $-z$.

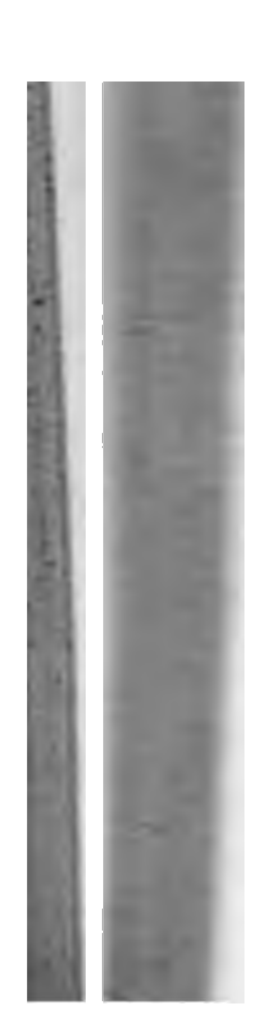
groupe (3) et des deux groupes analogues, on déduit

$$\frac{{}^2y - y\,d^2x}{A\,dt^2} + \frac{x'\,d^2y' - y'\,d^2x'}{B\,dt^2} + \frac{x''\,d^2y'' - y''\,d^2x''}{C\,dt^2} = 0,$$

n qui subsiste quand on exécute la substitution circulaire z) et qu'on répète cette substitution. On conclut de là les tégrales des aires, savoir :

$$\begin{aligned} &\frac{y\,dz - z\,dy}{A\,dt} + \frac{y'\,dz' - z'\,dy'}{B\,dt} + \frac{y''\,dz'' - z''\,dy''}{C\,dt} = a,\\ &\frac{z\,dx - x\,dz}{A\,dt} + \frac{z'\,dx' - x'\,dz'}{B\,dt} + \frac{z''\,dx'' - x''\,dz''}{C\,dt} = b,\\ &\frac{x\,dy - y\,dx}{A\,dt} + \frac{x'\,dy' - y'\,dx'}{B\,dt} + \frac{x''\,dy'' - y''\,dx''}{C\,dt} = c, \end{aligned}$$

étant trois constantes arbitraires.





donnera

$$q+q'+q''=0,\quad \frac{q}{r^3}+\frac{q'}{r'^3}+\frac{q''}{r''^3}=0.$$

›i l'on différentie deux fois la première équation (2), après r élevée au carré, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2}=\left(x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}\right)+u^2,$$

:te formule subsiste quand on y remplace x, y, z, r, u par x', , r', u', ou par x'', y'', z'', r'', u''. Si donc on multiplie les équa- (3) par x, x', x'' respectivement, et qu'on ajoute ensuite cha- des équations résultantes avec celles qu'on en déduit par le ;ement de x en y et en z, on aura, en vertu de la formule dente,

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2}+\frac{A+B+C}{r}+A(p'q'-p''q'')-u^2=0,\\
&\frac{1}{2}\frac{d^2(r'^2)}{dt^2}+\frac{A+B+C}{r'}+B(p''q''-\ \ pq)-u'^2=0,\\
&\frac{1}{2}\frac{d^2(r''^2)}{dt^2}+\frac{A+B+C}{r''}+C(pq\ \ -p'q')-u''^2=0,
\end{aligned}\right.$$

›rmules (13) répondent aux formules (F) de Lagrange, ou, ce :vient au même, aux formules (K), en tenant compte des for- ; (J) de l'auteur.

ijoutons les quatre équations, (13) et (7) après avoir divisé les premières par A, B, C respectivement, on aura

$$\left\{\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2A}\frac{d^2(r^2)}{dt^2}+\frac{1}{2B}\frac{d^2(r'^2)}{dt^2}+\frac{1}{2C}\frac{d^2(r''^2)}{dt^2}\right]\\
&\qquad-(A+B+C)\left(\frac{1}{Ar}+\frac{1}{Br'}+\frac{1}{Cr''}\right)=f.
\end{aligned}\right.$$

ette équation coïncide avec l'équation (L) de Lagrange, quand ermute les lettres r et r''; c'est une transformée de l'intégrale rces vives; elle ne renferme que les seules distances r, r', r''.

» 3. D'après les formules (1), les trois quantités

$$(x'\,dx'' + y'\,dy'' + z'\,dz'') - (x''\,dx' + y''\,dy' + z''\,dz'),$$
$$(x''\,dx + y''\,dy + z''\,dz) - (x\,dx'' + y\,dy'' + z\,dz''),$$
$$(x\,dx' + y\,dy' + z\,dz') - (x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz)$$

sont égales entre elles. Si l'on désigne par $\rho\,dt$ leur valeur, on aura, par le moyen des formules (8),

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
x'\,dx'' + y'\,dy'' + z'\,dz'' &= \tfrac{1}{2}(-dp + \rho\,dt),\\
x''\,dx + y''\,dy + z''\,dz &= \tfrac{1}{2}(-dp' + \rho\,dt),\\
x\,dx' + y\,dy' + z\,dz' &= \tfrac{1}{2}(-dp'' + \rho\,dt),\\
x''\,dx' + y''\,dy' + z''\,dz' &= \tfrac{1}{2}(-dp - \rho\,dt),\\
x\,dx'' + y\,dy'' + z\,dz'' &= \tfrac{1}{2}(-dp' - \rho\,dt),\\
x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz &= \tfrac{1}{2}(-dp'' - \rho\,dt).
\end{aligned}\right.$$

» La quantité auxiliaire ρ que nous introduisons n'est autre chose que celle qui est désignée par $-\frac{d\rho}{dt}$ dans le Mémoire de Lagrange; il est évident que cette quantité peut être exprimée en fonction des vitesses u, u', u'', des distances r, r', r'' et de leurs différentielles dr, dr', dr''. En effet, considérons quatre directions respectivement parallèles à celles des rayons r, r' et des vitesses u, u'; soient L, M, N les cosinus des angles formés par la direction de r' avec les directions de u, u', r; L_1, M_1, N_1 les cosinus des angles formés par les directions de u' et r, de u et r, de u et u'. On aura entre ces six cosinus la relation connue

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&1 - (L^2 + M^2 + N^2 + L_1^2 + M_1^2 + N_1^2) + (L^2L_1^2 + M^2M_1^2 + N^2N_1^2)\\
&\quad + 2(L_1MN + M_1NL + N_1LM + L_1M_1N_1)\\
&\qquad\qquad - 2(LL_1MM_1 + MM_1NN_1 + NN_1LL_1) = 0.
\end{aligned}\right.$$

On a d'ailleurs, par les formules précédentes,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
L &= -\frac{\rho\,dt + dp''}{2r'u\,dt}, & M &= \frac{dr'}{u'\,dt}, & N &= -\frac{p''}{rr'},\\
L_1 &= \frac{\rho\,dt - dp''}{2ru'\,dt}, & M_1 &= \frac{dr}{u\,dt}, & N_1 &= -\frac{u^2 + u'^2 - u''^2}{2uu'}.
\end{aligned}\right.$$

» Faisons, pour abréger, avec Lagrange,

$$) \quad \frac{u'^2+u''^2-u^2}{2}=v, \quad \frac{u''^2+u^2-u'^2}{2}=v', \quad \frac{u^2+u'^2-u''^2}{2}=v'',$$

ù

$$) \qquad u^2=v'+v'', \quad u'^2=v''+v, \quad u''^2=v+v',$$

$$) \left\{ \begin{aligned} \Sigma &= r^2\rho^2 - 2\left(p'\frac{dp''}{dt} - p''\frac{dp'}{dt}\right)\rho \\ &\quad + p'\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2 + p''\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2 + p\left[\frac{d(r^2)}{dt}\right]^2, \\ \Sigma' &= r'^2\rho^2 - 2\left(p''\frac{dp}{dt} - p\frac{dp''}{dt}\right)\rho \\ &\quad + p''\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + p\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2 + p'\left[\frac{d(r'^2)}{dt}\right]^2, \\ \Sigma'' &= r''^2\rho^2 - 2\left(p\frac{dp'}{dt} - p'\frac{dp}{dt}\right)\rho \\ &\quad + p\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2 + p'\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + p''\left[\frac{d(r''^2)}{dt}\right]^2, \end{aligned} \right.$$

juation (15) deviendra, après la substitution des valeurs (17),

$$) \left\{ \begin{aligned} &\left(\rho^2 + \frac{dp\,dp' + dp'\,dp'' + dp''\,dp}{dt^2}\right)^2 - 4(\Sigma v + \Sigma' v' + \Sigma'' v'') \\ &\qquad + 16(pp' + p'p'' + p''p)(vv' + v'v'' + v''v) = 0; \end{aligned} \right.$$

st précisément l'équation (N) de Lagrange. Si l'on suppose que u'^2, u''^2 y soient remplacés par leurs valeurs tirées des équa-ns (12), la quantité auxiliaire ρ ne dépendra que des distances r', r'' et de leurs différentielles du premier et du deuxième lre.

» 4. Puisque l'on a

$$(x\,dx' - x'\,dx) + (y\,dy' - y'\,dy) + (z\,dz' - z'\,dz) = \rho\,dt,$$

'ensuit par la différentiation

$$(x\,d^2x' - x'\,d^2x) + (y\,d^2y' - y'\,d^2y) + (z\,d^2z' - z'\,d^2z) = d\rho\,dt,$$

et, si l'on élimine les différentielles secondes des coordonnées au moyen des équations (3) et de celles qui s'en déduisent par le changement de x en y et en z, on aura

$$(22) \qquad \frac{d\rho}{dt} + Apq + Bp'q' + Cp''q'' = 0;$$

cette équation n'est autre que l'équation (H) de Lagrange, en tenant compte du changement de notation.

» 5. Revenons maintenant aux équations (4) : on a identiquement

$$\begin{aligned}
&(y\,dz - z\,dy)(y'\,dz' - z'\,dy') + (z\,dx - x\,dz)(z'\,dx' - x'\,dz') \\
&\quad + (x\,dy - y\,dx)(x'\,dy' - y'\,dx') \\
&= (xx' + yy' + zz')(dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz') \\
&\quad - (x\,dx' + y\,dy' + z\,dz')(x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz).
\end{aligned}$$

et cette formule subsiste quand on écrit x', y', z' ou x'', y'', z'' au lieu de x, y, z ou bien x'', y'', z'' ou x, y, z au lieu de x', y', z'. D'après cela, si l'on fait

$$a^2 + b^2 + c^2 = k^2,$$

et que l'on ajoute les équations (4), après les avoir élevées au carré, on aura, en faisant usage de la précédente formule, ainsi que des formules (2), (5), (15) et (18),

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{1}{A^2}\left[r^2u^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{d(r^2)}{dt}\right)^2\right] + \frac{1}{B^2}\left[r'^2u'^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{d(r'^2)}{dt}\right)^2\right] \\
&\quad + \frac{1}{C^2}\left[r''^2u''^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{d(r''^2)}{dt}\right)^2\right] + \frac{2}{BC}\left[pv - \frac{1}{4}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2\right] \\
&\quad + \frac{2}{CA}\left[p'v' - \frac{1}{4}\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2\right] + \frac{2}{AB}\left[p''v'' - \frac{1}{4}\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2\right] \\
&\quad = k^2 - \frac{A+B+C}{2ABC}\rho^2,
\end{aligned} \right.$$

ce qui est l'équation (H) de Lagrange.

» Si maintenant on suppose que u^2, u'^2, u''^2 soient remplacés partout par les valeurs tirées des formules (13) et que, par le moyen de l'équation (21), ρ soit éliminé des équations (22) et (23), celles-ci

:ontiendront plus que les distances r, r', r''; la première sera roisième ordre et l'autre du deuxième; en les joignant à l'équa- (14), on obtiendra le système différentiel découvert par ·ange. Ce qui précède résume la partie esssentielle du Mémoire auteur.

6. Différentions les équations (5) et remplaçons ensuite les diffé- ielles secondes par les valeurs tirées des équations (3) et des ogues : on aura, en faisant usage des formules précédentes,

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d(u^2)}{dt} - 2(A+B+C)\frac{d\frac{1}{r}}{dt} + A\left(q'\frac{dp'}{dt} - q''\frac{dp''}{dt}\right) + Aq\rho = 0,\\
&\frac{d(u'^2)}{dt} - 2(A+B+C)\frac{d\frac{1}{r'}}{dt} + B\left(q''\frac{dp''}{dt} - q\frac{dp}{dt}\right) + Bq'\rho = 0,\\
&\frac{d(u''^2)}{dt} - 2(A+B+C)\frac{d\frac{1}{r''}}{dt} + C\left(q\frac{dp}{dt} - q'\frac{dp'}{dt}\right) + Cq''\rho = 0;
\end{aligned}\right.$$

ormules coïncident avec les équations (I) de Lagrange, quand ient compte des équations (J) de l'auteur. M. Hesse leur sub- e les trois combinaisons obtenues quand on les ajoute entre , après les avoir multipliées respectivement par $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$, puis $\frac{1}{Ar^3}$, $\frac{1}{Br'^3}$, $\frac{1}{Cr''^3}$, puis enfin par p, p', p''. La première combi- on n'est autre chose que l'équation (6); la deuxième combi- on donne, en se servant des formules (12),

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{Ar^3}\frac{d\left(u^2 - 2\frac{A+B+C}{r}\right)}{at} + \frac{1}{Br'^3}\frac{d\left(u'^2 - 2\frac{A+B+C}{r'}\right)}{dt}\\
&\quad + \frac{1}{Cr''^3}\frac{d\left(u''^2 - 2\frac{A+B+C}{r''}\right)}{dt}\\
&\quad - \left(q^2\frac{dp}{dt} + q'^2\frac{dp'}{dt} + q''^2\frac{dp''}{at}\right) = 0;
\end{aligned}\right.$$

la dernière combinaison, qui seule contient ρ, est, en faisant

usage de l'équation (22),

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \rho\frac{d\rho}{dt} = {} & p\,\frac{d\left(u^2 - 2\,\dfrac{A+B+C}{r}\right)}{dt} \\ & + p'\,\frac{d\left(u'^2 - 2\,\dfrac{A+B+C}{2}\right)}{r'} + p''\,\frac{d\left(u''^2 - 2\,\dfrac{A+B+C}{dt}\right)}{r''} \\ & + Ap\left(q'\frac{dp'}{dt} - q''\frac{dp''}{dt}\right) + Bp'\left(q''\frac{dp''}{dt} - q\frac{dp}{dt}\right) \\ & + Cp''\left(q\frac{dp}{dt} - q'\frac{dp'}{dt}\right). \end{aligned}\right.$$

» Supposons que l'on différentie l'équation (23), ce qui fera disparaitre l'arbitraire k, et que, de l'équation résultante, on tire la valeur de $\rho\dfrac{d\rho}{dt}$ pour la substituer dans l'équation (26). Alors, comme u^2, u'^2, u''^2 représentent les valeurs fournies par les équations (13), les équations (6), (25) et (26), qui sont toutes du troisième ordre et ne renferment aucune arbitraire, constitueront, d'après M. Hesse, le système différentiel duquel dépendent les distances r, r', r'', quand on ne fait pas intervenir les principes des forces vives et des aires. Enfin si, des mêmes équations (6), (25) et (26), on tire les valeurs de $d(u^2)$, $d(u'^2)$, $d(u''^2)$ pour les porter dans l'une des équations (24), celle-ci donnera, d'après le même géomètre, une valeur de ρ qui sera seulement du deuxième ordre; en portant cette valeur dans l'équation (23) et en joignant ensuite cette équation aux équations (14) et (26), on obtiendra un système composé de deux équations du deuxième ordre et une du troisième ordre, dans lequel figureront les deux constantes arbitraires f et k.

» Telle est la solution que M. Hesse propose de substituer à celle de Lagrange, solution qui serait évidemment beaucoup plus simple que celle de l'illustre auteur; mais il n'est pas difficile de se convaincre de l'inexactitude des résultats obtenus par M. Hesse, ou du moins de sa conclusion. Effectivement l'équation (26), après qu'on en a éliminé $\rho\dfrac{d\rho}{dt}$ par l'équation (23) différentiée, n'est pas autre chose que l'équation (6) multiplié par le facteur $\dfrac{r^2}{A} + \dfrac{r'^2}{B} + \dfrac{r''^2}{C}$. les trois équa-

ns du troisième ordre, qui composent le premier système de Hesse, ne sont donc pas distinctes. Le deuxième système du même ımètre ne saurait, en conséquence, avoir d'existence réelle, puis- les équations du premier système sont impropres à fournir les eurs des différentielles du troisième ordre, ou, ce qui revient au me, les valeurs des différentielles $d(u^2)$, $d(u'^2)$, $d(u''^2)$. On ne sau- se dispenser, dans la recherche dont nous nous occupons, de tenir npte de l'équation (21), comme Lagrange a eu soin de le faire.

» Les réflexions qui précèdent ont été l'objet d'une Communica- n verbale que j'ai eu l'honneur de faire récemment au Bureau Longitudes; la théorie qu'elles concernent a une si grande portance, que j'ai jugé utile de les présenter à l'Académie en leur nnant un certain développement. »

SOUILLART. — *Sur la théorie analytique des satellites de Ju- ter.*

Le but du Mémoire de M. Souillart est, en premier lieu, de com- éter un premier travail (*Annales scientifiques de l'École Nor- ale*, t. II, 1re série) en ce qui concerne les inégalités sécu- ires des excentricités et des longitudes des périjoves; et, en second eu, de comparer les formules obtenues pour le calcul des longi- ıdes et des rayons vecteurs avec celles qu'on trouve dans la *lécanique céleste*.

CURIE (J.). — *Sur le désaccord qui existe entre l'ancienne iéorie de la poussée des terres et l'expérience.*

MÉLANGES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. MAXIMILIEN CURTZE.

... Dans l'article que vous avez consacré [1] à mes recherches r les travaux de votre compatriote Nicole Oresme, vous avez in- té avec raison sur l'urgence qu'il y aurait pour les géomètres fran-

---

[1] Voir *Bulletin*, t. III, novembre 1872.

cas à réparer l'injuste oubli dans lequel les plus illustres historiens de la Science ont laissé la mémoire de celui qui fut incontestablement le plus grand mathématicien du XIVe siècle. C'est une dette dont j'aurais vu la France plus empressée de s'acquitter....

Vous avez indiqué, dans cet article, que j'avais récemment découvert d'autres Ouvrages d'Oresme, tant manuscrits qu'imprimés. Peut-être ne sera-t-il pas sans intérêt, pour vous et pour plus d'un ami de l'histoire scientifique, d'apprendre de nouveaux détails sur ces divers écrits. Je me permets donc de vous communiquer les Notes suivantes, dont vous ferez l'usage que vous jugerez convenable.

1° La *Bibliothèque Mazarine*, à Paris, possède deux exemplaires d'une édition parisienne du Traité *De proportionibus* d'Oresme (nº [illegible], fº 312-333, et nº [illegible], fº 40-61), qui n'était restée inconnue jusqu'ici. Cette édition porte pour titre, sur le fº 1: « Tractatus proportionum | Alberti de Saxonia | Tractatus proportionum *Thome bra- | dwardini* | Tractatus proportionum *Nicholai horen.* | Venales reperiuntur *Parisiis* in vico diui | *Iacobi* iuxta templum *Sancti | yuonis* sub | signo *pellicani*. » Les mots en italiques sont imprimés en lettres rouges. Entre les lignes 5 et 6 se trouve la marque de l'imprimeur Godefroy de Marnef (¹). Il y a 22 feuilles à deux colonnes, de 65 lignes chacune. Les feuilles ne sont pas numérotées; mais on trouve sur les feuilles 2-4; 7, 8, 10; 13-15; 17, 18; 19-21, les signatures Aii-Aiiij; B, Bij, Biij; Cj, Ciij, Cij; Dj, Dij; Ej-Eiij. Le Traité d'Oresme comprend depuis la feuille 12 jusqu'à la fin.

2° Le Manuscrit de la *Bibliothèque publique de Bâle*, nº F. III. 31. (4°), contient, feuilles 2 r.-29 r., une copie du *Tractatus de vniformitate et difformitate intensionum* d'Oresme.

Il commence ainsi (feuille 2 r., l. 1-2) : *Cum ymaginationem meam de vniformitate et difformitate intensionum cepissem ordinare, occurrerunt mihi quedam alia que huic proposito interieci.* On lit plus bas (l. 5) : *Huius autem tractatus tres sunt partes principales; prima est de definitione et primo vniformitatis et difformitatis qualitatum permanentium; secunda de definitione et primo successionum; tertia de aquisicione et mensura qualitatum et velocitatum.*

(¹) *Voir* Brunet, *Manuel*, 5e édition, t. I. Paris, 1860; colonne 810.

ınent ensuite les titres des Chapitres, qui sont au nombre pour la première Partie, de 40 pour la deuxième, de 16 pour sième.

ıremière Partie commence feuille 2 v., col. 2 : *Omnis res menlis exceptis numeris ymaginatur ad modum quantitatis ue,* et finit feuille 12 r. : *de quo scriptum est in libro Danielis, pse reuelabit profunda et abscondita,* etc.

deuxième Partie commence immédiatement après par ces *Omnis motus successiuus, scilicet diuisibilis, habet partem liuisibilis vno modo,* et finit feuille 25 v., l. 7 : *et sic explicit ecunda.*

uvrage entier se termine (feuille 29 r., l. 27-29) par ces mots : *quidem alia possent ex prædictis inferri, sed hæc tanquam la sufficiant. Explicit tractatus vtilis sicut patet intuenti ıter M. Oreb* (sic).

Manuscrit contient à la suite, écrite d'une autre main, une e relations géométriques, et enfin une Philosophie morale. *'ex* a été écrit à la fin du XIV[e] siècle ou au commencement .

Dans le Manuscrit de la même Bibliothèque, n° F. V. 6, se , feuille 48r.-53 v., une *Editio Nicholai Oresme contra Astro-* traduction de l'Ouvrage français intitulé : *Liber de Diuinaıs* (¹). Cet écrit commence ainsi (feuille 48, l. 3 et sqq.) : *ılum primum de artibus quibus inquiritur de occultis. artes siue scientie sunt per quas scitur de futuris,* et se e par ces lignes (f° 53 v., l. 18-20) : *Explicit liber magistri lai Oresme de diuinacionibus translatus in latinum, quia ımposuit in gallico, scriptus anno domini* MCCC° LXI° *die ı septima mensis decembris. Sed hic scriptus anno* 1411° *e beati remigij.*

a même Bibliothèque possède encore un exemplaire de l'écrit sé en latin par Oresme lui-même contre les astrologues : *ı astrologos iudiciarios.* Cet exemplaire fait partie du Ma- A. IX. 21 (f° 51 r.-63 v.).

ımmence ainsi : *Incipit : Tractatus Orem . que pars astrosit sectanda : s...s. Multi principes et magnates noxia cu-*

XII de la liste donnée dans le tome III du *Bulletin*, p. 325.

riositate solliciti vanis nituntur artibus perquirere et inuestigare futura. Voici la conclusion : *Quoniam infallibilis veritas dicit: Rex siue princeps perdet populum suum, et principatus sensati stabilis erit, et cetera ideo et sic est finis.*

Explicit tractatus venerandi in xpo patris et domini magistri Nicolai Oresme eggregij (sic) *in theologia professoris et episcopi Normannie. In quo tractatu clare demonstratur que pars astrologie scientie sit sectanda et que non. Scriptus parisijs anno domini* 1404.

Aux altérations de toute sorte que les copistes ont fait subir au nom d'*Oresme*, le Manuscrit F. III. 31. ajoute encore, comme nous venons de le voir, la forme singulière *Oreb*. Le Manuscrit F. V. 6. nous montre, de plus, que l'écrit *de diuinacionibus,* sous sa forme française, a été achevé le 27 décembre 1361, et, par conséquent, comme le dit Meunier, *après* la sortie d'Oresme du collége de Navarre, laquelle eut lieu le 4 décembre 1361 ; mais Meunier est dans l'erreur, lorsqu'il place la composition de cet Ouvrage *après* l'année 1361. L'Ouvrage fut écrit immédiatement après qu'Oresme eut recouvré la liberté de langage, et ne fut plus astreint à l'usage du latin.

Thorn, le 8 août 1873.

M. Curtze.

DE L'EMPLOI DES PETITES PLANÈTES POUR LA DÉTERMINATION DE LA PARALLAXE SOLAIRE;

PAR M. CH. ANDRÉ [1].

Dans le tome III de ce Recueil, nous avons montré que l'observation des planètes télescopiques, faite dans des conditions convenables, pouvait peut-être conduire à une détermination pour ainsi dire continue et de plus en plus approchée de la parallaxe du Soleil. La planète Phocée (25) était, l'an dernier, la plus favorable pour ce genre d'observations; malheureusement, la lettre par laquelle M. Galle, de Breslau [2], recommandait ces observations

---

[1] Voir *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, vol. III, p. 271.
[2] *Astronomische Nachrichten*, n° 1943.

Observatoires de l'hémisphère austral, arriva à Cordova bien emps après l'opposition de cette planète; au Cap de Bonne-rance, le temps ne fut pas favorable, de telle sorte qu'aucune vation n'a été faite dans l'hémisphère austral. Dans l'hémi-re boréal, au contraire, MM. Brünnow à Dunsink, Möller à l, Becker à Neuchâtel et Bruhns à Leipzig ont observé Pho-l'une façon continue, lors de sa dernière opposition; mais ces rvations, quoique assez nombreuses, ne peuvent évidemment uire au but que l'on s'était proposé, puisqu'elles n'ont point correspondantes dans l'hémisphère austral.

éanmoins, même pour cet objet, elles ne doivent pas être con-rées comme entièrement perdues, car leur discussion complète évidemment donner une notion assez précise de l'approxima-du procédé.

e ces quatre séries d'observations, trois ont été faites en vue ne d'obtenir la parallaxe solaire, et par conséquent avec des autions particulières; les autres, au contraire, celles de Bruhns, à Leipzig, ne sont que des observations ordinaires de lanète Phocée, destinées à la correction de son orbite. M. Galle u devoir néanmoins les joindre à sa discussion [1].

Dublin, nous disposons de 8 jours d'observations avec 24 com-iisons par jour;

Lund, nous trouvons 11 jours d'observations et 40 comparai-par jour;

Neuchâtel, 7 jours d'observations et 14 comparaisons par jour.

es deux premières séries seules ont été faites avec des instru-its de premier ordre (12 pouces d'ouverture), supportant un sissement assez fort, environ 300 fois; tandis qu'à Neuchâtel M. Becker ne disposait que d'une lunette de 6 pouces d'ouver-, dont le grossissement maximum ne dépassait pas 168 fois; outre, à Dublin et à Lund seulement, les observations ont été s sur un plan uniforme; celles-là seules sont donc réellement parables. Malheureusement, les deux séries d'observations dont s parlons n'ont qu'un jour commun, de telle sorte qu'il convient comparer leurs résultats séparés avec ceux qu'ont donnés les x autres séries faites à Neuchâtel et à Leipzig.

---

(1) *Astronomische Nachrichten*, n° 1948.

Quoi qu'il en soit, le plan d'observations recommandé par M. Galle était le suivant : Chaque soir, on mesure micrométriquement la différence de déclinaison entre la planète et deux étoiles, dont l'une la précède tandis que l'autre la suit en ascension droite, et tellement choisies que la planète ait une déclinaison intermédiaire entre les leurs, sans que pour cela la différence de déclinaison entre la planète et chacune d'elles dépasse 5 minutes. De la sorte, on pourra se servir d'un grossissement assez fort et avoir des pointés plus précis. On répétera ces comparaisons en nombre suffisant, en faisant occuper à chaque fois, aux deux astres que l'on compare, des positions différentes dans le champ de l'instrument; puis on recommencera les mêmes mesures dans la seconde position de l'instrument, et l'on combinera ensemble les résultats ainsi trouvés. En opérant ainsi, avec la plus grande symétrie possible, on aura éliminé la plupart des erreurs qui peuvent se présenter, telles que l'irrégularité du pas de la vis, les variations de ce pas et de la distance focale par suite des changements de température, les défauts de l'éclairement du champ, l'équation personnelle. MM. Brünnow et Möller ont adopté ce plan et l'ont rigoureusement suivi; aussi leurs observations paraissent-elles d'une grande précision. Ainsi l'erreur moyenne de chaque pointé est de $\pm 0'',29$ pour Dunsink et $\pm 0'',32$ pour Lund; d'où l'on déduit comme erreur probable de la moyenne $\pm 0'',02$ dans le premier cas, et $\pm 0'',01$ dans le second.

D'un autre côté, la comparaison des différences de déclinaison entre Phocée et les deux étoiles donne, pour le seul jour commun aux deux stations, Dublin (D) et Lund (L) :

A l'aide de l'Étoile australe........	$D-L = -0'',18$
A l'aide de l'Étoile boréale..........	$D-L = +0'',22$

ce qui conduit, en moyenne, à la valeur

$$+0'',02$$

pour moyenne des différences, c'est-à-dire pour l'erreur dont on doit considérer comme affecté le résultat des observations faites, pendant cette soirée, dans les deux stations précédentes.

Les observations de M. Becker sont beaucoup moins précises,

ıome ne faisant dans chaque soirée que 14 pointés sur les la planète et n'observant que dans une seule position de ument, dont le champ était d'ailleurs assez irrégulière-ıiré. Aussi l'erreur moyenne d'un pointé est-elle relative-te, $\pm$ 0",54. Quant à la précision des observations de ns, nous n'en avons pas de mesure exacte, mais on peut ainement la considérer comme au plus égale à celle des ons de M. Becker. Ceci étant posé, la comparaison des ons faites en des jours communs dans deux de ces quatre lonne, pour la correction de leurs observations prises deux es nombres suivants, où N et Le désignent les observations âtel et Leipzig, et les lettres A et B indiquent si l'étoile le ou australe par rapport à la planète.

Dublin.

Août	18	+0",18	A
	18	−0,22	B
	18	−0,32	A
	19	−0,53	A
	29	+0,19	B
	30	0,00	A
enne...		−0,12	

Leipzig.

D - Le	Août	30	0",00	A
L - Le		25	+0,50	B
»		25	−0,98	A
»		28	−0,05	B
N - Le		25	+0,79	B
»		25	−1,02	A
»	Sept.	6	−0,22	A
»		6	+0,88	B
Moyenne...			−0,01	

Lund.

Août	18	−0",18	A
	18	+0,22	B
	16	−0,04	B
	17	+0,19	B
	18	−0,50	A
	25	+0,29	B
	25	−0,04	A
	25	−0,50	B
	25	+0,98	A
	28	+0,05	B
enne...		+0,05	

Neuchâtel.

D - N	Août	18	+0",32	A
»		19	+0,53	A
»		29	−0,19	B
L - N		16	+0,04	B
»		17	−0,19	B
»		18	+0,50	A
»		25	−0,29	B
»		25	+0,04	A
Le - N		25	−0,79	B
»		25	+1,02	A
»	Sept.	6	+0,22	A
»		6	−0,88	B
Moyenne...			+0,05	

L'écart moyen étant toujours très-petit et d'autant plus faible que les nombres des comparaisons de la planète avec une étoile australe et boréale sont plus voisins de l'égalité, on est en droit de conclure que, si l'un des quatre Observatoires considérés se fût trouvé dans l'hémisphère austral, la valeur que l'on aurait déduite pour la parallaxe solaire n'aurait pas été entachée d'une erreur plus considérable que les précédentes, erreur qui ne porterait que sur son troisième chiffre. Il y a donc lieu, d'après M. Galle, de continuer l'essai de détermination qu'il a proposé.

Il faut remarquer cependant que l'accord, à quelques centièmes de seconde près, que nous avons constaté plus haut dans les quatre cas que nous avons considérés, peut n'être qu'accidentel, et qu'alors la conclusion que nous en avons déduite ne serait rien moins qu'assurée. Aussi devra-t-on, à l'avenir, diriger, dans les différents Observatoires, toutes les observations d'après un plan commun, les faire de la même manière et surtout avec des instruments aussi analogues que possible.

D'un autre côté, les saisons étant opposées dans les deux hémisphères, il arrivera souvent qu'à des nuits favorables pour l'observation dans l'hémisphère austral correspondront, dans notre hémisphère, des nuits où le ciel sera couvert; ce seront évidemment autant de nuits perdues. Le seul moyen d'atténuer ce grand inconvénient est d'augmenter le plus possible le nombre des Observatoires qui coopèrent à cet essai de détermination de la parallaxe solaire; mais alors surgit immédiatement un nouvel obstacle, car il devient de plus en plus difficile de faire partout les observations avec des instruments à peu près équivalents.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Bierens de Haan (D.). — Over eenige nieuwe herleidings formulen bij de theorie der bepaalde integralen. 1 fl. 40.

Durège (H.). — Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. — 2. Aufl. Leipzig, Teubner. In-8, XII-223 p. 1 Thlr. 22 Ngr.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

' et BOUQUET, professeurs à la Faculté des Sciences. — THÉORIE DES CTIONS ELLIPTIQUES. 2e édition. Premier fascicule. In-4°, 416 p. — Paris, ıthier-Villars. — Prix : 30 fr.

. première édition de la *Théorie des fonctions doublement ɔdiques et, en particulier, des fonctions elliptiques,* était ıis longtemps épuisée. Les rares exemplaires qui se trouvaient le commerce avaient atteint un prix élevé. Cet excellent Oue, qui a marqué un progrès si considérable dans l'étude des tions d'une variable imaginaire, était sur le point de man-· aux jeunes géomètres. Nous devons donc remercier d'abord . Briot et Bouquet d'avoir bien voulu nous donner une nou-ɜ édition de leur travail, considérablement étendue et mise en ɔort avec les progrès les plus récents de l'Analyse. Le premier icule seul de la nouvelle édition a paru; mais nous avons lieu ɔenser que, dans quelques semaines, l'Ouvrage sera complétent terminé. Nous attendrons l'apparition du deuxième fascicule r indiquer d'une manière générale le plan et le but des auteurs ; s, dès à présent, nous devons rendre un compte détaillé des ts importants traités dans la partie que nous avons sous les x. Nous nous contenterons de faire remarquer que l'exposition matières a reçu un développement qui en accroît de beaucoup érêt et la portée; plusieurs Chapitres sont entièrement nouıx, en sorte que la première édition peut tout au plus être ıidérée comme un abrégé de la nouvelle. Les auteurs donnent, ɜ fois, tous les développements nécessaires pour l'intelligence plète des théorèmes, et nous sommes convaincu que leur Oue servira désormais de guide sûr et clair aux personnes désiɜs de bien approfondir la théorie des variables imaginaires.

ı *Théorie des fonctions elliptiques* est divisée en Livres; les ɜs se subdivisent en Chapitres.

: Livre Ier est intitulé : les *Fonctions algébriques.*

traite de la représentation des variables imaginaires et de la ition des fonctions et de leurs dérivées. Les auteurs ont changé ɜnominations qu'ils avaient autrefois adoptées d'après Cauchy.

C'est ainsi qu'ils appellent *monotropes à l'intérieur d'un contour* C toutes les fonctions qui n'ont qu'une seule valeur pour un point z, situé à l'intérieur de ce contour, quel que soit le chemin qu'on suive à l'intérieur de ce contour pour arriver du point initial z_0, où la valeur de la fonction est donnée, au point considéré z. Une fonction rationnelle est monotrope dans toute l'étendue du plan. La fonction est dite *holomorphe* quand elle est monotrope et a une dérivée dans toute l'étendue du plan considéré. Les *pôles* sont les points pour lesquels la fonction u devient infinie, mais de telle manière que la fonction $\frac{1}{u}$ demeure holomorphe dans le voisinage du pôle. Enfin les fonctions *méromorphes* sont celles qui sont holomorphes dans toute une partie du plan, excepté en certains pôles. A cette classe appartiennent, par exemple, les fractions rationnelles. Ajoutons que, pour étudier la fonction quand la variable devient infinie, les auteurs, à l'exemple de Riemann, emploient la transformation par rayons vecteurs réciproques, qui rend de si grands services, en ramenant l'étude de la fonction pour les valeurs infinies à l'examen de ce qui se passe autour d'un point.

Les premières fonctions étudiées sont les fonctions algébriques. Le Chapitre II est consacré à la démonstration du théorème fondamental sur la théorie des équations, au théorème de Cauchy sur les racines imaginaires, à l'étude de ces racines et aux lois de leur permutation autour des points critiques. Plusieurs exemples numériques permettent au lecteur de se familiariser avec les propriétés si importantes des fonctions algébriques.

Le Livre II traite des *Fonctions définies par les séries*.

Le Chapitre Ier comprend l'étude des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable. L'application des principes établis aux fonctions e^z, sin z, cos z et aux fonctions inverses fait l'objet du Chapitre suivant. Les auteurs examinent ensuite la théorie des séries à double entrée, et de la fonction $\Theta(z)$ définie par la série

$$\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{2nz+n^2a}.$$

Ils démontrent que cette fonction est holomorphe dans toute l'étendue du plan, qu'elle est paire et simplement périodique, etc.

ette fonction, par des transformations très-simples, donne naisnce à quatre autres fonctions, dont les quotients sont les fonc-ons elliptiques. L'étude des propriétés les plus élémentaires de s fonctions termine le Livre II.

Le Livre III traite des *Intégrales définies*. Après avoir exposé s principes essentiels et leur application à quelques exemples trèsélégants, mais particuliers, MM. Briot et Bouquet abordent la conséquence la plus importante de ces principes, je veux dire le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances ntières de la variable. Ils donnent le théorème de Taylor, tel qu'il a été démontré par Cauchy, et en font l'application à la formule de Lagrange. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence de cette série sont bien connues : elles ont été indiquées avec toute la netteté possible par Cauchy et par F. Chiò. Il n'y a donc plus rien de nouveau à établir sur cette question, et ce qui a pu faire illusion, dans ces derniers temps, à quelques géomètres, c'est que, dans son beau Mémoire sur cette série, M. Rouché s'est contenté de donner une condition suffisante pour la convergence, mais nullement nécessaire. MM. Briot et Bouquet traitent cette question avec une clarté parfaite, et en donnent des exemples qui ne peuvent laisser de doute dans l'esprit de personne. Le Livre se termine par l'examen de la question difficile des périodes, où les auteurs ont mis à profit, en les développant, les recherches de leurs devanciers, en particulier celles de MM. Clebsch et Gordan.

Les Livres précédents étudient la génération des fonctions par les équations implicites, par les séries, par les intégrales définies, et préparent l'examen des propriétés générales des fonctions, qui fait l'objet du Livre IV.

C'est dans ce Livre que sont étudiés les caractères distinctifs qui séparent une fonction entière, ou simplement rationnelle, ou algébrique irrationnelle de z, de toutes les autres fonctions ; les propriétés de la partie réelle et de la partie imaginaire d'une fonction; et enfin les théorèmes généraux relatifs aux fonctions doublement périodiques. Les auteurs commencent par démontrer les propositions qui figurent dans la première édition, et en particulier les beaux théorèmes de M. Liouville, sur le nombre des zéros et des infinis, sur l'expression de toute fonction périodique au moyen d'une fonction du second ordre et de sa dérivée; ils ajoutent plusieurs propo-

sitions nouvelles et très-générales, au nombre desquelles nous citerons la suivante :

« Étant donnée une fonction méromorphe doublement périodique $u = f(z)$, de l'ordre n, aux périodes élémentaires ω, ω', toute autre fonction méromorphe qui admet ces deux périodes s'exprime rationnellement au moyen de la première fonction et de sa dérivée. »

Le Chapitre V est consacré à l'exposition de la méthode générale pour le développement d'une fonction en une somme composée d'une infinité de termes rationnels, et à l'application de cette méthode aux fonctions circulaires et elliptiques.

Le Chapitre VI comprend le développement des fonctions en produits, les propriétés de ces produits, et l'application de la méthode générale à sin z, cos z, aux fonctions θ et aux fonctions elliptiques proprement dites.

Le Livre V traite d'un mode de génération des fonctions, que les auteurs avaient réservé avec juste raison, car son étude détaillée exige des connaissances plus étendues; nous voulons parler de la définition par des équations différentielles. Les travaux de MM. Briot et Bouquet sur cette question sont bien connus : ils ont pris place dans plusieurs Traités classiques de Calcul intégral; les auteurs les exposent avec tous les développements nécessaires; ils examinent notamment le cas où le coefficient différentiel devient indéterminé ou infini. Cet examen, sans doute, avait été fait dans le Mémoire original des auteurs, mais il ne figurait pas dans l'édition précédente. La méthode générale est ensuite appliquée à la fonction logarithmique et aux fonctions elliptiques.

Le Chapitre IV traite de l'*Intégration par les fonctions elliptiques*. MM. Briot et Bouquet examinent une équation différentielle, algébrique et irréductible, entre u et $\frac{du}{dz}$, ne contenant pas la variable z, et ils énoncent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle admette une intégrale monotrope. Ces conditions sont les suivantes. Si l'équation est

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + \ldots + f_m(u) = 0,$$

1° les coefficients $f_1(u), \ldots, f_m(u)$ doivent être des polynômes entiers, et, au plus, le premier du second degré, le second du

ıatrième degré,..., le dernier du degré $2m$; 2° chaque racine : l'équation, tant qu'elle ne devient pas nulle, doit rester holoorphe par rapport à u; 3° chaque racine nulle et d'un degré plus :tit que l'unité doit être du degré $1-\frac{1}{p}$, p étant le nombre des cines du système circulaire auquel elle appartient; 4° enfin l'éıation différentielle, déduite de la proposée en posant $u=\frac{1}{v}$, doit ésenter, pour $v=0$, les mêmes caractères.

Les auteurs examinent ensuite dans quels cas l'intégrale sera gébrique, simplement ou doublement périodique et font ensuite application des résultats généraux aux équations binômes et triômes. L'indication de la méthode générale d'intégration termine premier fascicule.

L'analyse précédente aura sans doute fait ressortir tout l'intérêt :t toute la richesse des matériaux mis en œuvre dans cette première Partie de l'Ouvrage, qui ne comprend pas moins de cinquantedeux feuilles d'impression. Cependant l'éditeur, M. Gauthier-Villars, annonce que la seconde Partie sera à peu près aussi volumineuse que la première. Nous aurons donc enfin un Traité complet et classique, un véritable monument, remplaçant avantageusement l'Ouvrage vieilli de Legendre. G. D.

'LATEAU (J.). — STATIQUE EXPÉRIMENTALE ET THÉORIQUE DES LIQUIDES SOUMIS AUX SEULES FORCES MOLÉCULAIRES. 2 vol. grand in-8°, avec figures dans le texte, 450 et 495 p. — Gand, Clemm; Paris, Gauthier-Villars; 1873. Prix : 15 fr.

On connaît aujourd'hui les procédés par lesquels M. Plateau anıle l'effet de la pesanteur sur un liquide, de manière que celui-ci end alors la figure qu'il affecterait si cette force n'agissait pas sur i. L'auteur a exposé les nombreuses applications de ses procédés ns une suite de Mémoires dont plusieurs journaux scientifiques ıt donné des résumés. Ces Mémoires sont épars dans sept volumes la collection de l'Académie de Belgique, de 1843 à 1868. L'auır a réuni aujourd'hui toutes ses recherches dans un seul Ou-

ns $f(z)$, $\frac{1}{f(z)}$ soit toujours synectique.
l évidemment en chaque point une va-
n parcouru par z; de plus, elle ne perd
nts isolés, où elle devient infinie. Pour
s fonctions le nom de *hémisynectiques*.
ai démontrées concernant ces fonctions,
tes :

n hémisynectique, telle qu'aucune des

$$A_1, \quad f(z) = A_2$$

contour fermé donné; si, en même
passer d'une manière continue de A_1
e valeur pour laquelle l'équation

$$f(z) = A$$

contour, les deux équations

$$= A_1, \quad f(z) = A_2$$

e racines à l'intérieur du contour.

oins deux valeurs que la fonction hémisy-
rendre pour $z = \infty$, par quelque chemin
vers l'infini, $f(z)$ sera une fonction ra-

ent une théorie de la classe des fonctions
ues qui jouissent de la propriété que $f(z)$
déterminée (finie ou infinie) et indépen-
t du mouvement de z, lorsque z va vers
ent à la direction de la période ω, et cela
roite ou à gauche de ω. Si ρ désigne une
, cette propriété peut s'exprimer par les

$$\text{n} f(z + \rho i \omega) = \text{H},$$
$$\text{n} f(z - \rho i \omega) = \text{K},$$

vrage, sous le titre indiqué ci-dessus. Voici les matières principales dont il traite :

1° Réalisation, à l'aide du premier procédé (celui de l'immersion d'une masse d'huile dans un alcool dilué de même densité), des figures d'équilibre, et spécialement de celles de révolution; étude détaillée de ces figures, par la théorie et par l'expérience.

2° Réalisation des mêmes figures par le deuxième procédé (celui des lames liquides minces).

3° Recherche d'une limite supérieure très-petite du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire.

4° Tension des surfaces liquides et des lames liquides; historique. Théorie de la génération de ces lames. Assemblages laminaires, leur développement, leurs lois.

5° Recherche des causes principales d'où dépendent le facile développement et la persistance des lames liquides; ces causes résident dans un rapport convenable entre la tension et une viscosité propre des deux couches superficielles; historique de la viscosité superficielle; historique des lames liquides.

6° Étude, par l'expérience et par la théorie, des conditions de stabilité des figures d'équilibre. L'examen de ces conditions à l'égard du cylindre conduit à une théorie complète de la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires. Le liquide d'une semblable veine se meut, à la vérité, sous l'action de la pesanteur; mais on comprend que, pendant la chute libre d'un liquide, la pesanteur ne met point d'obstacle au jeu des forces moléculaires. Accord constant de cette théorie avec les belles expériences de Savart. Historique de la constitution des veines liquides.

FRENET (F.), professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Lyon. — Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal. Troisième édition. 1 vol. in-8°, xiv-410 p. — Paris, Gauthier-Villars; 1873. Prix : 7 fr. 50.

Nous avons le plaisir d'annoncer la publication de la troisième édition de cet Ouvrage, qui a déjà rendu tant de services à l'enseignement, et dont le mérite a été apprécié de tous ceux qui s'occupent de l'étude de l'Analyse infinitésimale. Les Recueils de cette nature sont extrêmement multipliés en Angleterre, et surtout en Allemagne, tandis que l'Ouvrage de M. Frenet est unique en

'rance; mais, grâce aux soins que le savant et consciencieux auteur apportés à la rédaction de son Ouvrage, et aux améliorations qu'il introduites dans les éditions successives, le Recueil français peut lui seul remplacer presque tous les autres; et aucun de ceux que ous avons sous les yeux ne l'égale pour la variété et le choix judiieux des exemples, et surtout pour les compléments théoriques qui y trouvent intercalés.

M. Frenet s'est préoccupé avant tout de graduer la difficulté des xercices, particulièrement dans les questions de pur calcul. Ayant econnu, dans sa longue expérience de l'enseignement, combien est important pour les commençants de se familiariser aussitôt ue possible avec le maniement du calcul, il n'a pas craint de onner un développement considérable aux Chapitres consacrés à a différentiation et à l'intégration des fonctions explicites, et il a ccordé, avec raison, à l'intégration des équations différentielles ne place beaucoup plus étendue qu'on ne l'a fait dans la plupart des autres Recueils.

La division de l'Ouvrage est celle qui est adoptée dans le plus grand nombre des Cours de Calcul infinitésimal. Le volume comprend trois Parties, consacrées la première au Calcul différentiel, la deuxième au Calcul intégral, et la troisième à des questions diverses. Chaque Partie contient un recueil d'énoncés, à la fin duquel se trouve le recueil des réponses correspondantes, distribuées de la même manière en Chapitres. Peut-être eût-il été préférable, pour la facilité des recherches, que les trois recueils de questions eussent été placés à la suite les uns des autres, sans être mêlés avec les soutions.

L'auteur a voulu donner à ses lecteurs une idée de diverses héories utiles qu'un Cours classique ne renferme pas nécessairement; aussi a-t-il introduit dans son Livre des notions sur les séries oubles et les produits infinis, deux modes de développement si nportants et sujets à tant de difficultés; sur les opérations symboques; sur la notation, trop peu connue, des fonctions hyperboques; sur les nombres de Bernoulli, sur les points associés, etc. a traité un petit nombre de questions de Physique, parmi lesuelles figurent la formule de Lambert, généralisant celle de Petit, le théorème de Dupin généralisant celui de Malus.

M. Frenet a pris soin, dans les applications à la Géométrie, de

[illegible] des courbes célèbres qui [illegible] cycloïde, cissoïde, [illegible] logarithmique, tractrice, [illegible] etc., en y rattach[illegible] avait lieu. La réuni[illegible] facilitée par [illegible] étude assez compl[illegible] même très-simpl[illegible] de le faire, perm[illegible] et on lui don[illegible]

[illegible] dimensions méri[illegible] recherches propres [illegible] si simples et si [illegible] lignes.

[illegible] éviter la rédac[illegible] élaboré, [illegible] originales et a pui[illegible] grands maîtres. I[illegible] dans le[illegible] collection due [illegible]

[illegible] publiée en 1860, se distin[illegible] assez considérable[illegible] Celle-ci n'apporte [illegible] parmi lesquelles no[illegible]

J. H.

[illegible] — [illegible] afhandling [illegible]

Dans le premier paragraphe de ce Mémoire, j'ai étudié quelq[illegible] [illegible] des fonctions [illegible] telles que, en chaque point du pl[illegible]

[illegible] Examples of the Processes of the Differential and Integral Calculus. 2d edit[illegible] Cambridge, [illegible]

[illegible] — Sur les Fonctions périodiques. Thèse doctorale. In-8°, 5[illegible] [illegible] indiqué par l'auteur.

u l'autre des fonctions $f(z)$, $\frac{1}{f(z)}$ soit toujours synectique. reille fonction prend évidemment en chaque point une va- lépendante du chemin parcouru par z; de plus, elle ne perd cticité qu'en des points isolés, où elle devient infinie. Pour , j'ai donné à de telles fonctions le nom de *hémisynectiques*. es propositions que j'ai démontrées concernant ces fonctions, ii ici les deux suivantes :

$f(z)$ est une fonction hémisynectique, telle qu'aucune des uations

$$f(z) = A_1, \quad f(z) = A_2$$

racine située sur un contour fermé donné; si, en même une variable A peut passer d'une manière continue de A_1 sans rencontrer aucune valeur pour laquelle l'équation

$$f(z) = A$$

racine située sur le contour, les deux équations

$$f(z) = A_1, \quad f(z) = A_2$$

le même nombre de racines à l'intérieur du contour.

'il se trouve au moins deux valeurs que la fonction hémisy- e $f(z)$ ne puisse prendre pour $z = \infty$, par quelque chemin n fasse tendre z vers l'infini, $f(z)$ sera une fonction ra- e de z.

ragraphe II contient une théorie de la classe des fonctions ques hémisynectiques qui jouissent de la propriété que $f(z)$ e vers une valeur déterminée (finie ou infinie) et indépen- u point de départ du mouvement de z, lorsque z va vers perpendiculairement à la direction de la période ω, et cela z se meuve à droite ou à gauche de ω. Si ρ désigne une réelle et positive, cette propriété peut s'exprimer par les uations

$$\lim f(z + \rho i \omega) = \mathrm{H},$$
$$\lim f(z - \rho i \omega) = \mathrm{K},$$

pour $z = \infty$. H et K étant deux quantités déterminées et indépendantes de z. Déduire purement et simplement de la notion de périodicité les propriétés de ces fonctions, tel est le but que je me suis proposé. On obtient d'abord, par une modification d'un théorème énoncé plus haut, la proposition suivante :

« Dans chaque intervalle périodique, l'équation $f(z) = A$ a un nombre de racines fini et indépendant de A, tant que A n'est pas égal à H ou à K. »

En se fondant sur ces considérations, les fonctions dont il s'agit ici se partagent, d'après le nombre des racines contenues dans chaque intervalle, en fonctions du premier, du deuxième, du troisième.... ordre. Comme supplément à ce théorème, j'ai démontré que, pour les fonctions périodiques du premier ordre, l'équation $f(z) = H$ n'est satisfaite par aucune valeur autre que

$$z = \lim (z + \rho i \omega),$$

et l'équation $f(z) = K$ par aucune valeur autre que

$$z = \lim (z - \rho i \omega).$$

Si, $u = f(z)$ étant une fonction périodique du premier ordre, et $v = F(z)$ une fonction périodique du $n^{\text{ième}}$ ordre, on ne trouve, pour chaque valeur de u, qu'une seule valeur correspondante de v, on démontre encore facilement que, en chaque point, soit v, soit $\frac{1}{v}$, est une fonction synectique de u, de sorte que v est une fonction hémisynectique de u; de plus, cette fonction, qui converge évidemment vers une valeur finie et déterminée, lorsque u tend vers l'infini en suivant n'importe quel chemin, doit, en vertu du théorème du paragraphe I, être rationnelle. Ainsi se trouve démontrée la proposition suivante :

« Si u et v sont deux fonctions périodiques du premier et du $n^{\text{ième}}$ ordre respectivement, et ayant la même période, v est une fonction rationnelle du $n^{\text{ième}}$ degré de u. »

Parmi les théorèmes que j'ai déduits de cette proposition, je citerai les deux suivants :

1° *Toute fonction périodique* $u = f(z)$ *du premier ordre sa-*

sfait à une équation différentielle de la forme

$$\frac{du}{dz} = A + Bu + Cu^2,$$

ι, B, C *étant des constantes.*

2° *Toute fonction périodique $v = f(z)$ du $n^{ième}$ ordre, synec-ique dans toute l'étendue du plan, satisfait à une équation diffé-entielle linéaire du $n^{ième}$ ordre à coefficients constants et à second nembre constant.*

Jusqu'ici nous n'avons rien dit sur la question de l'existence éelle ou de la non-existence des fonctions périodiques. S'il existe le telles fonctions du premier ordre, il faut les chercher parmi les ntégrales de l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = A + Bu + Cu^2,$$

: la discussion de cette équation fait voir que, tant que l'on n'a pas

$$4AC - B^2 = 0,$$

le est satisfaite par une fonction du premier ordre, ayant pour pé-ode $\frac{2\pi}{\sqrt{4AC - B^2}}$.

Dans le paragraphe III, j'ai appliqué la théorie précédente aux nctions circulaires. Après avoir posé les définitions suivantes :

1. Par $\tang z$, on entend la fonction périodique impaire du pre-ier ordre de z, qui a pour période π, et qui prend pour $z = 0$ la aleur zéro, et pour $z = \frac{\pi}{4}$ la valeur 1;

2. Par $\cot z$, on entend la fonction périodique impaire du pre-ier ordre de z, qui a pour période π, et qui prend pour $z = 0$ la aleur ∞, et pour $z = \frac{\pi}{4}$ la valeur 1;

3. Par $\sin z$, on entend la fonction périodique impaire du second rdre, synectique dans toute l'étendue du plan, qui a pour pé-ode 2π, et qui prend pour $z = \frac{\pi}{2}$ la valeur 1;

4. Par $\cos z$, on entend la fonction périodique paire du second ordre, synectique dans toute l'étendue du plan, qui a pour période 2π, et qui prend pour $z = 0$ la valeur 1, et pour $z = \pi$ la valeur -1;

J'ai déduit de ces seules définitions les propriétés les plus importantes des fonctions circulaires et leurs relations mutuelles.

A. Berger.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

T. LXXVII, 2e semestre 1873.

N° 3. Séance du 21 juillet 1873.

Villarceau (Yvon). — *Note concernant le changement de vitesse de régime dans les régulateurs isochrones.*

Dans le Mémoire présenté le 10 juin 1842, M. Villarceau a montré comment on pouvait changer la vitesse, lorsque le changement proposé doit être permanent; dans la Note actuelle, il s'occupe du cas où le changement proposé doit être temporaire, comme cela est exigé dans les applications du régulateur isochrone au mouvement des équatoriaux.

Ledieu (A.). — *Démonstration directe des principes fondamentaux de la Thermodynamique. Lois du frottement et du choc d'après cette science* (suite).

Didion (le Général). — *Mouvement d'un segment sphérique sur un plan incliné.*

Sur un plan horizontal on place un segment sphérique, et l'on incline le plan peu à peu; on demande, en tenant compte du frottement, quel mouvement prendra le corps.

Tel est le problème dont la solution fait l'objet du Mémoire cité.

Caligny (de). — *Expériences sur le mouvement de la houle*

duite dans un canal factice, et faisant monter l'eau le long une plage inclinée à une hauteur sensiblement constante.

TACCHINI. — *Nouvelles observations spectrales, en désaccord ec quelques-unes des théories émises sur les taches solaires.*

CATALAN (E.). — *Sur la constante d'Euler et la fonction de net.*

Si l'on pose

$$C_\mu = \lim \left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu+1} + \ldots + \frac{1}{\mu+n-1} - l(\mu+n-1) \right],$$

Catalan montre que

$$C_\mu = -\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu};$$

ur $\mu = 1$, on a la *constante d'Euler.*

N° 4. Séance du 28 juillet 1873.

HERMITE. — *Sur la fonction exponentielle* (suite).

SAINT-VENANT (DE). — *Examen d'un essai de théorie de la ussée des terres contre les murs destinés à les soutenir.*

Après avoir énuméré les Notes et Mémoires présentés par . Curie, savoir : Note présentée le 30 juin 1873 : *Sur le désacrd entre l'ancienne théorie de la poussée des terres et l'expéence;* Note du 14 juillet 1873 : *Nouvelles expériences sur cette éorie,* etc..., M. de Saint-Venant ajoute :

« Il m'a semblé utile, pour prévenir l'introduction fâcheuse, ans cette partie de la Mécanique, d'idées fausses présentées avec ersistance et appuyées sur une prétendue conformité aux faits, de onner ici les motifs qui ont déterminé une Commission de 1868, ont je suis le seul membre subsistant, à refuser son approbation u Mémoire cité de M. Curie, et à n'en point faire l'objet d'un pport à l'Académie. »

DUPUY DE LÔME. — *Des positions proposées pour établir un rvice régulier de navires porte-trains entre Calais et Douvres.*

SECCHI (le P.). — *Nouvelles recherches sur le diamètre solaire.*

Ledieu (A.) — *Démonstration directe des principes fondamentaux de la Thermodynamique. Lois du frottement et du choc d'après cette science* (suite).

Zeuthen (H.-G.). — *Sur les différentes formes des courbes du quatrième ordre.*

Une branche est dite *ouverte* ou *fermée* suivant qu'elle rencontre une droite en un nombre impair ou pair de points; l'auteur nomme *ovale* une branche fermée sans aucun arc rentrant, et *n-folium* une branche fermée douée de n arcs rentrants. Ceci admis, voici la classification établie par M. Zeuthen : 1° 1 quadrifolium et 2 ovales externes; 2° 1 quadrifolium et 1 ovale interne; 3° 1 trifolium, 1 unifolium et 2 ovales; 4° 2 bifolia et 2 ovales; 5° 1 bifolium, 2 unifolia et 1 ovale; 6° 4 unifolia.

L'auteur n'a nommé que les formes présentant le nombre maximum d'arcs rentrants et de branches séparées; les autres résulteront de l'évanouissement d'arcs rentrants ou d'ovales.

Flammarion (C.). — *Sur la planète Mars.*

N° 5. Séance du 4 août 1873.

Hermite. — *Sur la fonction exponentielle* (suite et fin).

M. Hermite commence par chercher les expressions approchées de n fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, par des fractions rationnelles $\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}, \frac{\Phi_2(x)}{\Phi(x)}, \ldots, \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}$, de manière que les développements en séries suivant les puissances croissantes de la variable coïncident jusqu'à une puissance déterminée x^μ. Il applique ensuite cette recherche aux quantités $\varphi_1(x) = e^{ax}, \varphi_2(x) = e^{bx}, \ldots, \varphi_n(x) = e^{hx}$: tel est le point de départ de l'étude intéressante qui fait l'objet des diverses Communications présentées par M. Hermite dans les séances des 7, 21, 28 juillet et 4 août. L'auteur établit l'impossibilité d'une relation de la forme

$$N + e^a N_1 + e^b N_2 + \ldots + e^h N_n = 0,$$

$a, b, \ldots, h$ étant des nombres entiers, ainsi que les coefficients N, $N_1, \ldots, N_n$, c'est-à-dire que *le nombre e ne peut pas être racine d'une équation algébrique de degré quelconque à coefficients entiers.*

I. Hermite donne deux démonstrations de cette importante position; il rappelle, à ce sujet, que c'est M. Liouville qui a ıontré le premier que le nombre *e* n'était racine ni d'une équa- ι du second degré, ni d'une équation bicarrée (*Journal de thématiques*, t. V, p. 192-193).

ℯ Mémoire se termine par une application numérique du mode ›proximation qui est le point de départ de ce beau travail; voici lques-uns des résultats : on a

$$e = \frac{337}{124}, \quad e^2 = \frac{916}{124};$$

reur ne porte que sur les dix-millièmes; puis

$$e = \frac{58291}{21444}, \quad e^2 = \frac{158452}{21444},$$

reur portant sur les dix-millionièmes.

'AYE. — *Sur la théorie physique du Soleil, proposée par* VICAIRE.

ˌEDIEU (A.). — *Démonstration directe des principes fonda- ıtaux de la Thermodynamique. Lois du frottement et du c d'après cette science* (suite).

ı° 6. Séance du 11 août 1873.

'AYE. — *Réponse à de nouvelles objections de M.* TACCHINI.

ˌEDIEU (A.). — *Démonstration directe des principes fonda- ıtaux de la Thermodynamique. Lois du frottement et du choc ıprès cette science* (suite).

ʒAUSSIN (L.). — *De la propagation de la marée sur divers nts des côtes de France. Changement dans l'heure de la pleine r du Havre, depuis les travaux d'endiguement de la Seine.*

ʀEVELLAT (J.-P.). — *Solution analytique du tracé des courbes ılusieurs centres, décrites d'après le procédé géométrique de rronet.*

N° 7. Séance du 18 août 1873.

LEDIEU (A.). — *Démonstration directe des principes fondamentaux de la Thermodynamique. Lois du frottement et du choc d'après cette science* (suite).

PIQUET. — *Note sur les courbes gauches algébriques.*

L'auteur se propose de déterminer l'ordre de la surface engendrée par les sécantes triples d'une courbe gauche d'ordre m, puis le nombre des sécantes quadruples. Il trouve, pour l'ordre de la surface engendrée par les sécantes triples,

$$(m-2)\left[h_m - \frac{1}{6}m(m-1)\right],$$

et pour le nombre des sécantes quadruples

$$\frac{1}{2}h_m(h_m - 4m - 11) - \frac{1}{24}m(m-2)(m-3)(m-13);$$

m est l'ordre de la courbe gauche, et h_m le nombre des sécantes doubles (c'est-à-dire rencontrant deux fois la courbe) qu'on peut mener par un point arbitrairement choisi.

N° 8. Séance du 25 août 1873.

FAYE. — *Théorie des scories solaires selon M.* ZÖLLNER.

RESAL. — *Note sur le planimètre polaire.*

En présentant le planimètre polaire du professeur Amsler de Schaffouse, M. Resal montre comment la théorie des rotations conduit simplement à l'équation de ce planimètre.

LEDIEU (A.). — *Démonstration directe des principes fondamentaux de la Thermodynamique. Lois du frottement et du choc d'après cette science* (suite et fin).

Le commencement de ce Mémoire, dont l'extrait comprend environ trente-quatre pages des *Comptes rendus*, a été présenté dans la séance du 14 juillet 1873. Voici les titres des divers Chapitres développés par l'auteur :

1. Considérations générales. — 2. Exposé de la marche suivie pour arriver aux démonstrations. — 3. Établissement de diverses

ıules principales. — 4. Explications relatives aux mouvements ıx vitesses, tant d'ensemble que propres, dans un système de ıts matériels. — 5. Relations entre les forces vives réelles, ısemble et propres des points du système. — 6. Relation géné- entre les travaux extérieurs, les énergies potentielles et les es vives d'ensemble et propres des points d'un système. — 7. De ergie calorifique des corps et de leur équilibre calorifique. — Démonstration du principe de l'équivalence mécanique de la leur. — 9. Quantités qui caractérisent : 1° la température ab- ıe d'un corps; 2° son état physique et constitutif. — 10. Expres- ı générale de la température d'un corps. Capacité calorifique ɔlue. Expression de la température en fonction de la force vive yenne de vibration. — 11. Relation entre la quantité de chaleur liquée à un corps, le changement de température et la variation lurée des vibrations. — 12. Démonstration directe du principe ɔlifié de Carnot.

'extrait présenté dans cette séance contient la fin de l'exposé de *Démonstration directe des principes fondamentaux de la ɜrmodynamique;* il serait difficile d'en faire ici une analyse dé- lée; mais les titres des divers paragraphes donnent une idée de important Mémoire et de la marche suivie par l'auteur.

ORRELLY et HENRY (Paul). — *Découverte de deux nouvelles ıètes.*

° 9. Séance du 1er septembre 1873.

'AYE. — *Sur les aurores boréales, à l'occasion d'un récent moire de M.* DONATI.

TEPHAN (E.). — *Observation de la planète* (133) *et de la comète M. Borrelly.*

RAYET et ANDRÉ. — *Sur les changements de forme et le spectre la comète* 1873, IV.

° 10. Séance du 8 septembre 1873.

DE LA GOURNERIE. — *Note sur le nombre des points d'inter- tion que représente un point multiple commun à deux courbes nes, lorsque diverses branches de la première sont tangentes à branches de la seconde.*

Le procédé employé par M. de la Gournerie consiste à remplacer l'équation de chaque courbe par les équations caractéristiques des différentes branches qui se croisent au point multiple commun, suivant une méthode qu'il a fait connaître en 1869, dans un Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIV, p. 425, t. XV, p. 1, 2ᵉ série.

Plummer (W.). — *Éphéméride de la comète à courte période de Brorsen, calculée d'après les éléments de M.* Hind.

Stephan (E.). — *Sur la comète de Brorsen et la comète de Faye, retrouvées à l'Observatoire de Marseille.*

Tacchini. — *Nouvelles observations relatives à la présence du magnésium sur le bord du Soleil, et réponse à quelques points de la théorie émise par M. Faye.*

N° 11. Séance du 15 septembre 1873.

Faye. — *Réponse à la dernière Note de M.* Tacchini.

Rayet et André. — *Sur les changements de forme de la comète* 1873, IV.

Mercadier (E.). — *Sur le mouvement d'un fil élastique dont une extrémité est animée d'un mouvement vibratoire.*

N° 12. Séance du 22 septembre 1873.

Boussinesq (J.). — *Intégration de l'équation aux dérivées partielles des cylindres isostatiques qui se produisent à l'intérieur d'un massif ébouleux soumis à de fortes pressions.*

A la fin de sa Note, l'auteur fait remarquer que l'équation

$$\begin{aligned}(k^2x^2-y^2)r+2(k^2+1)xys+(k^2y^2-x^2)t \\ +(ax+by)p+(ay-bx)q+cz=0,\end{aligned}$$

où z est une fonction inconnue des deux variables indépendantes x, y; p, q, r, s, t ses dérivées partielles du premier et du second ordre; a, b, c, k des constantes, peut se transformer en

$$\frac{d^2z}{du\,dv}+\frac{(a+kb)-(k^2+1)}{4k^2}\frac{dz}{du}+\frac{(a-kb)-(k^2+1)}{4k^2}\frac{dz}{dv}+\frac{c}{4k^2}z=0,$$

ι prenant

$$u = \mathrm{l}\sqrt{x^2+y^2} - k \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}, \quad v = \mathrm{l}\sqrt{x^2+y^2} + k \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}.$$

MERCADIER (E.). — *Sur le mouvement d'un fil élastique dont ιe extrémité est animée d'un mouvement vibratoire.* (2[e] Note.)

N° 13. Séance du 29 septembre 1873.

MORIN (le Général). — *Observations relatives aux sujets traités ιns le* N° 21 *du* Mémorial de l'Officier du Génie.

M. le Général Morin termine en ces termes le résumé qu'il a fait : ce numéro du *Mémorial :* « On voit que ce volume constitue ι Recueil aussi riche en recherches scientifiques qu'en résultats 'atiques relatifs à l'art de l'ingénieur militaire ; mais nous croyons rtout devoir faire remarquer l'heureux usage que les savants ficiers, auteurs de ces travaux, savent faire de la Géométrie pour présenter les données de l'expérience et de la théorie, en en faciant l'application. »

RESPIGHI (L.). — *Sur la grandeur des variations du diamètre laire.*

N° 14. Séance du 6 octobre 1873.

CHASLES. — *Rapport sur un Mémoire de M.* Mannheim « *Sur s surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invaıble dont le déplacement est assujetti à quatre conditions.* »

« Dans un précédent travail, intitulé *Étude sur le déplacement une figure de forme invariable,* inséré dans le *Recueil des Méoires des Savants étrangers,* M. Mannheim a traité diverses ıestions concernant la construction des normales aux trajectoires 's points d'une figure qui éprouve dans l'espace un déplacement mplétement déterminé, c'est-à-dire dans lequel chaque point de la ;ure ne peut prendre qu'une direction. Ce Mémoire contient, en ıtre, des recherches relatives à une figure dont le déplacement est pas complétement défini, sujet qui n'avait pas encore été ›ordé et qui devait prendre, comme on va le voir, un grand dé- :loppement.

» Six conditions assurent l'immobilité d'un corps, disons d'une

6.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

s'appuient toutes sur une quelconque des droites conjuguées G′, conséquemment sur deux droites conjuguées, *et forment donc un hyperboloïde ;* d'où s'ensuit que *toutes les conjuguées d'une droite* G, *relatives à tous les déplacements que comportent les quatre conditions du déplacement de la figure, forment un hyperboloïde dont la droite* G *est elle-même une génératrice du même système que ses conjuguées,* les génératrices de l'autre système étant les normales aux *surfaces trajectoires* des points de la droite G.

» Que l'on considère, maintenant, un point quelconque m de la figure en mouvement, la normale à la *surface trajectoire* de ce point m rencontre en deux points l'hyperboloïde dont il vient d'être question, et, conséquemment, s'appuie sur deux des conjuguées de la droite G. Or, autre fait très-important, M. Mannheim démontre que *ces deux conjuguées sont toujours les mêmes pour tous les points de la figure en mouvement.*

» Ces deux droites, que l'auteur désigne par les lettres D et Δ, jouissent nécessairement, dans les déplacements de la figure, d'une propriété particulière et caractéristique; cette propriété est que *chaque point de chacune des deux droites ne peut décrire, dans tous les déplacements possibles de la figure, qu'un seul élément linéaire* (au lieu d'un élément de surface) : *le plan normal à cet élément passe par l'autre droite.*

» Ces propriétés remarquables forment le premier paragraphe du Mémoire.

» Dans le paragraphe suivant, M. Mannheim démontre diverses propriétés des *surfaces trajectoires* des points d'une droite, dérivant principalement de la considération de l'hyperboloïde lieu des normales à ces *surfaces trajectoires*. Nous citerons les suivantes :

» *Parmi les surfaces trajectoires des points d'une droite, il y en a deux qui sont tangentes à la droite.*

» *La développable, enveloppe des plans tangents aux surfaces trajectoires des points d'une droite, est du quatrième ordre et de la troisième classe.*

» *Les plans normaux aux surfaces trajectoires des points d'une droite, menés par les éléments rectilignes d'un déplacement quelconque, déterminent, dans ces surfaces trajectoires, des sections dont les centres de courbure sont sur une cubique gauche.*

» Puis M. Mannheim cherche combien il y a de points, sur une

droite, qui décrivent des trajectoires satisfaisant à diverses conditions, relatives aux *surfaces trajectoires* de ces points.

» Ainsi il détermine :

» 1° Combien il y a de points, sur une droite, dont les trajectoires soient tangentes aux lignes asymptotiques des surfaces trajectoires de ces points;

» 2° Combien dont les trajectoires soient osculatrices aux lignes géodésiques des surfaces trajectoires, et dont les plans osculateurs, dès lors, soient normaux aux surfaces trajectoires;

» 3° Combien dont les trajectoires ont leur rayon de courbure nul;

» 4° Combien dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure principal nul;

» 5° Combien dont les trajectoires sont tangentes aux lignes de courbure des surfaces trajectoires;

» 6° Combien dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure principal infini;

» 7° Combien dont les surfaces trajectoires ont leurs rayons de courbure principaux égaux;

» 8° Enfin combien dont les surfaces trajectoires ont leurs rayons de courbure principaux égaux et de signes contraires.

» Considérant les trajectoires, non plus simplement des points d'une droite, mais de tous les points de la figure en mouvement, M. Mannheim parvient à divers théorèmes qui étendent ce vaste sujet de recherches.

» Il nous faut citer ses résultats principaux pour donner une idée de la nouveauté et de l'importance qu'ils comportent.

» *Le lieu des points dont les trajectoires, dans un quelconque des déplacements que permettent quatre conditions données, sont tangentes à des lignes asymptotiques des surfaces trajectoires de ces points, est une surface du troisième ordre qui contient les deux droites* D *et* Δ *et le cercle imaginaire de l'infini.*

» *Le lieu des points dont les trajectoires ont leurs plans osculateurs normaux aux surfaces trajectoires de ces points est une surface du sixième ordre, qui passe par le cercle imaginaire de l'infini.*

» *Le lieu des points dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure principal nul est la surface réglée du quatrième*

're dont les génératrices s'appuient sur les deux droites D, *t sur le cercle imaginaire de l'infini.*

Le lieu des points dont les trajectoires ont leur rayon de rbure nul est une surface imaginaire du second ordre.

M. Mannheim appelle *point parabolique* sur une surface un ıt où la surface a l'un de ses rayons de courbure principaux in-. Il trouve que *les points d'une figure en mouvement, qui sont points paraboliques de leurs surfaces trajectoires, forment surface du sixième ordre qui passe par le cercle de l'infini.*

Enfin *le lieu des points dont les surfaces trajectoires ont rs rayons de courbure principaux égaux est une surface du tième ordre;*

Et *le lieu des points dont les surfaces trajectoires ont leurs 'ons de courbure principaux égaux et de signes contraires est surface du cinquième ordre.*

En terminant, l'éminent géomètre fait observer qu'en ce qui cerne les trajectoires des points d'une droite faisant partie d'une ıre en mouvement il a toujours été question d'une droite quelque; mais qu'il y a certaines droites jouissant de propriétés parlières. Il annonce qu'il reviendra sur ce sujet, qui lui donnera de considérer aussi ce qui se rapporte à des plans de la figure mouvement, et particulièrement aux surfaces trajectoires des ıts de ces plans, *lesquelles ont leurs centres de courbure prin-ux sur une surface du sixième ordre,* qui présente quelque ogie avec le lieu des points dont les *surfaces trajectoires* ont entre de courbure principal sur un plan.

Les géomètres comprendront, sans que nous ayons besoin d'in-r, toute l'importance d'un travail qui réunit dans une même rie, absolument nouvelle, en les déduisant d'un mode uniforme émonstration, des résultats aussi précis et aussi considérables. s ne saurions le recommander trop vivement aux encourage-ts de l'Académie, et la Commission déclare, à l'unanimité, que Iémoire lui paraît très-digne d'être inséré dans le *Recueil des ınts étrangers.* »

ESPIGHI (L.). — *Sur la grandeur et les variations du dia-re solaire* (2e Note).

URIE (J.). — *Sur la théorie de la poussée des terres.*

DNIČKA (F.-J.). — *Nouvelle démonstration du théorème sur ation entre les déterminants et les déterminants mineurs du e primitif et du système adjoint.* (4 p.)

'on désigne par A_{pq} le déterminant mineur, correspondant à ent a_{pq} du déterminant

$$\Delta = \sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn},$$

omme on sait,

$$\Delta^{n-k}(a_{11} a_{22} \ldots a_{k-1,k-1}) = (A_{kk} \ldots A_{nn}),$$

est établi, dans la présente Note, d'une manière inductive nple, qui peut remplacer, pour les commençants, la démons- de Borchardt, reproduite par Baltzer, dans sa *Théorie des inants.*

ičí (J.). — *Éléments de cristallographie mathématique.* , 35 p.)

R (Em.). — *Sur les triangles d'arcs de cercle.* (6 p.)

teur, partant de la méthode des projections stéréographiques, les figures planes formées par trois arcs de cercle, et qu'il ap- *riangles circulaires* (*Kreisdreiecke*). Il démontre d'abord on peut considérer trois cercles quelconques dans le plan les projections stéréographiques de trois grands cercles sphère, c'est-à-dire que tout triangle circulaire peut être comme la projection d'un triangle sphérique. Si A_1, A_2, A_3 s trois sommets d'un triangle circulaire, les arcs de cercle pas- ux à deux par un même sommet se coupent, quand on les pro- uffisamment, en trois autres points, d'où résultent trois nou- sommets A'_1, A'_2, A'_3, que l'on peut appeler les *conjugués* miers. Les cercles passant par deux points conjugués sont *rcles transversaux.* Il en existe ainsi trois systèmes dans le e circulaire. A chaque triangle circulaire correspond un *principal,* dont le centre O est le centre radical des trois qui forment le triangle, et dont le diamètre est égal à la ur de la plus petite corde des trois cercles qui puisse être par O'.

haque proposition de la théorie du triangle sphérique cor-

$_1$, φ_2, φ_3 sont les angles des trois couples de génératrices prin-
s (situées dans les trois plans principaux) d'un cône du second
on a l'équation

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_2\cos\varphi_3 + \cos\varphi_3\cos\varphi_1 + 1 = 0.$$

des trois angles est toujours imaginaire.

DNIČKA (F.-J.). — *Sur les fractions convergentes intermé-
s, et sur leur application.*

ès avoir exposé les propriétés fondamentales de ces fractions,
uteur nomme *fractions adjointes,* on montre leur utilité dans
lution des équations indéterminées du premier degré.

DNIČKA (F.-J.). — *Sur la formule d'Euler pour transfor-
es series convergentes en d'autres qui convergent plus ra-
ent.*

proposé de transformer la série

$$s = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots, \quad \text{ou} \quad u_1 > u_2 > u_3 > \ldots,$$

oduisons la notation

$$\Delta^{m+1} u_k = \Delta^m u_k - \Delta^m u_{k+1};$$

uve ainsi

$$2s = u_1 + \Delta u_1 - \Delta u_2 + \ldots = u_1 + \Delta(u_1 - u_2 + u_3 - \ldots),$$

$$2s = u_1 + \Delta s.$$

lculant au moyen du symbole d'opération Δ, on en tire

$$s = \frac{u_1}{2 - \Delta},$$

l'on effectue la division indiquée et que l'on rende au sym-
Δ sa signification propre, on obtient la formule connue
er

$$s = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\Delta^k u_1}{2^{k+1}}.$$

DNIČKA (F.-J.). — *Sur la quadrature du cercle.* (4 p.)

Le but de cet article est de servir de réponse à tous ceux qui veulent avoir trouvé, « avec l'aide de Dieu », la quadrature du cercle. Il contient en abrégé les raisons de l'impossibilité de la solution cherchée, et le tableau des résultats obtenus depuis Archimède (250 avant J.-C.) jusqu'à Richter (1855), dans l'évaluation de π; il se termine par la valeur de cette constante, trouvée par Shanks, avec 530 décimales.

Hoza (F.). — *Contribution à l'histoire des trochoïdes.* (6 p.)

Hervert (J.). — *La dioptrique au point de vue de la Géométrie supérieure.* (3 art. 33 p.)

Neumann (M.). — *Sur la tension superficielle des liquides.* (16 p.)

Blažek (G.). — *Contribution à la théorie des lentilles.* (2 p.)

Weyr (Em.). — *Deux théorèmes sur les sections coniques.* (3 p.)

En se fondant sur la rationalité des sections coniques, on établit, moyennant l'introduction d'un paramètre rationnel, ces deux théorèmes connus :

1° *L'hypoténuse d'un triangle rectangle inscrit, tournant autour du sommet de l'angle droit, passe par un point fixe de la normale en ce sommet.*

2° *La ligne qui joint les deux points d'intersection de la conique avec deux droites, menées par un de ses points et également inclinées sur la normale en ce point, passe par un point fixe de la tangente en ce point.*

Ovidio (E. d'). — *Les points, les plans et les droites en coordonnées homogènes.* (2 art., 36 p.; en fr.)

L'auteur reprend les études qu'il a publiées dans divers articles du *Giornale di Matematiche* [1], et où il avait entrepris de traiter plus méthodiquement et plus complètement qu'on ne le fait en général les formules principales qui servent de base à l'application des coordonnées trilinéaires et quadriplanaires des points, des coordonnées triponctuelles et quadriponctuelles des plans, et des coordonnées plückériennes des droites dans l'espace. Il a remarqué,

---

[1] T. VI, VII, VIII, IX, X, 1868-1872. Voir *Bulletin*, t. I, p. 152, 333; t. III, p. 172; t. IV, p. 196.

depuis, que l'on pouvait généraliser presque tous ses résultats, sans en altérer la simplicité, en considérant des points, des droites et des plans qui ne sont pas tous rapportés au même triangle ou au même tétraèdre. Cette extension fait l'objet du présent Mémoire, qui contient en outre de nouveaux théorèmes et de nouvelles démonstrations de théorèmes connus.

Zahradník (K.). — *Lieu géométrique des intersections des tangentes à une conique avec les polaires des points de contact par rapport à une autre conique.*

Weyr (Em.). — *Détermination des éléments à l'infini dans les figures géometriques.* (26 p.)

Prenant pour point de départ les coordonnées homogènes de Hesse, l'auteur développe l'équation des droites de l'infini et des droites parallèles; il détermine les points et les asymptotes infiniment distants des courbes planes algébriques, en particulier des sections coniques spéciales et générales, l'équation des points-cercles imaginaires ($x^2 + y^2 = 0$); puis il passe aux coniques semblables et semblablement placées. Si l'on écrit l'équation d'une courbe plane algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré sous la forme

$$u_n + u_{n-1} + \ldots + u_1 + u_0 = 0,$$

u_k désignant généralement l'ensemble des termes de degré k, on obtient les points à l'infini $\left(\text{avec les valeurs de } \frac{y}{x} \text{ pour ces points}\right)$ au moyen de l'équation $u_n = 0$, qui donne pour le rapport $\frac{y}{x}$ les n valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. En s'appuyant sur les propriétés connues des fonctions homogènes, l'auteur fait voir maintenant que l'équation des asymptotes est

$$\frac{\xi \dfrac{\partial u_n}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial u_n}{\partial y} + u_{n-1}}{x^{n-1}} = 0,$$

où, après avoir effectué la division par x^{n-1}, on remplacera $\frac{y}{x}$ successivement par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Après quelques remarques préliminaires générales sur le cas où il manque des termes u dans l'équation de la courbe, l'auteur traite, d'après la théorie exposée, la cissoïde,

résulte

$$\alpha = \frac{(a_0 b_1)}{(a_2 b_0)} = \frac{(a_2 b_0)}{(a_1 b_2)},$$

six quantités a, b, il y en a donc cinq d'arbitraires, tandis que, · la sixième, l'équation précédente, quadratique par rapport à ɛs les quantités, fournira deux valeurs. Si l'on pose, dans notre tion différentielle, $y = ue^{\alpha x}$, il vient

$$(a_2 X + b_2 Y) u'' + [(a_1 + a_2 \alpha) X + (b_1 + b_2 \alpha) Y] u' = 0,$$

.tion qui peut s'intégrer immédiatement.

ι dernière équation de condition peut encore être satisfaite en nt

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = m,$$

ɔtre équation différentielle aura dans ce cas le facteur $X + mY$. ɛs la séparation de ce facteur, on obtiendra une équation dif- ɪtielle linéaire à coefficients constants.

équation de condition $\frac{(a_0 b_1)}{(a_2 b_0)} = \frac{(a_2 b_0)}{(a_1 b_2)}$ prend une forme très- ɪnte dans le cas où X et Y sont des fonctions trigonométriques, exemple $X = \cos x$, $Y = \sin x$. Si l'on pose de plus

$$a_k = m_k \cos v_k, \quad b_k = m_k \sin v_k,$$

ɪation différentielle devient

$$m_2 \cos(v_2 + x) y'' + m_1 \cos(v_1 + x) y' + m_0 \cos(v_0 + x) y = 0,$$

.elle admettra l'intégrale particulière $y = e^{\alpha x}$, si l'on a

$$\frac{\sin^2(v_0 - v_2)}{m_1^2} = \frac{\sin(v_1 - v_0)}{m_2} \frac{\sin(v_2 - v_1)}{m_0}.$$

a en même temps

$$\alpha = \frac{m_1 \sin(v_1 - v_0)}{m_2 \sin(v_0 - v_2)} = \frac{m_0 \sin(v_0 - v_2)}{m_1 \sin(v_2 - v_1)}.$$

On peut prendre pour exemple l'équation

$$(3 - x) y'' - (9 - 4x) y' + (6 - 3x) y = 0,$$

duit des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* XV, p. 670, 16 septembre 1872.

DNIČKA (F.-J.). — *Remarque sur la théorie des trochoïdes.* ıs cette courte Note, l'auteur établit, comme complément à orie des trochoïdes, contenue dans ses *Principes d'Analyse endante* (1), les équations différentielles des trochoïdes, pour où la base est une droite. Il fait voir alors que l'on n'a qu'à ıer r et r' entre les équations

$$r = f(\rho), \quad \eta' = \frac{r'}{r}, \quad \eta^2(1+\eta'^2) = r^2,$$

ıbtenir l'équation $\eta = \varphi(\xi)$ de la trochoïde cherchée.
au contraire, on cherche la base sur laquelle la courbe (ρ) doit rouler pour que la trochoïde soit une droite, on n'a lement qu'à éliminer r et r' entre les équations

$$r = f(\rho), \quad -y' = \frac{r'}{r}, \quad y = r,$$

ıbtenir l'équation $y = F(x)$ de cette courbe.
Chaque numéro du *Journal* est terminé par des énoncés de ons à résoudre, par des solutions de questions posées dans les ros précédents et par des articles de nouvelles scientifiques et ıliographie. E. W.

Y JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ (2).

ıes 1870, 1871 et 1872.

:YR (Ed.). — *Sur la nouvelle Géométrie. Des figures pro-es dans le plan.* (23 p.)
éorèmes sur le rapport anharmonique d'une série de points ın faisceau de droites. Définition des figures projectives, des aux perspectifs, etc. Applications à diverses questions de ıétrie.

---

(1) TCDNIČKY *Základové vyšši mathematiky*, t. III, p. 85.
(2) *Bulletins de la Société des Mathématiciens tchèques.* Rédigés par *M. Neumann* *'ánek.* Il paraît chaque année un fascicule in-8°, en langue bohême.

ème espèce ». L'auteur donne la solution de ces deux problèmes sur le cercle, l'ellipse, l'hyperbole, les courbes de Cassini.

Neumann (M.). — *Le diapason galvanique et son utilité dans l'acoustique*. (2 p.)

Pánek (A.). — *Valeurs approchées du radical* $\sqrt{a^2+b^2}$. (4 p.)

En posant $\sqrt{a^2+b^2} = \alpha a + \beta b$, on peut calculer les coefficients α, β, de manière à obtenir l'approximation voulue. Ce problème est traité par le méthode de Poncelet ([1]).

Studnička (F.). — *Contributions à la théorie de l'intégration des équations différentielles linéaires complètes* ([2]). (71 p.)

On sait que, étant donnée l'intégrale générale

$$y = \sum_{m=1}^{m=n} C_m y_m$$

d'une équation linéaire sans second membre, on peut en déduire l'intégrale générale de l'équation complète

$$\sum_{k=n}^{k=0} X_k y^{(k)} = X,$$

sous la forme

$$y = \sum_{m=1}^{m=n} A_m y_m + \sum_{m=1}^{m=n} y_m \int \xi_m \, dx,$$

composée de l'intégrale générale (1) de l'équation sans second membre et d'un terme complémentaire pouvant être déterminé par la variation des constantes. L'auteur cherche à déterminer ce terme complémentaire d'une manière directe, en établissant les relations qui existent entre la forme et les coefficients de ce terme, et les coefficients du second membre X, sur la composition duquel il fait plusieurs hypothèses particulières.

---

(1) Sur la valeur approchée linéaire et rationnelle des radicaux de la forme $\sqrt{a^2 \pm b^2}$. (*Journal de Crelle*, t. 13.)

(2) Cette Note a paru en allemand dans les *Sitzungsberichte der Königl. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften in Prag*; 1870.

ŠTUDNIČKA (F.). — *Contributions au calcul des symboles d'opé-ions.* (7 p.)

Soit un système de grandeurs représentées par les symboles

$$\begin{array}{llll} \Delta^0 a_0, & \Delta^0 a_1, & \Delta^0 a_2, \ldots, & \Delta^0 a_k, \ldots, \\ \Delta' a_0, & \Delta' a_1, & \Delta' a_2, \ldots, & \Delta' a_k, \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \Delta^m a_0, & \Delta^m a_1, & \Delta^m a_2, \ldots, & \Delta^m a_k, \ldots, \end{array}$$

que l'on ait

$$\Delta^m a_{k+1} = \Delta^m a_k + \Delta^{m-1} a_k.$$

uteur établit des formules pour exprimer : 1° la valeur d'un me quelconque en fonction des éléments *a*) de la ligne verticale, de la ligne horizontale, auxquelles il appartient; 2° la somme de ermes d'une ligne verticale ou horizontale en fonction des élé-nts des lignes horizontales ou verticales correspondantes.

JAROLÍMEK (Č.). — *Lignes d'illumination sur les surfaces géo-triques.* (10 p.)

Étude des courbes d'égale illumination sur les surfaces éclairées · un faisceau de rayons convergents ou parallèles.

NEUMANN (M.). — *Description de quelques appareils scolaires ur les expériences de Physique.* (14 p.)

JIČÍNSKÝ (K.). — *Quadrature du cercle avec l'approximation* 3,1415.

L'auteur indique une construction géométrique qui permet de erminer graphiquement, par la règle et le compas, la longueur la circonférence à $\frac{1}{10000}$ près du diamètre.

— Ce Recueil contient en outre des analyses de divers Mémoires Ouvrages scientifiques, rédigées par M. Seydel, ainsi que des oncés de problèmes de Mathématiques et de Physique, avec leurs utions. A. P.

blit ce théorème remarquable : « Si une involution du $n^{ième}$ de-
;ré possède deux éléments n-uples, les éléments de tous les
;roupes se grouperont en figures projectives. »

WEYR (Em.). — *Sur la Géométrie des courbes du troisième* *'re*. (5 p.)

ITUDNIČKA (Fr.). — *Contributions à la théorie de l'intégration* *équations différentielles linéaires complètes*. (7 p.)

Nous avons donné plus haut (p. 98) l'analyse de ce Mémoire, roduit dans les *Bulletins de la Société Mathématique de* *ague*.

nnée 1871.

WEYR (Em.). — *Sur les podaires des courbes dans l'espace*. › p.)

Les courbes dans l'espace ont deux sortes de podaires, suivant 'on les considère comme enveloppes de leurs tangentes ou de ırs plans osculateurs. L'auteur étudie les propriétés de ces deux asses de courbes.

WEYR (Em.). — *Sur l'action à distance des solénoïdes élec-* *'iques et des plans matériels*. (18 p.)

Addition au Mémoire de l'auteur, intitulé : *Ueber die ma-* *ıetische Fernwirkung elektrischer Ströme und Stromringe* (¹).

STUDNIČKA (Fr.). — *Sur le calcul des opérations*. (5 p.)

Voir plus haut (p. 101) une analyse de cette Note, reproduite ıns les *Bulletins de la Société mathématique*.

DOMALÍP. — *Nouvelles recherches sur le magnétisme*. (4 p.)

KÜPPER (K.). — *Sur les courbes du troisième ordre, considérées* *ımme enveloppes de coniques*. (5 p.)

WEYR (Em.). — *Sur les relations angulaires involutoires de* *ı cardioïde*.

Si l'on joint les points d'intersection de la tangente double et de rois tangentes parallèles entre elles avec le point m, milieu du

(¹) *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XIII, 1868.

ɛɪcí. — *Sur un mode analogue de calcul et de représentation istaux des systèmes cubique et rhomboédrique.* (6 p.)

ᴀᴠɪ́. — *Sur le calcul du réseau trigonométrique du dernier* . (4 p.)

ʏʀ (Em.). — *Sur la courbure des surfaces gauches.* (4 p.)

ʀᴇ̀ɢᴇ (H.). — *Sur les coniques osculatrices d'une courbe du ème ordre.* (15 p.)

iner a énoncé sans démonstration ([1]) ce théorème, que, par oints quelconques d'une courbe du troisième ordre, on peut r à la courbe neuf coniques osculatrices, dont trois sont réelles imaginaires. A cette proposition principale se rattachent es théorèmes relatifs au groupement de ces coniques oscula- et aux relations entre les points réels d'osculation et les points d'inflexion. La proposition principale a été démontrée par August ([2]). Le but du travail de M. Durège est d'examiner son de cette proposition avec cet autre théorème, énoncé aussi einer, que, par un point quelconque d'une conique, on peut r trois cercles osculateurs à cette courbe, et dont les points de t se trouvent sur un même cercle que le point donné, théo- que Steiner dit être, *jusqu'à un certain point* (*gewisser- n*), un cas particulier du précédent.

IDLUNGEN DER KÖNIGL. BÖHMISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN. . — In-4° ([3]).

ŕrie, t. IV; 1870.

ʟᴛᴇɴʜᴏꜰᴇɴ (A. v.). — *Sur l'attraction qu'exerce une spi- nagnétique sur un noyau de fer mobile.* (14 p., 2 pl.)

ɴɢᴇʀ (J.). — *Études sur la théorie des covariants et des iants des formes binaires.* (47 p.)

([1]) *ournal de Crelle*, t. 32, p. 300.
([2]) *bid.*, t. 68, p. 235.
([3]) *oir Bulletin*, t. I, p. 99, et t. III, p. 170.

... procédé, qu'a fait oublier le perfectionnement dé-
... fournit, avec une étonnante rapidité, un nombre
... hiffres. Il présente, avec étendue et clarté, les trois
...pproximation données successivement par Horner, et
...uble point de vue de l'originalité et des avantages

... M.). — *Sur l'intégration graphique, contribution à ...aphie.* (10 p., 1 pl.)

...tte Note, qui forme un Chapitre important de la Sta-...hique, l'auteur donne les moyens d'exécuter graphique-...pérations de la différentiation, de l'intégration, soit d'une ...explicite, soit d'une équation aux différentielles totales ...x ou trois variables.

...NHOFEN (A. v.). — *Sur la détermination du grossisse-...u champ visuel des lunettes.* (15 p., 1 pl.)

...hode indiquée par l'auteur se recommande par la facilité ...ploi; elle n'exige d'autre appareil qu'une lentille et une ...acée sur le papier, appareil qui peut tenir sur une table

...P (K.). — *Recherches électromagnétiques, particuliè-...ur quelques lois empiriques établies par Dub et par* ...19 p.)

(Em.). — *Génération des figures élémentaires multi-...ns l'espace.* (55 p.)

...u Mémoire publié dans le volume précédent.

...R (J.). — *Sur un théorème du Calcul des probabilités, ...lques intégrales définies qui s'y rattachent.* (44 p.)

...r s'occupe de l'intégrale $\int_0^\infty \cos ax \left(\frac{\sin bx}{bx}\right)^n \frac{\sin \varepsilon x}{x}\, dx$,
...ne la probabilité pour qu'une inconnue, déterminée par ...ations répétées, soit comprise entre des limites données. ...une erreur commise par Poisson dans l'évaluation de cette ... Il parvient, par une méthode différente de celle de ... la définition de la valeur moyenne dans le cas qu'il con-

Küpper (C.). — *Contributions à la théorie des courbes du troisième et du quatrième degré.* (19 p., 1 pl.)

Ce Mémoire comprend deux Chapitres : I. Les courbes du troisième ordre (C³) et les courbes du quatrième ordre (C⁴) à deux points doubles considérées comme enveloppes de sections coniques. II. Sur un réseau spécial de coniques et sur une involution quadratique centrale dans le plan.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ. Helsingfors. — In-4° (¹).

T. IX. 1871.

Gadolin (Axel). — *Mémoire sur la déduction d'un seul principe de tous les systèmes cristallographiques avec leurs subdivisions.* (71 p., 15 pl.; fr.)

Gyldén (H.). — *Relations entre les cosinus et les sinus des angles irrationnels.* (36 p.; suéd.)

L'auteur a été conduit, par un calcul astronomique, à développer le cosinus et le sinus d'un angle donné en série, procédant suivant les cosinus et les sinus des multiples d'un autre angle, incommensurable avec le premier. Il n'a pu trouver, dans les travaux mathématiques publiés jusqu'à ce jour, aucune méthode vraiment pratique qui conduisit à la solution de cette question par des séries assez rapidement convergentes. Il lui a fallu dès lors chercher comment on peut déduire des séries de Fourier de nouvelles séries jouissant d'une convergence suffisante.

Moberg (Ad.). — *Remarques sur les courants électriques induits par un aimant dans les plaques métalliques tournantes.* (35 p.; suéd.)

Hallstén (K.). — *Sur la chaleur considérée comme mouvement.* (10 p.; suéd.)

Lindelöf (L.). — *Sur la figure apparente d'une planète.* (13 p.; fr.)

L'auteur applique la transformation homographique à la solution

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 274.

le ce problème, traité par Bessel (1) : Déterminer la figure apparente d'une planète telle, qu'elle résulte de sa position relative par rapport au Soleil et à la Terre, la forme de la planète étant supposée celle d'un sphéroïde aplati.

HALLSTÉN (K.). — *Sur les constantes de la chaleur.* (10 p.; suéd.)

LINDELÖF (L.). — *Sur les limites entre lesquelles la caténoïde est une surface minima.* (8 p.; fr.)

Cette question, dont la discussion a été mentionnée déjà dans le *Bulletin* (t. IV, p. 273), acquiert un nouvel intérêt depuis les belles expériences de M. Plateau sur les figures d'équilibre des fluides soustraits à l'action de la pesanteur. M. Lindelöf a joint à l'étude générale du problème les résultats de ses calculs numériques relatifs aux dimensions de la caténoïde limite.

LINDELÖF (L.). — *Quelques formules relatives à la courbure moyenne d'une courbe fermée.* (5 p.; fr.)

L'auteur a été conduit à ses recherches sur cette question en traitant le problème des polyèdres maxima (2). Il parvient au théorème suivant : « Une figure plane, limitée par une courbe continue, étant divisée en secteurs égaux infiniment petits par des rayons émanés d'un point arbitraire, la courbure moyenne des éléments d'arc ainsi déterminés s'obtient en divisant le périmètre entier par le double de l'aire. »

KRUEGER (A.). — *Détermination de l'orbite de la comète,* 1785, II. (23 p.; all.)

Les éléments de la comète découverte le 26 septembre 1867 simultanément par MM. Bäker, à Nauen, et Winnecke, à Bonn, ayant présenté quelque ressemblance avec ceux de la comète découverte par Messier, à Paris, le 11 mars 1785, il a paru intéressant à M. Krueger de déterminer avec plus de précision les éléments de cette dernière comète, bien qu'il n'y eût pas lieu de s'attendre à pouvoir l'identifier avec celle de 1867.

---

(1) *Astronomische Untersuchungen,* Bd. I.
(2) Voir *Bulletin,* t. I, p. 242.

GIORNALE DI MATEMATICHE, pubblicato per cura di G. BATTAGLINI, E. FERGOLA, etc.

T. XV; 1er semestre, janvier-juin [illegible].

JANNI (G.). — *Exposition de la théorie des substitutions.* (32 p.)

Dans cette troisième Partie de son Mémoire, l'auteur traite des substitutions linéaires. Cette Partie se compose des Chapitres dont voici les titres : I. Représentation analytique des substitutions. — II. Généralités sur les substitutions linéaires. — III. Ordre du groupe linéaire. — IV. Facteurs de composition du groupe linéaire. — V. Forme canonique des substitutions linéaires.

TORELLI (G.). — *Sur quelques intégrales formées au moyen des intégrales elliptiques, et sur leurs applications.* (21 p.)

L'auteur s'occupe des intégrales que l'on obtient en intégrant par rapport au module l'intégrale elliptique multipliée par une puissance du module, et il donne quelques applications des formules obtenues à la simplification des intégrales complètes de certaines équations différentielles.

B[illegible] (A.). — *Résolution de 2n équations à 2n inconnues, qui se présentent dans certaines questions de Mécanique appliquée aux constructions.* (4 p.)

NEUMANN (C.). — *Notice sur* Rodolphe-Frédéric-Alfred CLEBSCH. ([illegible] p.)

Traduit de l'allemand.

GAMBARDELLA (F.). — *Sur les coefficients des facultés analytiques.* (15 p.)

L'auteur se propose, dans cette Note, d'étudier les développements des deux fonctions que l'on désigne sous le nom de *facultés analytiques* ou de *factorielles*, l'une à exposant positif, l'autre à exposant négatif ; il s'occupe de la recherche des expressions générales des coefficients de leurs développements. La Note est suivie d'un Appendice sur le développement des fonctions isobariques.

BATTAGLINI (G.). — *Sur la théorie des moments d'inertie.* (9 p.)

---

(1) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 254.

Pour faire suite aux Notes relatives à la Statique et à la Cinétique des systèmes de forme invariable, traitées d'après les contions géométriques et mécaniques de Plücker, l'auteur se proe d'étudier, par la même méthode, la Dynamique de ces systèmes. Dans cette Note, rapportant le système à un tétraèdre fondamenil développe la théorie des moments d'inertie par rapport à un nt, à un plan et à une droite.

Beltrami (E.). — *Sur les fonctions bilinéaires*. (9 p.)

L'auteur considère certains problèmes auxquels donne lieu la orie des fonctions bilinéaires, lorsqu'on écarte la restriction que deux séries de variables soient assujetties à des substitutions ntiques ou à des substitutions inverses.

Aschieri (F.). — *Sur les systèmes de droites dans l'espace*. p.)

Dans cette Note (qui sera continuée), l'auteur établit certaines priétés relatives à deux séries de complexes du premier degré, as lesquelles les complexes de chaque série satisfont à la condin de passer par une droite déterminée.

Affolter (G.). — *Démonstration élémentaire de cette proiété, que deux triangles polaires dans un cercle sont en position rspective*. (2 p.)

Rtew (L.). — *Sur les lignes de courbure des surfaces du send ordre*.

Démonstration de ce théorème, que les lignes de courbure d'une rface du second ordre touchent les huit génératrices qui passent ux à deux par les quatre points où la surface est rencontrée par cercle imaginaire de l'infini.

Pittarelli (G.) et Caporali (E.). — *Solution de questions proosées dans le* Giornale di Matematiche. (8 p.)

Siacci (F.). — *Questions proposées*. (2 p.)

Sardi (C.). — *Sur les progressions par différence*. (30 p.)

Ce Mémoire contient certains théorèmes sur les progressions par ifférence, avec les applications à la résolution du problème des artitions d'un nombre donné avec trois ou quatre nombres désinés.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

ЭTH (J.), F. R. S., vicar of Stone. — A Treatise on some new Geometrical Methods, containing essays on Tangential Coordinates, Pedal Coordinates, Reciprocal Polars, the Trigonometry of the Parabola, the geometrical origin of Logarithms, the geometrical properties of Elliptic Integrals, and other kindred subjects. — London, Longmans & Co.; 1873. In-8° en 2 vol.; t. I, 368 p.

Parmi les découvertes importantes, il en est qui apparaissent omme des conséquences naturelles des notions antérieurement cquises. Elles appartiennent quelquefois à plusieurs géomètres; lles sont publiées presque en même temps dans différents Mémoires; uelquefois aussi un savant les signale avant tous les autres; mais, omme elles constituent le développement nécessaire des progrès éjà acquis, nous comprenons qu'elles devaient nécessairement rendre place dans la Science par le seul effet des études communes les géomètres sur les idées fécondes introduites auparavant.

La découverte des coordonnées tangentielles est un des exemples es plus remarquables peut-être qu'on puisse citer à l'appui des emarques qui précèdent. La belle théorie des polaires réciproques réée par Brianchon et Poncelet, l'étude des relations entre les ourbes et les polaires réciproques, combinées avec les notions dues Descartes sur les systèmes de coordonnées, avaient conduit les géomètres à considérer les courbes sous un double point de vue. A l'ancienne génération des lieux géométriques par le mouvement d'un point était venue se joindre la notion corrélative de la génération des ourbes par le déplacement d'une droite.

L'idée de définir les courbes par les propriétés de leurs tangentes ne pouvait tarder à apparaître; elle fut proposée presque en même emps par Plücker et par M. Chasles. Pourtant le Mémoire de Plücker est antérieur.

Dans ce travail, publié en 1829 [1], Plücker considère les coordonnées tangentielles sous la forme analytique qui leur a été conservée par presque tous les géomètres.

Étant donnée une droite par l'équation

$$ux + vy + wz = 0,$$

[1] *Journal de Crelle*, t. 6, p. 167.

[illegible] sont appelés par Plücker les coordonnées homogènes de la ligne droite, et toute équation homogène entre ces quantités représente une courbe au même titre que les équations en coordonnées ordinaires. Plücker divise toutes les équations en coordonnées tangentielles d'après leur degré, qui constitue la classe de la courbe, et il commence une étude détaillée de son système de coordonnées. Il discute le point ou lieu de première classe; puis il [illegible] les lieux de seconde classe, dont il donne plusieurs belles [illegible], et l'on peut dire qu'il a bien compris toute l'importance [illegible] instrument analytique qu'il avait déduit, de son propre [illegible] de la méthode des polaires réciproques. A la fin de son travail [illegible] ensuite de nouvelles recherches, devant paraître [illegible] *[illegible]-geometrischen Entwicklungen*, qui étaient [illegible] presse et qui ont en effet paru en 1828 et 1831.

[illegible] temps que Plücker, M. Chasles s'occupait aussi des [illegible] coordonnées propres à représenter une courbe par ses [illegible] surface par ses plans tangents. Ayant appris par [illegible] *mathématique et physique* de M. Quetelet la [illegible] Plücker, il s'empressa d'écrire, le 10 décembre 1829, [illegible] lettre dont nous reproduisons quelques passages:

« [illegible] occupé d'un nouveau système de coordonnées, [illegible] questions auxquelles les systèmes usités [illegible] m'empresse de vous en faire connaître très [illegible] pour donner date à mon travail dans le cas [illegible] avec M. Plücker.

[illegible] peut-être, Monsieur, que, dans ma lettre [illegible] l'honneur de vous dire que je terminais [illegible] sur une méthode propre à la démonstration [illegible] de propositions déjà connues, par divers [illegible]

[illegible] d'annoncer cet écrit à M. Hachette dans [illegible] Je me suis occupé, disais-je, d'un nouveau [illegible] l'Algèbre à la Géométrie, qui se prête à la [illegible] toutes nouvelles des figures, qu'il me [illegible] par les systèmes de coordonnées en [illegible] ces propriétés.... »

[illegible] géomètre définit son système de [illegible] points fixes A, B, C, je mène trois axes

rallèles entre eux. Un plan quelconque rencontre ces axes en is points, dont les distances aux points A, B, C sont les coordons x, y, z du plan. Une équation $F(x, y, z)$ entre ces coordonnées me lieu à une infinité de plans, et représente par conséquent la face enveloppe de ces plans. »

Pour les personnes au courant de ces questions, il ne peut y avoir loute : le système de M. Chasles était tout aussi général que celui Plücker; M. Chasles, comme Plücker, avait, dès le début, envié la question avec tout le degré de généralité qu'elle a comporté qu'à l'introduction des coordonnées tétraédriques.

Après avoir fait des applications de ce premier système, et au mbre de ces applications s'en trouve une très-belle sur le centre moyennes distances des points de contact des plans tangents allèles à une direction donnée, M. Chasles en indique un second, nivalant à la notion la plus générale des coordonnées tangenlles tétraédriques, et enfin, dans une Note supplémentaire, indique encore de nouveaux théorèmes, conséquences de ses thodes.

M. Booth, de son côté, eut connaissance de la lettre de M. Chasles; réflexions et ses études sur la méthode des polaires réciproques conduisirent à édifier un ouvrage entier sur les nouveaux systèmes coordonnées, qui parut en mars 1840, et fut accueilli avec faveur r les géomètres. C'est le premier volume de la seconde édition que uteur présente aujourd'hui au public mathématicien. Nous allons alyser rapidement le contenu de ce premier volume.

Les deux premiers Chapitres traitent du point, de la ligne droite ns le plan et des sections coniques. Les Chapitres III et IV itent de différentes applications des principes et de la parabole. s Chapitres V et VI sont consacrés à la ligne droite, au point et au n dans l'espace. Les Chapitres VII, VIII et IX traitent des sures du second ordre, et en particulier des paraboloïdes. Le Chare X a pour objet l'application de l'Algèbre à la théorie des laires réciproques.

Le Chapitre XI traite des surfaces concycliques, c'est-à-dire des aires réciproques des surfaces homofocales, et le Chapitre suit de la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde.

Les développements donnés jusqu'ici peuvent être considérés nme la partie classique, élémentaire de l'Ouvrage. L'Auteur

8.

[illegible]

Dans le Chapitre XXIX l'auteur [illegible] la théorie de la [illegible], la trigonométrie de la [illegible] et [illegible] géométrique des [illegible], qui forment la matière des Chapitres XXX à XXXIII [illegible]. Le premier volume se termine par un Chapitre [illegible] surfaces homofocales.

Tel est, rapidement indiqué, le contenu de cette première Partie de l'Ouvrage. On sent, en le lisant, que l'auteur a travaillé longtemps et avec soin les questions sur lesquelles il écrit. À toutes les pages l'Ouvrage porte une empreinte personnelle, qui le distingue d'une foule d'autres Traités sur le même sujet : nous le recommandons volontiers et aux professeurs et aux élèves. G. D.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

T. LXXVII, 1873, 2e semestre (suite).

N° 15. Séance du 13 octobre 1873.

N° 16. Séance du 20 octobre 1873.

Bertrand (J.). — *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe.*

« Les orbites planétaires sont des courbes fermées ; c'est la cause

incipale de la stabilité de notre système, et cette circonstance portante résulte de la loi d'attraction qui, quelles que soient les constances initiales, fait mouvoir chaque corps céleste, qui n'est s expulsé de notre système, suivant la circonférence d'une ipse. On n'a pas remarqué jusqu'ici que la loi d'attraction newtienne est la seule qui remplisse cette condition.

» Parmi les lois d'attraction qui supposent l'action nulle à une stance infinie, celle de la nature est la seule pour laquelle un bile lancé *arbitrairement* avec une vitesse inférieure à une cerne limite, et attiré vers un centre fixe, décrive nécessairement tour de ce centre une courbe fermée. Toutes les lois d'attraction *rmettent* des orbites fermées; mais la loi de la nature est la seule i les *impose*.

» On démontre ce théorème de la manière suivante :

» Soit $\varphi(r)$ l'attraction exercée à la distance r sur la molécule nsidérée, et dirigée vers le centre d'attraction, que nous prendrons ur origine des coordonnées. r et θ désignant les deux coordonnées laires du mobile, on a, en vertu d'une formule bien connue,

$$\varphi(r) = \frac{k^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right),$$

t, en posant $\frac{1}{r} = z$, $r^2\varphi(r) = \psi(z)$,

$$(1)\qquad \frac{d^2z}{d\theta^2} + z - \frac{1}{k^2}\psi(z) = 0.$$

Multiplions les deux membres par $2dz$ et intégrons; en posant

$$(2)\qquad 2\int \psi(z)\,dz = \varpi(z),$$

nous aurons

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + z^2 - \frac{1}{k^2}\varpi(z) - h = 0,$$

h étant une constante.

» On en déduit

$$d\theta = \pm\frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}\varpi(z) - z^2}}.$$

» Si la courbe représentée par l'équation qui lie z à θ est fermée, la valeur de z aura des maxima et des minima pour lesquels $\frac{dz}{d\theta}$ sera nul, et les rayons vecteurs correspondants, normaux à la trajectoire, seront nécessairement pour elle des axes de symétrie. Or, quand une courbe admet deux axes de symétrie, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit fermée est que leur angle soit commensurable avec π. Si donc α et β représentent un minimum de z et le maximum qui le suit, la condition demandée est exprimée par l'équation

$$(3) \qquad m\pi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}\varpi(z) - z^2}},$$

où m désigne un nombre commensurable. Cette équation doit avoir lieu, quels que soient h et k et, par suite, les limites α et β qui en dépendent.

» On a

$$h + \frac{1}{k^2}\varpi(\alpha) - \alpha^2 = 0,$$

$$h + \frac{1}{k^2}\varpi(\beta) - \beta^2 = 0;$$

par conséquent

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)},$$

$$h = \frac{\alpha^2\varpi(\beta) - \beta^2\varpi(\alpha)}{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)},$$

et l'équation (3) devient

$$(4) \quad m\pi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz\sqrt{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)}}{\sqrt{\alpha^2\varpi(\beta) - \beta^2\varpi(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)\varpi(z) - z^2[\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)]}}.$$

» La fonction $\varpi(z)$ doit être telle que cette équation ait lieu pour toutes les valeurs de α et de β. Le nombre commensurable m doit d'ailleurs être constant; car, s'il changeait d'une orbite à l'autre, une variation infiniment petite dans les conditions initiales apporterait un changement fini dans le nombre et la disposition des axes de symétrie de la trajectoire.

» Supposons α et β infiniment peu différents; soit

$$\beta = \alpha + u,$$

restant compris entre α et β, nous pouvons poser

$$z = \alpha + y,$$

y sera, comme u, infiniment petit. Nous aurons, en négligeant infiniment petits du second ordre,

$$\sqrt{\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)} = \sqrt{u\varpi'(\alpha)}.$$

ıns l'expression placée sous le radical au dénominateur de l'intéale (4), les infiniment petits du premier ordre se réduisent à zéro, il en est de même de ceux du second; ce sont ceux du troisième ı'il faut conserver, et l'on a, en négligeant les infiniment petits u quatrième ordre,

$$\begin{aligned}\alpha^2\varpi(\beta) - \beta^2\varpi(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)\varpi(z) - z^2[\varpi(\beta) - \varpi(\alpha)]\\ = [\varpi'(\alpha) - \alpha\varpi''(\alpha)](u^2y - uy^2).\end{aligned}$$

L'équation (4) devient

$$m\pi = \int_0^u \frac{dy\sqrt{\varpi'(\alpha)}}{\sqrt{\varpi'(\alpha) - \alpha\varpi''(\alpha)}\sqrt{uy - y^2}},$$

c'est-à-dire, en effectuant l'intégration et supprimant les facteurs communs,

$$m = \sqrt{\frac{\varpi'(\alpha)}{\varpi'(\alpha) - \alpha\varpi''(\alpha)}},$$

ou

$$(1 - m^2)\varpi'(\alpha) + m^2\alpha\varpi''(\alpha) = 0.$$

On en déduit

$$\varpi'(\alpha) = \frac{A}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-1}},$$

$$\varpi(\alpha) = A\frac{\alpha^{2-\frac{1}{m^2}}}{2 - \frac{1}{m^2}} + B,$$

A et B désignant des constantes.

» D'après les relations supposées entre les fonctions ϖ, ψ et φ, il en résulte

$$\psi(z) = \frac{A}{2z^{\frac{1}{m^2}-1}},$$

$$\varphi(r) = \frac{A}{2} r^{\frac{1}{m^2}-3}.$$

Telle est la seule loi d'attraction possible, m y désignant un nombre commensurable quelconque; mais il n'en résulte pas qu'elle remplisse, quel que soit m, toutes les conditions de l'énoncé. On doit avoir, en effet, pour toutes les valeurs de α et de β,

$$(6) \quad m\pi = \int_\alpha^\beta \frac{dz\sqrt{\frac{1}{\beta^{\frac{1}{m^2}-2}} - \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2}}}}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^{\frac{1}{m^2}-2}} - \frac{\beta^2}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2}} + (\beta^2-\alpha^2)\frac{1}{z^{\frac{1}{m^2}-2}} - z^2\left(\frac{1}{\beta^{\frac{1}{m^2}-2}} - \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{m^2}-2}}\right)}}$$

» Supposons d'abord $\frac{1}{m^2} - 2$ négatif; posons $\alpha = 0$, $\beta = 1$, l'équation devient

$$m\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z^{\frac{1}{m^2}-2}} - z^2}} = \int_0^1 \frac{z^{\frac{1}{m^2}-1}dz}{\sqrt{1 - z^{\frac{1}{m^2}}}},$$

et l'équation (6) donne

$$m\pi = m^2\pi, \quad m = 1.$$

La loi d'attraction correspondante est

$$\varphi(r) = \frac{A}{r^2}.$$

» Si l'on suppose $\frac{1}{m^2} - 2$ positif, l'équation (6) devient, pour $\alpha = 1$, $\beta = 0$,

$$m\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit $m = \frac{1}{2}$, et la loi d'attraction correspondante est

$$\varphi(r) = Ar.$$

Deux lois seulement remplissent donc les conditions deman-
s, celle de la nature, par laquelle l'orbite fermée n'a qu'un axe
symétrie passant par le centre d'action, et l'attraction propor-
nelle à la distance, pour laquelle il y en a deux.

Notre illustre Correspondant M. Tchebychef, à qui j'ai com-
iqué la démonstration qui précède, m'a fait judicieusement
erver que le théorème, inutile aujourd'hui pour la théorie si
faite des planètes, pourra être utilement invoqué pour étendre
étoiles doubles les lois de l'attraction newtonienne. »

'AYE. — *Sur les* Astronomische Mittheilungen *du Dr Rodolphe*
olf.

'AYE. — *Sur l'explication des taches solaires proposée par*
Dr Reye.

)'AVOUT. — *Recherche d'une méthode facile pour mesurer la*
acité des navires.

a méthode d'approximation que donne l'auteur permet de cal-
er cette capacité par des formules qui ne contiennent que des
ures faciles à prendre, même sur des navires chargés.

o 17. Séance du 27 octobre 1873.

ECCHI (le P.). — *Réponse à une Note de M. Respighi, sur la*
ndeur des variations du diamètre solaire.

o 18. Séance du 3 novembre 1873.

'AYE. — *Analyse et critique d'un « Essai sur la constitution et*
igine du système solaire, par M. ROCHE ».

n terminant l'analyse du Livre de M. Roche, M. Faye ajoute :
Le Livre nouveau de M. Roche ne se recommande pas seule-
nt à l'attention de l'Académie par la vieille et légitime autorité
ntifique de l'auteur, mais aussi par la nouveauté des résultats
n style assez clair pour rendre aisément accessibles les déli-
es questions de nos origines. Ce livre manquait dans la littéra-
e astronomique, et M. Roche était probablement le seul auteur
isamment préparé à l'écrire, grâce à ses travaux antérieurs. »

BERTRAND (J.). — *Action mutuelle des courants voltaïques.*
l s'agit, dans cette Communication, de la loi nouvelle présentée

par M. Helmholtz. Voici d'ailleurs l'historique de la question, que nous citerons textuellement, d'après M. Bertrand :

« Il y a deux ans environ, dans la séance du 23 octobre 1871, j'appelais l'attention de l'Académie sur une formule nouvelle proposée par un savant allemand, M. Helmholtz, et destinée par lui à remplacer la loi d'Ampère sur l'action élémentaire des courants.

» La loi nouvelle, je l'ai démontré, ne correspond à aucune force de grandeur et de direction déterminées s'exerçant entre les deux éléments, et cela seul, suivant moi, devait conduire à la rejeter. Une année plus tard, le 14 octobre 1872, je revenais sur la même question pour examiner la réponse faite par M. Helmholtz à mon objection, et insérée au tome LXXV du *Journal de Mathématiques*, publié à Berlin, par M. Borchardt.

» M. Helmholtz reconnaît sans difficulté qu'aucune force, d'après la loi qu'il propose, ne saurait représenter l'action d'un élément infiniment petit sur un élément infiniment petit; mais il n'y voit aucun argument décisif contre sa théorie : l'action de deux éléments se composera d'une force et d'un couple agissant sur chacun d'eux, et cela, dans son opinion, n'implique aucune contradiction.

» Mais en suivant jusqu'au bout les conséquences des principes admis, en calculant le moment du couple, on trouve que les forces qui le produisent devraient avoir une intensité finie.

» Quelle que soit la ténacité d'un fil, une infinité de forces, de grandeur finie, distribuées sur sa longueur, doivent en procurer la rupture; je l'ai montré avec détail dans la Note du 14 octobre 1872, croyant cette fois avoir établi rigoureusement l'impossibilité de la loi nouvelle.

» On me communique le *Compte rendu de l'Académie de Berlin*, du 6 février 1873. M. Helmholtz, revenant sur la question, n'a rien changé, je le vois, à ses convictions. J'ai traduit son Mémoire, assez court pour figurer aux *Comptes rendus*, et j'espère, après l'y avoir inséré en entier, montrer avec évidence, dans la séance prochaine, les causes précises de son illusion et l'inexactitude de ses formules. »

Suit la traduction du Mémoire ayant pour titre :

Comparaison de la loi d'Ampère et de celle de Neumann sur les forces électrodynamiques. (8 p. des *Comptes rendus*.)

Secchi (le P.). — *Suite des observations des protubérances so-*

laires, pendant les six dernières rotations de l'astre, du 23 avril au 2 octobre 1873; conséquences concernant la théorie des taches.

MORIN (le général). — *Rapport sur un Mémoire de M.* GRAEFF, *sur l'application des courbes de débits à l'étude du régime des rivières et au calcul des effets produits par un système multiple de réservoirs.*

« Le nouveau travail présenté par M. Graeff se compose de deux parties distinctes : la première est relative aux questions qui concernent le régime des rivières et l'alimentation des canaux; la seconde traite de l'action simultanée d'un système multiple de réservoirs sur le régime d'une rivière. La méthode qu'il suit pour cette discussion est basée sur la représentation graphique des résultats des observations continues qu'il a fait recueillir depuis de longues années. »

Après avoir analysé ce Mémoire, le Rapporteur ajoute :

« La conclusion générale de cet important travail est empreinte de cette prudence que de longues observations inspirent aux ingénieurs expérimentés. »

Elle peut se résumer ainsi qu'il suit :

« L'effet d'un réservoir unique sur une région prochaine en aval est certain et peut être calculé avec un degré suffisant d'exactitude.

» Celui de plusieurs réservoirs, établis sur un même cours d'eau, est encore certain, quoique plus difficile à apprécier avec précision.

» Enfin, lorsqu'il existe à la fois des réservoirs sur le cours d'eau principal et sur des affluents, les incertitudes augmentent tellement, que ce système ne serait admissible que dans des cas tout à fait spéciaux.

» Aussi l'auteur est-il sagement d'avis, avec les ingénieurs les plus habiles, que le système multiple des réservoirs disséminés sur tous les affluents des grands fleuves ne peut être conseillé par la prudence. »

M. le Rapporteur conclut à l'insertion du Mémoire de M. Graeff dans le *Recueil des Mémoires des Savants étrangers.*

OUDEMANS. — *Observations relatives à une Communication de M.* Edm. DUBOIS, *sur l'influence de la réfraction atmosphérique, à l'instant d'un contact dans un passage de Vénus.*

N° [illegible]. Séance [illegible].

[illegible]. — [illegible]

[illegible]

[illegible]. — [illegible] *Corps*.

On sait qu'on peut ramener à [illegible] l'intégration de six équations différentielles ayant la forme [illegible]. M. [illegible] suppose ces six équations intégrées, et il se propose seulement de montrer comment on pourra éviter les éliminations, qui seront probablement fort pénibles, pour exprimer les [illegible] les trois Corps en fonction du temps : il montre qu'il n'a [illegible] plus qu'à faire des quadratures et à intégrer une équation différentielle ordinaire du second ordre.

Marchand (E.). — *De l'influence exercée par la Lune sur les phénomènes météorologiques.*

N° 20. Séance du 17 novembre 1873.

Faye. — *Réponse aux remarques de M. Tacchini, sur la théorie des taches solaires.*

Dubois (E.). — *Réponse aux observations de M. Oudemans sur l'influence de la réfraction atmosphérique, à l'instant d'un contact dans un passage de Vénus.*

Reye (Th.). — *Réponse à M.* Faye, *concernant les taches solaires.*

Spottiswoode (W.). — *Sur les plans tangents triples à une surface.*

N° 21. Séance du 24 novembre 1873.

Marié-Davy. — *Observations, à propos d'une Note récente de*

EYE, *sur les analogies qui existent entre les taches solaires et urbillons de notre atmosphère.*

RVILLE (H. DE). — *Note sur les cyclones terrestres et sur les nes solaires.*

AMMARION (C.). — *Orbite apparente et période de révolution étoile double ξ de la Grande Ourse.*

période de révolution est d'environ soixante ans sept mois.

UTIER (J.). — *Note sur la décharge des conducteurs électrisés.*

NAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, publié par J. LIOUVILLE ([1]).

XVII; 2e série; 1872 (suite).

THIEU (E.). — *Mémoire sur l'intégration des équations aux rences partielles de la Physique mathématique.* (75 p.)

ns le Mémoire actuel, l'auteur se propose de trouver les inté- générales des équations différentielles suivantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - a^2 u,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

des corps de forme quelconque, en les supposant continues, que leurs dérivées du premier ordre.

ns un premier paragraphe, il passe en revue diverses expres- qui satisfont aux équations aux différences partielles de la ique mathématique (20 p.), et donne ensuite le développement ries de certaines fonctions qui se présentent fréquemment dans tudes. (19 p.)

ici les propositions principales énoncées par M. Mathieu, en nant les recherches faites dans ce Mémoire :

([1]) Voir *Bulletin*, t. III, p. 379.

« 1° Toute fonction qui satisfait à l'intérieur d'une surface σ à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\alpha^2 u,$$

et qui y est continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, a pour expression

$$\int \frac{\cos \alpha r}{r} \rho \, d\sigma,$$

ρ étant une fonction arbitraire des coordonnées de l'élément $d\sigma$, et r la distance du point (x, y, z) à $d\sigma$.

» Toute fonction qui satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\alpha^2 u$$

dans l'intérieur d'une ligne s et qui y varie d'une manière continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, est exprimée par la formule

$$\int \mathrm{N} \rho \, ds, \quad \text{où} \quad \mathrm{N} = \int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega) \log(r \sin^2\omega) \, d\omega,$$

ρ étant une fonction arbitraire des coordonnées de l'élément ds, et r la distance du point (x, y) à l'élément ds.

» 2° Si une fonction u satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t},$$

dans l'intérieur d'une surface σ, et satisfait aux conditions précédentes de continuité, elle est donnée par la formule

$$u = \int \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r + 2a\varepsilon\sqrt{t}, \theta, \psi) \, e^{-\varepsilon^2} \, d\varepsilon \, d\sigma,$$

f étant une fonction arbitraire de trois quantités, r la distance du point (x, y, z) intérieur à σ à l'élément $d\sigma$, et θ et ψ deux coordonnées propres à déterminer un point de cette surface.

» La solution générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u = \int \psi(r, t, v)\, ds,$$

$$, t, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\pi} \mathrm{F}(r\cos\omega + 2a\alpha\sqrt{t}, v) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega\, e^{-\alpha^2} d\omega,$$

·, v) étant une fonction arbitraire de deux variables, et v une ·donnée propre à déterminer un point de la courbe s qui limite ›ace dans lequel a lieu l'équation précédente.

3° La solution générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

s l'intérieur d'une surface σ est donnée par la formule

$$u = \int \frac{f(r + at, \theta, \psi) + \mathrm{F}(r - at, \theta, \psi)}{r}\, d\sigma,$$

F étant des fonctions arbitraires de trois variables, et θ, ψ étant x coordonnées qui servent à déterminer un point de la sur- : σ.

Si une fonction u de deux coordonnées rectangulaires x, y, lu temps t satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

s l'intérieur d'une courbe s, cette fonction est de la forme

$$u = \int \psi(r, t, v)\, dr,$$

c

$$\psi(r, t, v) = \int_0^{\pi} \mathrm{F}(r\cos\omega + at, v) \log(r\sin^2\omega)\, d\omega,$$

désignant par $\mathrm{F}(r, v)$ une fonction arbitraire de deux variables, par v une coordonnée propre à déterminer un point de contour. »

Funérailles de M. Duhamel. — *Discours de M.* Jamin, membre l'Institut, au nom de la Section de Physique (4 p.)

[illegible] l'Académie des Sciences [illegible]

[illegible] membre de l'Institut [illegible]

[illegible] membre de l'Instit. [illegible]

[illegible] — [illegible] adressée à M. [illegible]

[illegible] remarques sur l'enveloppe [illegible] la suite des points [illegible]

[illegible] — [illegible] de M. Faye [illegible] l'Académie. (3 p.)

[illegible] — [illegible] (1 p.)

[illegible] question suivante :

[illegible] satisfaire les deux [illegible] fois transitif, [illegible] $n(n-1)$

[illegible]

[illegible] d'un nombre [illegible]

[illegible]

[illegible] cette dernière règle sont [illegible] groupes de [illegible] et donc [illegible] pas, comme le [illegible] premier anneau d'une [illegible]

[illegible] trois groupes pri[illegible] puissance de 2, un seul [illegible]

[illegible] — Sur la forme canonique des congruences du [illegible] (35 p.)

uestion que M. Jordan se propose de résoudre est la suivante : éterminer le nombre des solutions de la congruence du . degré à m inconnues

$$x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_m x_m^2 + b_{12} x_1 x_2 + \ldots \equiv c \,(\text{mod. M}). \text{»}$$

problème se ramène immédiatement au cas où le module M e puissance d'un nombre premier. Le principe de la méthode ppée par l'auteur repose sur la propriété des congruences du l degré de pouvoir se réduire par un changement de variables ormes plus simples dites *canoniques*.

NNHEIM (A.). — *Démonstration géométrique d'une propo- due à M. Bertrand*. (3 p.)

'agit de la relation établie par M. Bertrand entre les positions ıx normales à une surface, menées aux extrémités de deux nfiniment petits égaux tracés sur cette surface à partir d'un point (*Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XII, p. 343).

NNHEIM (A.). — *Sur la surface gauche, lieu des normales pales de deux courbes* (12 p.)

Bertrand avait donné le premier la relation qui doit exister les deux rayons de courbure d'une courbe pour que les nor- principales de cette courbe soient en même temps normales ipales d'une autre courbe (*Journal de Mathématiques*, rie, t. XV, p. 332). M. Mannheim se propose d'étudier la sur- auche engendrée par les normales principales de deux courbes, isant intervenir les propriétés des *pinceaux de droites* et des *alies* qu'il a données dans son Mémoire, inséré dans le *Journal Mathématiques*, 2e série, t. XVII, p. 109 ([1]). Après avoir formé la question, M. Mannheim démontre très-simplement elations énoncées par M. Bertrand, dont MM. P. Serret et is avaient déjà donné des démonstrations géométriques (*Théorie elle, géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, 9, et *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. I, p. 223); il le ensuite plusieurs propriétés intéressantes et nouvelles de la ce gauche en question.

([1]) Voir *Bulletin*, t. III, p. 382.

Mathieu (É.). — *Sur la publication d'un cours de Physique mathématique, professé à Paris en 1867 et 1868* (¹). (4 p.)

Laurent (H.). — *Sur un théorème de Poisson.* (4 p.)

Les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ étant les intégrales d'un problème de Dynamique dont les variables sont $q_1, q_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots$, M. Laurent généralise le théorème de Poisson, en démontrant que les expressions de la forme

$$\sum_{ij} \frac{D(\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu, \alpha_\rho)}{D(q_i, q_j, p_i, p_j)}, \quad \sum_{ijk} \frac{D(\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu, \alpha_\rho, \alpha_\sigma, \alpha_\xi)}{D(q_i, q_j, q_k, p_i, p_j, p_k)}, \ldots$$

restent constantes pendant toute la durée du mouvement; les notations, sous les signes sommatoires, désignent les déterminants fonctionnels.

Graindorge (J.). — *Note sur l'intégration d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre.* (7 p.)

T. XVIII; 2ᵉ série; 1873.

Dieu. — *Mouvement d'un point matériel sur une ligne fixe, eu égard au frottement.* (24 p.)

M. Dieu établit d'abord les équations générales du mouvement pour le cas d'une courbe quelconque, et énonce, en passant, cette proposition :

« La moitié de la différentielle de la force vive est égale à la différence entre les travaux élémentaires dus à la force appliquée et au frottement de la courbe fixe sur le mobile. »

Il applique ensuite ses formules générales, et discute, avec beaucoup de soin, les circonstances intéressantes du mouvement pour les cas suivants :

1. La courbe fixe est une droite indéfinie; la force P est quelconque.

2. La courbe fixe est une circonférence située dans un plan vertical; la force P est le poids du mobile.

3. La courbe fixe est une parabole dont l'axe est vertical et de sens opposé à la pesanteur; la force P est le poids du mobile.

(¹) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 231.

4. La courbe fixe est une cycloïde dont l'axe est vertical et de ens opposé à la pesanteur; la force est le poids du mobile.

5. La courbe fixe est une hélice tracée sur un cylindre de révo- ution dont l'axe est vertical; la force P est le poids du mobile.

MATHIEU (É.). — *Sur la fonction cinq fois transitive de vingt- uatre quantités.* (22 p.)

Dans un Mémoire *Sur les fonctions de plusieurs quantités,* ublié dans le tome VI (2e série; 1861) du *Journal de Mathéma- iques,* M. Mathieu avait annoncé qu'il possédait une fonction cinq ois transitive de vingt-quatre quantités, en se contentant d'en ndiquer le nombre des valeurs distinctes; il se propose, dans la Note actuelle, de montrer comment il était parvenu à la découvrir.

Après avoir donné quelques indications sur son procédé de re- cherche, il l'applique à la détermination des fonctions transitives le 7, 11 et 23 lettres; il en conclut les fonctions transitives de 8, 12 et 24 lettres.

L'auteur termine son Mémoire en remarquant que les fonctions ransitives de 7, 11 et 23 quantités, et celles de 8, 12 et 24, sont lues à ce que les nombres premiers 7, 11 et 23 sont des doubles de ombres premiers augmentés d'une unité; et qu'une fonction ransitive, dont le nombre des lettres est à la fois un nombre premier et le double d'un nombre premier augmenté d'une unité, est au moins leux fois transitive.

BOUSSINESQ (J.). — *Addition au Mémoire sur la théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectan- gulaire, etc.* (6 p.)

Cette Note a pour objet une démonstration nouvelle, sans l'hy- pothèse restrictive qui avait d'abord été adoptée, de la formule fondamentale (14) du Mémoire inséré dans le *Journal de Mathé- matiques,* 2e série, t. XVII (1872).

MARIE (M.). — *Détermination du point critique où est limitée la convergence de la série de Taylor.* (15 p.)

MARIE (M.). — *Détermination du périmètre de la région de convergence de la série de Taylor et des positions des diffé- rentes conjuguées comprises dans cette région, ou construction du tableau général des valeurs d'une fonction que peut fournir*

ıes népériens, et i le symbole $\sqrt{-1}$. On sait que chacun des
ɜs de cette série, uni à son conjugué, fournit, au moyen d'un
me d'équations différentielles simultanées, une inégalité du
ier ordre par rapport à la masse perturbatrice.

Le développement de R est un problème difficile, non pas en
ıême, mais par la longueur des calculs qui s'y rapportent. On
:he habituellement à exprimer le coefficient du terme général
-nT)i, que nous désignerons par $A_{n,n'}$, en séries ordonnées sui-
les puissances des excentricités et des inclinaisons des deux
tes, quantités petites dans le plus grand nombre des cas. Pour
ir ce résultat, on suit le plus souvent la méthode donnée par
ıce dans la *Mécanique céleste;* mais, comme les calculs y sont
posés, on ne peut point par cette voie obtenir un terme isolé
éveloppement; de plus, la moindre erreur dans les longs cal-
[ue l'on est obligé de faire quand on veut aller jusqu'à un
élevé entraîne à d'autres erreurs, qu'il est impossible de cor-
sans reprendre en entier tout le travail.

)n comprend donc l'importance d'une méthode qui permettrait
ɔuver, sous forme algébrique, un coefficient déterminé $A_{n,n'}$,
ıne série d'opérations simples, faciles à répéter, et ne dépen-
d'aucune autre.

:ette méthode a été indiquée pour la première fois par Cauchy (1).
ɔrésenté moi-même deux Mémoires à l'Institut, dans lesquels
ortais quelques perfectionnements aux calculs de l'illustre géo-
ɜ (2). M. Puiseux, de son côté, a publié dans le *Journal de*
iouville deux articles sur le même sujet (3). C'est en lisant
ravail qu'il m'a semblé possible de simplifier encore notable-
la solution du problème du développement de R, par l'intro-
n des transcendantes de Bessel. J'ai déjà montré, dans deux
Mémoires, que ces transcendantes fournissent une solution
légante du problème de Kepler et d'autres problèmes ana-
(4), et qu'elles permettent de calculer par interpolation les
ients des divers termes de la fonction perturbatrice (5).

ɔmptes rendus de l'Académie*, t. XI.
ɔmptes rendus de l'Académie*, 1856, mars, juillet.
urnal de Liouville*, 1860.
urnal de Liouville*, 1861.
nnales de l'Observatoire*, t. VII.

» En résumé, j'arrive à une expression très-simple du terme général de la fonction perturbatrice; mais les quantités petites, suivant lesquelles s'ordonnent les développements en séries, ne sont pas les quantités habituelles. L'excentricité e est remplacée par $\eta = \tang \frac{1}{2}\psi$, ψ étant donné par $e = \sin\psi$; l'excentricité entre aussi dans les transcendantes de Bessel définies par l'équation

$$(o, n)_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^{-j} \mathrm{E}^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} du, \quad \text{où} \quad x = \mathrm{E}^{u\sqrt{-1}} = \mathrm{E}^{ui},$$

et l'on sait que chaque transcendante est de l'ordre marqué par la valeur absolue de son indice j. Enfin l'inclinaison mutuelle des orbites y entre par la quantité $\nu = \sin^2 \frac{1}{2}\mathrm{I}$, qui est du second ordre. Les séries de notre développement procèdent donc suivant les puissance de η, η' ν, et suivant les facteurs $(o, n)_j$, $(o, n')_{j'}$. La symétrie des résultats nous semble faire compensation à l'accroissement du nombre des lettres ordonnatrices.

» Nous remarquerons aussi que nous évitons l'emploi des transcendantes $b_s^{(i)}$ de Laplace; chaque terme de $\mathrm{A}_{n,n'}$ se présente sous forme de série ordonnée suivant les puissances de $\alpha = \frac{a}{a'}$.

» Pour arriver à l'expression explicite d'un coefficient correspondant à un argument donné, ou encore pour trouver tous les termes d'un ordre donné, il suffit de résoudre en nombre entiers et positifs certaines équations de la forme

$$x + y + z + t + u + v = n.$$

La simplicité et la régularité de cette opération permettent d'éviter toute erreur dans le résultat final. »

Graindorge (J.). — *Sur la sommation de quelques séries, et sur quelques intégrales définies nouvelles.* (10 p.)

Voici quelques-uns des résultats donnés par M. Graindorge :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2 n\varphi}{n^4} = \frac{\varphi^2}{6}(\pi - \varphi)^2, \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\varphi}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} - \frac{\pi\varphi^2}{48}(3\pi - 2\varphi),$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos^2 n\varphi}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\varphi^2}{6}(\pi - \varphi)^2, \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^4 n\varphi}{n^4} = \frac{\pi\varphi^3}{3} - \frac{\varphi^4}{2},$$

$$\int_0^1 l(1 - 2x\cos\varphi + x^2)\,\frac{dx}{x} = \varphi\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{3}\pi^2$$

BESGE. — *Sur une équation différentielle.* (3 p.)

L'équation différentielle

$$(1) \qquad y\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2py^2,$$

où p est une fonction donnée de la variable indépendante x, se ramène à la forme

$$(2) \qquad \frac{d\sigma}{dx} + \sigma^2 = p,$$

en posant $y = e^{\int 2\sigma dx}$; c'est la forme à laquelle se ramènerait l'équation

$$(3) \qquad \frac{d^2u}{dx} = pu,$$

en posant $u = e^{\int \sigma dx}$.

LIOUVILLE (J.). — *Sur quelques formules générales qui se rattachent à certaines formes quadratiques.* (3 p.)

LIOUVILLE (E.). — *Sur la statistique judiciaire.* (18 p.)

BIENAYMÉ. — *Rapport sur le Concours pour le prix de Statistique, fondation Montyon* (prix de 1870). (10 p.)

BIENAYMÉ. — *Rapport sur le Concours pour le prix de Statistique, fondation Montyon* (prix de 1871). (6 p.)

PUISEUX (V.). — *Rapport sur deux Mémoires présentés à l'Académie, par M. Maximilien Marie, et ayant pour titres, l'un : « Détermination du point critique où est limitée la région de convergence de la série de Taylor », l'autre : « Construction du périmètre de la région de convergence de la série de Taylor. »* (5 p.)

Il s'agit des deux Mémoires cités ci-dessus. Le Rapport de M. Puiseux a été inséré *in extenso* dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. V, p. 126; 1873.

MARIE (M.). — *Note au sujet du Rapport précédent.* (17 p.)

Après avoir rappelé la suite de ses recherches et résumé la théorie de la série de Taylor, M. Marie présente plusieurs observations relatives au Rapport précédent.

CHASLES. — *Détermination immédiate, par le principe de cor-*

respondance, du nombre de points d'intersection de deux courbes d'ordre quelconque, qui se trouvent à distance finie. (10 p.)

Chasles. — *Note relative à la question précédente* [1]. (8 p.)

Darboux (G.). — *Note sur la résolution de l'équation du quatrième degré.* (16 p.)

La méthode suivie par M. Darboux met en évidence, sans faire appel à la théorie des invariants, les éléments essentiels qui figurent dans les différentes solutions. L'auteur fait dépendre la résolution d'une équation biquadratique de la détermination des points communs à deux coniques; c'est-à-dire qu'il considère d'abord un système de deux fonctions du second degré, homogènes, à trois variables, et qu'il en fait le point de départ de son analyse pour établir les relations préliminaires qui doivent le conduire aux différents modes de résolution de l'équation du quatrième degré. Il retrouve ainsi, d'abord la belle méthode de M. Hermite (*Journal de Borchardt*, t. 52), puis celle de M. Cayley. M. Darboux donne ensuite l'expression de la fonction la plus générale d'une racine par une somme de trois radicaux qui contiennent les carrés des racines de l'équation résolvante; c'est un résultat nouveau. Il déduit de là les formules de M. Aronhold, puis le résultat important obtenu par M. Hermite dans sa méthode de résolution de l'équation du troisième degré par les fonctions elliptiques.

Darboux (G.). — *Sur l'intégration de l'équation* $dx^2 + dy^2 = ds^2$ *et de quelques équations analogues.* (5 p.)

La question consiste à déterminer en fonction d'un paramètre arbitraire les expressions les plus générales de x, y, s, satisfaisant à l'équation proposée et débarrassées de tout signe d'intégration. M. Darboux retrouve, par un procédé simple, les formules qu'Euler avait données pour l'équation

$$dx^2 + dy^2 = ds^2.$$

Il résout ensuite la question pour les équations

$$dx^2 + dy^2 = dx_1^2 + dy_1^2,$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2,$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

---

[1] Voir *Bulletin*, 1873, t. IV, p. 78; t. V, p. 122.

LEVY (M.). — *Sur une théorie rationnelle des terres fraîchement remuées et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement.* (60 p.)

Dans le premier paragraphe de son Mémoire, M. Levy définit l'objet de son travail et résume les résultats obtenus ; nous le citerons textuellement :

« Les formules ou règles géométriques, d'après lesquelles les ingénieurs français calculent l'épaisseur des grands murs de soutènement, sont dues au colonel Audoy (*Mémorial de l'Officier du Génie*, n° 11), au général Poncelet (*id.*, n° 13), et à M. l'Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées de Saint-Guilhem (*Journal de Mathématiques*, t. IX, 1844). Elles sont toutes fondées sur cette double hypothèse, due à Coulomb, que dans un massif de terre dont l'équilibre se rompt les surfaces de glissement ou de *rupture des terres* sont planes, et détachent du massif des prismes exerçant sur les murs qui les soutiennent des pressions maxima.

» En soumettant ces hypothèses à l'analyse, j'ai reconnu que, sauf dans deux cas très-particuliers, elles sont mathématiquement incompatibles. Malgré cela, on éprouve une certaine hésitation à les rejeter à cause de l'autorité des noms qui s'y attachent, et parce qu'elles sont extrêmement ingénieuses, et aussi parce qu'il semble au premier abord qu'on ne saurait les abandonner sans les remplacer par d'autres hypothèses plus ou moins douteuses et sujettes à leur tour à être condamnées par une analyse mathématique trop rigoureuse. Il n'en est heureusement pas ainsi ; on peut étudier les surfaces de glissement des terres en toute rigueur et sans aucune idée préconçue quant à leur forme ou leur nature. Posée dans ces termes, la question cesse d'appartenir à la Mécanique empirique pour entrer dans le domaine de la Mécanique rationnelle et de la Géométrie. Elle acquiert ainsi un véritable intérêt scientifique, tout en conduisant, dans les cas ordinaires de la pratique, à des formules et à des constructions géométriques notablement plus simples que celles dont les Ingénieurs ont l'habitude de se servir.

» C'est ce que je me propose de montrer dans ce travail. En le faisant, je n'abandonne pas ce que je regarde comme véritablement fondamental et fécond dans la pensée de Coulomb : l'idée même d'étudier la poussée des terres au moyen des surfaces de rupture qui s'y produiraient si leur équilibre venait à être brusquement rompu,

cette idée, je la conserve tout entière, mais en la dégageant des hypothèses dont elle est jusqu'ici demeurée enveloppée.

» Je commence par étudier la répartition des pressions dans un massif de terre terminé par une surface cylindrique ou prismatique à arêtes horizontales, quelle que soit la forme de la section droite du prisme ou du cylindre.

» J'examine ensuite plus particulièrement le cas pratique d'un massif limité par un talus plan indéfini d'une inclinaison quelconque, et je détermine les pressions exercées sur un mur de soutènement plan dans un semblable massif.

» Je montre combien mes formules sont simples par rapport à celles que donnent les hypothèses de Coulomb. Enfin je termine en établissant l'impossibilité mathématique que présentent en général ces hypothèses.

» Mon travail est suivi d'une Note résumant les règles pratiques à suivre pour faire le calcul des pressions que subit un mur de soutènement. »

Voici maintenant les titres des divers paragraphes contenus dans le Mémoire de M. Maurice Levy :

II. Propriétés générales des terres en équilibre.

III. Équilibre d'un massif de terre terminé par un talus plan indéfini.

IV. Stabilité des murs de soutènement.

V. Impossibilité de la théorie de Coulomb telle qu'elle a été appliquée jusqu'ici.

VI. Note résumant les règles pratiques à suivre pour faire le calcul des pressions exercées sur un mur de soutènement.

Une première rédaction de ce Mémoire a été présentée à l'Académie des Sciences, dans la séance du 3 juin 1867 : son insertion au *Recueil des Savants étrangers* a été ordonnée par l'Académie le 7 février 1870.

Serret (J.-A.). — *Détermination des fonctions entières irréductibles, suivant un module premier, dans le cas où le degré est égal au module.* (4 p.)

Nous donnons plus loin (p. 140) une analyse de cette Note.

Boussinesq (J.). — *Recherches sur les principes de la Mécanique.*

la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie *gaz parfaits.* (56 p.)

Ce long Mémoire est divisé en neuf paragraphes, dont les titres vent :

I. Points matériels, vitesses et accélérations.

II. Principes des forces vives et autres lois générales de la Mécaue.

III. Attraction newtonienne et actions moléculaires.

IV. Énergie actuelle et énergie potentielle.

V. Énergie physique ou moléculaire, et énergie chimique ou mique.

VI. Éther, lumière et chaleur, température.

VII. Principe fondamental de la Thermodynamique.

VIII. Action moléculaire dans un corps isotrope; solidité et idité.

IX. Essai sur la théorie moléculaire des gaz.

Boussinesq (J.). — *Note complémentaire au Mémoire précédent. Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résulte* *idées exposées au* § VI. (30 p.)

Boussinesq (J.). — *Note sur la théorie des tourbillons liquides.* p.)

Villarceau (Y.). — *Nouveaux théorèmes sur les attractions* *ales et applications à la détermination de la vraie figure de la* *rre.* (42 p.)

M. Villarceau a publié, dans le *Journal de Mathématiques* *es et appliquées* (2ᵉ série, t. XII, p. 65, 1867) un premier théoe sur les attractions locales, qui établit une relation entre les ts de ces attractions sur les longitudes et les azimuts.

Depuis, M. Villarceau a fait connaître deux autres théorèmes *omptes rendus de l'Académie des Sciences,* 28 décembre 1868, ctobre 1871, 7 août 1873), où figurent les latitudes combinées avec les longitudes, soit avec les azimuts, soit avec les deux ments réunis. Ce sont les Mémoires où se trouvent ces théorèmes eur application qui sont reproduits ici.

Le premier Mémoire donne le second théorème sur les attrac-

tions locales, et en présente l'application à une première détermination de la vraie figure de la Terre, fondée sur la comparaison des nivellements géométriques et géodésiques.

Le second Mémoire contient le troisième théorème et son application à une seconde détermination de la vraie figure de la Terre, obtenue sans le concours des nivellements proprement dits. On arrive à cette détermination en calculant la distance Δ d'un point M' de la surface de niveau cherchée au point M où la normale en M' à cette surface de niveau rencontre la surface de l'ellipsoïde de comparaison.

Dans un troisième Mémoire, l'auteur présente sous une nouvelle forme l'application de son troisième théorème à la détermination de la figure de la Terre. M. Villarceau fait ainsi connaître trois méthodes différentes pour aborder cette importante question de la figure de la Terre; il les compare avec soin et discute leurs avantages et leurs inconvénients respectifs.

Serret (J.-A.). — *Sur les fonctions entières suivant un module premier, dans le cas où le degré est une puissance du module.* (15 p.)

Nous réunissons ici l'analyse de ce Mémoire avec celle de la Note indiquée plus haut (p. 138).

ANALYSE DES DEUX ARTICLES PUBLIÉS PAR M. J.-A. SERRET :

1° *Détermination des fonctions entières irréductibles, suivant un module premier, dans le cas où le degré est égal au module.* (septembre 1873.)

2° *Sur les fonctions entières irréductibles suivant un module premier, dans le cas où le degré est une puissance du module.* (décembre 1873.)

I.

C'est à Galois que nous devons les premières des notions que nous possédons sur les congruences irréductibles d'un degré quelconque. M. Serret a constitué plus tard une théorie complète de

s congruences; ses recherches sur ce sujet important ont été ıbliées, pour la première fois, dans le tome XXXV du *Recueil des 'émoires de l'Académie des Sciences,* et l'auteur les a reproduites ns la troisième édition de son *Algèbre supérieure.*

M. Serret a fait connaître, dans le travail étendu dont nous venons parler, les propriétés fondamentales des congruences irréductibles, ›st-à-dire des congruences obtenues en égalant à zéro, suivant un ›dule premier p, les fonctions entières irréductibles prises suint le même module. Il a donné en même temps l'expression du ımbre total des fonctions entières irréductibles d'un degré quelnque, et il a établi à l'égard de ces fonctions une classification alogue à celle qui concerne les simples nombres entiers, dans la éorie ordinaire des nombres.

Parmi les problèmes qui se présentent dans la théorie dont il ıgit ici, l'un des plus importants est celui qui a pour objet *la forıtion d'une fonction entière d'un degré quelconque donné* ν, *·éductible suivant un module premier* p. Toutes les applications la théorie reposent effectivement sur l'emploi d'une *racine imanaire* d'une congruence irréductible.

La règle générale pour obtenir une telle congruence irréductible degré ν consiste à diviser la fonction $x^{p^\nu} - x$, suivant le module par le produit des facteurs communs à cette fonction et aux ıctions $x^{p^\mu} - x$, où μ désigne les diviseurs de ν. Le quotient tenu est décomposable en facteurs irréductibles, tous du degré ν, l'on peut *théoriquement* déterminer ces facteurs par la méthode s coefficients indéterminés.

Cette règle est presque impraticable en raison de la longueur des lculs qu'elle exige, même dans les cas les plus simples. Aussi . Serret s'est-il préoccupé, dans ses premières recherches, des ›yens de former directement, pour chaque degré et pour chaque ›dule, une fonction entière irréductible; une telle fonction de gré ν étant connue, la théorie indique le mode de formation de ıtes les autres fonctions irréductibles du même degré. M. Ser- t a réussi à résoudre le problème qu'il s'était proposé dans deux s, savoir : 1° lorsque le degré ν ne renferme aucun facteur pre- er différent de ceux qui divisent $p - 1$; 2° lorsque le degré ν est écisément égal au module p. Tel était encore l'état de la question, moment où M. Serret a publié ses récentes recherches.

Dans son nouveau travail M. Serret s'occupe exclusivement des fonctions entières irréductibles suivant le module premier p, dont le degré est égal à p ou à une puissance quelconque de p. Son analyse repose sur la considération de la fonction

$$X_\mu \equiv x^{p^\mu} - \frac{\mu}{1} x^{p^{\mu-1}} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^{p^{\mu-2}} - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} x^{p^{\mu-3}} + \ldots$$
$$+ (-1)^{\mu-1} \frac{\mu}{1} x^p + (-1)^\mu x \pmod{p},$$

où μ désigne un indice quelconque; cette fonction satisfait à la congruence

$$X_{\mu+1} \equiv X_\mu^p - X_\mu \pmod{p}.$$

Nous nous bornerons à indiquer succinctement les résultats auxquels l'auteur est parvenu.

II.

Dans son premier article, M. Serret s'occupe de la recherche des fonctions entières du degré p, irréductibles suivant le module p. Désignant par V le produit de toutes ces fonctions, on a

$$V \equiv (X_1^{p-1} - 1)(X_2^{p-1} - 1)\ldots(X_{p-1}^{p-1} - 1) \pmod{p},$$

ce qui conduit naturellement à distinguer en différents *genres* les polynômes dont il s'agit. M. Serret nomme fonctions du $\lambda^{\text{ième}}$ genre celles dont le produit est égal à $X_\lambda^{p-1} - 1$, c'est-à-dire égal ou congru à

$$(X_\lambda - 1)(X_\lambda - 2)\ldots(X_\lambda - \overline{p-1}).$$

En particulier les fonctions entières du premier genre ont pour expression générale

$$x^p - x - g,$$

g désignant l'un quelconque des nombres $1, 2, 3, \ldots, p-1$. M. Serret avait déjà considéré ces fonctions du premier genre dans ses premières recherches.

auteur nous fait connaître une propriété importante qui sert actériser les fonctions d'un même genre quelconque.

l'on prend ici, pour *base* des imaginaires, une racine i de la ruence irréductible

$$i^p - i - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

ce théorème :

s racines des congruences obtenues en égalant à zéro les fonc- entières irréductibles suivant le module p, du degré p et du genre, sont exprimables par des fonctions entières de i dont gré est précisément égal à λ.

st en se fondant sur cette propriété que M. Serret a obtenu ression générale des fonctions irréductibles d'un genre quel- ie. Voici le théorème auquel il est parvenu :

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ *désignent des nombres entiers indéterminés ie, pour abréger l'écriture, on fasse* $a_k + a_{k-1} = a'_k$, *les s étant pris suivant le module p, de manière que* a_p *et* a_0 *sentent le même nombre, l'expression générale des fonctions es* $F(x)$ *de degré p, irréductibles suivant le module p,*

$$= - \begin{vmatrix} a_0 - x & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-3} & a_{p-2} & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a'_0 - x & a_1 & \ldots & a_{p-4} & a_{p-3} & a_{p-2} \\ a_{p-2} & a'_{p-1} & a'_0 - x & \ldots & a_{p-5} & a_{p-4} & a_{p-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_3 & a'_4 & a'_5 & \ldots & a'_0 - x & a_1 & a_2 \\ a_2 & a'_3 & a'_4 & \ldots & a'_{p-1} & a'_0 - x & a_1 \\ a_1 & a'_2 & a'_3 & \ldots & a'_{p-2} & a'_{p-1} & a'_0 - x \end{vmatrix}.$$

'on ne veut comprendre dans cette formule que les fonctions ^{me} *genre, on fera*

$$a_{\lambda+1} = 0, \quad a_{\lambda+2} = 0, \ldots, \quad a_{p-1} = 0,$$

si

$$a_{\lambda-1} = 0;$$

puis on donnera aux autres indéterminées les valeurs 0, 1, 2,..., $p-1$, *en exceptant toutefois la valeur zéro pour l'indéterminée* a_λ. *On obtiendra de la sorte les* $(p-1)p^{\lambda-1}$ *fonctions du* $\lambda^{\text{ième}}$ *genre.*

En particulier, on a :

1° pour $\lambda = 1$, $F(x) = x^p - x - a_1$,

2° pour $\lambda = 2$, $F(x) = (x-a_0)\left[(x-a_0)^{\frac{p-1}{2}} - a_2^{\frac{p-1}{2}}\right]^2 - a_1$.

Enfin, dans le $(p-1)^{\text{ième}}$ genre, M. Serret remarque les fonctions

$$F(x) = (x - a'_0)^p + a_{p-1}[(x-a'_0)^{p-1} - 1],$$

qui répondent au cas où les indéterminées $a_1, a_2, \ldots, a_{p-2}$ sont nulles, et qui ont cette propriété, que les racines de la congruence

$$F(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

sont des fonctions rationnelles fractionnaires et linéaires de l'une quelconque d'entre elles.

III.

Dans son second article, M. Serret considère les fonctions entières irréductibles dont le degré est une puissance quelconque du module p, et il fait connaître le mode de formation de ces fonctions.

Désignant par V_n le produit de toutes les fonctions entières de degré p^n, irréductibles suivant le module premier p, M. Serret trouve cette expression

$$V_n \equiv (X_{p^{n-1}}^{p-1} - 1)(X_{p^{n-1}+1}^{p-1} - 1)(X_{p^{n-1}+2}^{p-1} - 1)\ldots(X_{p^n-1}^{p-1} - 1) \pmod{p},$$

et, procédant comme dans le cas de $n = 1$, il répartit en divers genres les facteurs irréductibles de V_n. Il nomme *fonctions irréductibles du* $\lambda^{\text{ième}}$ *genre* celles dont le produit est congru à $X_{p^{n-1}+\lambda-1}^{p-1} - 1$, fonction qui se décompose immédiatement en $p-1$ facteurs $X_{p^{n-1}+\lambda-1} - g$, g ayant les valeurs 1, 2,..., $p-1$. Le

nombre λ, qui marque le genre, peut prendre les valeurs

$$1,\quad 2,\quad 3,\ldots,\quad (p-1)p^{n-1},$$

et le dernier genre, celui qui répond à $\lambda = (p-1)p^{n-1}$, est dit par l'auteur le *genre principal*.

Cela posé, et avant d'entrer dans le fond du sujet, M. Serret établit le théorème suivant :

Soit $F(x)$ *une fonction entière du degré* p^n, *irréductible suivant le module premier* p. *Si cette fonction appartient au* $\lambda^{ième}$ *genre supposé non principal, la fonction* $F(x^p - x)$ *ou* $F(X_1)$ *sera réductible, et elle se décomposera en* p *facteurs du degré* p^n, *irréductibles suivant le module* p *et appartenant au* $(\lambda+1)^{ième}$ *genre. Mais, si la fonction* $F(x)$ *de degré* p^n *appartient au genre principal, la fonction* $F(x^p - x)$ *sera elle-même irréductible suivant le module* p, *et elle appartiendra au premier genre des fonctions de degré* p^{n+1}.

Abordant ensuite le problème qu'il s'est proposé, l'auteur établit en premier lieu une règle générale pour former les fonctions entières, irréductibles du degré p^n et du premier genre. Nous nous bornerons ici à indiquer cette règle, dont la démonstration exige un certain développement.

Soit P_μ *une fonction entière et à coefficients entiers de* μ *quantités* $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$, *qui ne renferme aucune puissance de ces quantités au delà de la* $(p-1)^{ième}$, *et dans laquelle le terme* $i_1^{p-1} i_2^{p-1} \ldots i_\mu^{p-1}$ *figure avec un coefficient différent de zéro;* P_μ *se réduit à un simple nombre entier lorsque* $\mu = 0$. *Si l'on représente par*

$$F_n(X_1) \equiv 0 \pmod{p}$$

le résultat de l'élimination de $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ *entre les congruences*

$$i_1^p - i_1 \equiv P_0,\quad i_2^p - i_2 \equiv P_1,\quad \ldots,\quad i_{n-1}^p - i_{n-1} \equiv P_{n-2} \pmod{p},$$

et

$$X_1 \equiv P_{n-1} \pmod{p},$$

$F_n(X_1)$; *ou, ce qui revient au même,* $F_n(x^p - x)$ *sera l'expression générale des fonctions entières de degré* p^n *et du premier genre, irréductibles suivant le module p.*

Il faut remarquer que l'on peut, sans diminuer la généralité du résultat, attribuer telles valeurs que l'on veut aux coefficients des fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_{n-2}$; la seule restriction à observer est que le coefficient de $i_1^{p-1} i_2^{p-1} \ldots i_\mu^{p-1}$ dans P_μ ne soit pas nul.

Il n'y a donc pas, dans $F_n(X_1)$, d'autres arbitraires que celles qui figurent dans P_{n-1}. Le nombre de celles-ci est p^{n-1}; mais M. Serret prouve que, pour l'élimination qu'il a en vue, on peut faire disparaitre $n-1$ d'entre elles, en sorte qu'il n'existe en réalité que $p^{n-1} - n + 1$ coefficients indéterminés. Ces coefficients peuvent recevoir les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$, à l'exception de l'un d'eux, qui ne peut être nul; il s'ensuit que le nombre des fonctions $F_n(X_1)$ est $(p-1)p^{p^{n-1}-n}$, ce qui résulte *a priori* de l'expression de V_n donnée plus haut.

Si l'on ne veut chercher qu'une seule fonction entière irréductible du degré p^n, le plus simple sera en général de réduire P_{n-1} au seul terme qui doit y figurer nécessairement, ou à ce terme augmenté d'une constante

Par exemple, dans le cas de $n = 2$, on posera

$$i_1^p - i_1 \equiv 1, \quad X_1 \equiv i_1^{p-1} - 1 \equiv \frac{1}{i_1} \pmod{p}.$$

Le résultat de l'élimination de i_1 entre ces deux congruences est

$$X_1^p + X_1^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

en conséquence, $X_1^p + X_1^{p-1} - 1$ ou $(x^p - x)^p + (x^p - x)^{p-1} - 1$ est une fonction irréductible du degré p^2 et du premier genre.

M. Serret fait encore l'application de sa règle au cas de $n = 3$. Il pose

$$i_1^p - i_1 \equiv 1, \quad i_2^p - i_2 \equiv i_1^{p-1} - 1 \equiv \frac{1}{i_1}, \quad X_1 \equiv i_1^{p-1} i_2^{p-1} - 1 \pmod{p}.$$

Le résultat de l'élimination de i_1, i_2 est

$$(X_1 + 1)^3 X_1 P^{p-2} - (X_1 + 1)^2 X_1 Q - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$P = X_1(X_1+1)(X_1^p + X_1^{p-1} - 1),$$

$$Q = X_1^{p-3} + \frac{4}{2}X_1^{p-5}P + \ldots + \frac{(\mu+2)(\mu+3)\ldots 2\mu}{2.3\ldots\mu}X_1^{p-2\mu-1}P^{\mu-1} + \ldots$$
$$+ \frac{\left(\frac{p-1}{2}+2\right)\ldots(p-1)}{2.3\ldots\frac{p-1}{2}}P^{\frac{p-3}{2}}.$$

Le premier membre de la congruence précédente est une fonction entière irréductible du degré p^3 et du premier genre.

Après avoir traité avec détail le cas des fonctions entières irréductibles de degré p^n et du premier genre, M. Serret s'occupe des fonctions des divers genres. Le produit des fonctions d'un même genre quelconque peut être représenté par

$$X_\mu^{p-1} - 1,$$

l'indice μ ayant l'une quelconque des valeurs

$$p^{n-1},\quad p^{n-1}+1,\quad p^{n-1}+2,\ldots,\quad p^n-1.$$

Voici la règle obtenue par M. Serret pour former les diviseurs irréductibles de la fonction $X_\mu^{p-1} - 1$.

L'indice μ étant mis sous la forme

$$\mu = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \ldots + \alpha_{n-1}p^{n-1},$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ sont des entiers positifs ou nuls et inférieurs à p, désignons par ξ_0 un entier arbitraire, et posons généralement

$$\xi_{k+1} = a_0^{(k)} + a_1^{(k)} i_{k+1} + a_2^{(k)} i_{k+1}^2 + \ldots + a_{\alpha_k - 1}^{(k)} i_{k+1}^{\alpha_k - 1} + i_{k+1}^{\alpha_k},$$

où $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \ldots$ sont des fonctions entières de $i_1, i_2, \ldots, i_k$ du degré $p-1$ au plus, et se réduisent à des entiers dans le cas de $k=0$; la quantité ξ_{k+1} doit elle-même être réduite à l'unité dans le cas de $\alpha_k = 0$. Soit aussi P_k une fonction entière de i_1, $i_2, \ldots, i_k$ du degré $p-1$ par rapport à chacune de ces quantités, et qui n'est assujettie qu'à la seule condition que le terme

ité ressentis de la manière la plus heureuse dans les an-ovinces polonaises, où elle a contribué à stimuler le mou-ientifique et à révéler les hommes de talent, est due en rtie à la généreuse initiative du Président actuel de la A. le comte Działyński, qui a bien voulu prendre à sa frais considérables de ces publications. A. POTOCKI.

I.

SKI (W.). — *Sur l'élasticité des corps solides homo-* 5 p.)

orie mathématique de l'élasticité, dont les bases ont été r les plus célèbres géomètres de notre temps, et qui est lans un avenir plus ou moins lointain, à expliquer tous nènes de la Physique, est envisagée ici à un point de vue fférent de celui qu'on a adopté jusqu'à ce jour, et traitée téthode nouvelle.

initions de l'homogénéité et des forces élastiques, ainsi ation des moments, qui sert de point de départ à la re-les lois fondamentales de l'élasticité, sont établies avec et une précision qui facilitent beaucoup l'intelligence des qui en découlent. Nous ne les reproduirons pas ici pour p allonger notre article, et nous nous bornerons à donner on des corps homogènes des divers ordres.

ps homogènes du *premier ordre* sont ceux dans lesquels nations élémentaires, ainsi que les forces élastiques, sont ons des dérivées du premier ordre $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ seulement issements u, v, w des coordonnées x, y, z de l'élément, déformation, les dérivées d'ordres supérieurs n'y entrant s déformations dépendent, en outre, des dérivées secondes $\frac{\ldots v)}{\ldots)^2}$, les corps seront dits homogènes *du second ordre*, et uite. En général, un corps sera homogène du $n^{\text{ième}}$ *ordre* s déformations et les forces élastiques auront des expres-a forme

$$F\left[\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}, \frac{d^2(u, v, w)}{d(x, y, z)^2}, \ldots, \frac{d^n(u, v, w)}{d(x, y, z)^n}\right].$$

Le présent travail a surtout en vue les corps homogènes du premier ordre; quelques pages seulement sont consacrées à l'étude de ceux d'ordre supérieur.

La plus grande partie des résultats de la théorie est obtenue par la considération des déformations, abstraction faite des forces qui les produisent. Les neuf dérivées représentées par le symbole $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, et dont dépendent les déformations, étant considérées comme des paramètres, conduisent à un *ellipsoïde de déformation*, analogue à l'ellipsoïde d'élasticité, et à une *droite de déformation*. En combinant entre eux ces paramètres, on parvient à des ellipsoïdes et à des droites d'ordre supérieur, dont la considération peut conduire à l'explication de certains phénomènes dans les corps élastiques.

La considération du travail mécanique élémentaire fournit aussi des résultats remarquables, parmi lesquels nous citerons en passant celui-ci, que les dérivées partielles de la pression P, par rapport aux quantités $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, expriment les forces élastiques correspondantes.

Dans le cas des corps homogènes triaxiques du premier ordre, les équations fondamentales de cette théorie conduisent aux équations qui expliquent les lois de la propagation de la lumière dans les cristaux biréfringents, et à celles qui représentent la loi de la propagation de la chaleur dans les corps solides, telles qu'elles ont été établies par Lamé dans sa *Théorie analytique de la Chaleur*, par la considération de la conductibilité. Ce dernier résultat est surtout important : il établit une liaison entre l'élasticité des corps et leur conductibilité pour la chaleur.

Dans le cas des corps homogènes du troisième ordre, on obtient de même les équations qui expliquent la dispersion de la lumière et la rotation du plan de polarisation. Dans ce dernier cas, en désignant par α l'angle de torsion, on a

$$\alpha = -\frac{2\pi^2 b(z - z_0)}{al^2},$$

résultat conforme aux lois expérimentales de Biot, savoir : que

l'angle de torsion est proportionnel à l'épaisseur $z - z_0$ du corps, et en raison inverse du carré de la longueur d'onde l.

En tenant compte des infiniment petits d'ordre supérieur dans l'expression de la vitesse de propagation des rayons lumineux, on parvient à ce résultat, que la rotation du plan de polarisation est toujours accompagnée de la dispersion; seulement cette dernière est extrêmement petite.

Gosiewski (W.). — *Des fonctions simultanées de même espèce.* (32 p.)

Soient u, v, w trois fonctions simultanées et de même espèce des quatre variables x, y, z, t, dont les trois premières sont aussi de même espèce. Supposons que u, v, w représentent les déformations d'un élément élastique, dont les coordonnées soient x, y, z, et que t soit le temps. Les fonctions de cette nature jouent un grand rôle dans la théorie de l'élasticité.

Si l'on excepte quelques mots qui leur sont consacrés dans les *Leçons sur la théorie de l'Élasticité,* de Lamé, nous ne connaissons aucune étude spéciale sur ces fonctions. Le présent travail a pour objet l'étude des propriétés géométriques et analytiques de ces fonctions et de leurs dérivées partielles. La considération de ces dérivées et de leurs combinaisons comme paramètres d'ellipsoïdes et de droites de divers ordres, dont il a été déjà question plus haut, permet d'établir plusieurs théorèmes curieux, applicables aux lois des mouvements intérieurs des corps élastiques, mais dont le détail nous entrainerait hors des limites imposées à cet article. Nous nous bornerons à faire remarquer que, en considérant trois variables seulement, on est conduit au théorème général que voici :

Soient $V_1, V_2, \ldots, V_n$, *n fonctions continues simultanées et de même espèce de n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Pour que toutes les dérivées* $\frac{d(V_1, V_2, \ldots, V_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ *de ces fonctions aient des valeurs finies et déterminées, il faut que les fonctions données soient les dérivées partielles d'une même fonction* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *finie et déterminée.*

Après avoir établi les propriétés des dérivées $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, l'auteur étudie les propriétés de leurs fonctions, lesquelles, dans le cas où

x, y, z sont de même espèce, peuvent toujours être ramenées à des fonctions de six paramètres de l'ellipsoïde correspondant, et il examine en particulier les polynômes homogènes entiers du deuxième et du troisième degré par rapport à ces paramètres.

Dans le cas des coefficients indépendants de u, v, w, un polynôme de cette classe (du deuxième degré) exprime le travail élémentaire des forces élastiques dans les corps homogènes dont la nature ne varie pas avec leur mouvement intérieur.

En considérant le travail mécanique élémentaire comme exprimé par un polynôme dont les coefficients sont eux-mêmes des fonctions de u, v, w, la théorie de l'élasticité se trouvera étendue aux corps qui changent de nature sous l'action des forces intérieures, et l'étude appropriée de ces polynômes pourra servir de point de départ aux recherches mathématico-chimiques, et permettra peut-être de vérifier si la cause des phénomènes chimiques est la même que celle de beaucoup d'autres phénomènes de la nature, c'est-à-dire le mouvement.

Żmurko (W.). — *Démonstration du théorème de Hesse, relatif aux déterminants fonctionnels.* (4 p.)

Żmurko (W.). — *Contribution à la théorie des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables.* (8 p.)

Ce Mémoire a été publié, en allemand, dans le Recueil des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Vienne,* pour l'année 1866.

Franke (J.-N.). — *Relations projectives des projections des systèmes géométriques.* (8 p.)

Trzaska (W.). — *Quelques propriétés des fonctions d'une variable imaginaire.* (3 p.)

L'auteur donne deux démonstrations, l'une géométrique et l'autre analytique, du théorème suivant, énoncé sans démonstration par M. Dewulf, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2e série, t. I, p. 156; 1862 :

« Soient $w = u + iv$ une fonction monodrome et monogène; une courbe fermée $f(x, y) = 0$ dans le plan horizontal des indices de z; un cylindre vertical qui a $f(x, y) = 0$ pour base; deux plans verticaux P et P′ rectangulaires. Supposons que w ne devienne ni nulle ni infinie dans l'intérieur de $f(x, y) = 0$, et que l'indice de z parcoure $f(x, y) = 0$. Sur chaque génératrice (x, y) du

rlindre portons, à partir de la base, les longueurs u et v correspon-ıntes, nous obtiendrons ainsi deux courbes U et V. L'aire de la rojection de U ou de V sur le plan P est égale à l'aire de la pro-ction de V ou de U sur le plan P'. »

Il établit, en outre, les deux propositions suivantes :

1° Les aires de U et de V ayant une projection commune sur le ıan de $f(x, y) = 0$ sont égales.

2° Les projections sur P des aires de U et de V ayant une pro-ction commune sur le plan de $f(x, y) = 0$ sont respectivement ;ales aux projections correspondantes des aires de V et de U sur P'.

Trzaska (W.). — *Une application des déterminants fonction-els.* (9 p.)

Étant données n fonctions de m variables indépendantes, il est ›uvent utile de chercher s'il existe entre ces fonctions des rela-ons indépendantes des variables. Ce problème, dont la solution rdinaire consiste dans l'élimination, peut être résolu à l'aide du ıéorème suivant :

« Pour que les n fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des m variables indé-endantes $z_1, z_2, \ldots, z_m$ satisfassent à p relations indépendantes de :s variables, il faut et il suffit qu'il y ait $n-p$ fonctions, telles ue leur déterminant fonctionnel de degré $n-p$,

$$\frac{d(u_1, \ldots, u_{n-p})}{d(z_1, \ldots, z_{n-p})},$$

ar rapport à $n-p$ des variables z_k, soit différent de zéro, et que :s $p(m-n+p)$ déterminants fonctionnels du degré $n-p+1$,

$$\frac{d(u_1, \ldots, u_{n-p}, u_i)}{d(z_1, \ldots, z_{n-p}, z_k)}, \quad (n-p+1 \leq i \leq n), \quad (n-p+1 \leq k \leq n),$$

›ient identiquement nuls pour toutes les valeurs des variables z_k. ;e théorème n'a lieu que pour $m > n-p > 0$. »

M. Trzaska donne deux démonstrations de ce théorème.

Trzaska (W.). — *Tracer sur une sphère un cercle tangent à rois cercles donnés sur cette sphère.* (10 p.)

Plusieurs Géomètres, entre autres Gergonne [1], ont donné des

[1] *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, t. IV, VII et XIII.

Désignons par $\left(\frac{P_1}{P_\mu}\right)$ l'opération de la permutation de $x_1, x_2, \ldots,$ x_m en $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\nu$ ($\alpha, \beta, \ldots, \nu$ étant les nombres $1, 2, \ldots, m$, groupés dans un ordre quelconque).

Soit un arrangement P_1 de m quantités, et une permutation $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$ conduisant à l'arrangement P_2. En appliquant à ce dernier la même opération, on obtient l'arrangement P_3, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un arrangement P_l, qui reproduise, par la même opération, l'arrangement primitif P_1. Les arrangements tels que $P_1, P_2, \ldots, P_l$ jouissent de cette propriété, que l'une quelconque des opérations $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$, $\left(\frac{P_1}{P_3}\right), \ldots, \left(\frac{P_1}{P_l}\right)$, appliquée à l'un quelconque de ces arrangements, les reproduit tous dans un ordre différent. Les arrangements $P_1, \ldots, P_l$ seront dits *inséparables par rapport à* $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$, et les opérations $\left(\frac{P_1}{P_2}\right), \ldots, \left(\frac{P_1}{P_l}\right)$ seront les permutations *déterminées* par $P_1, P_2, \ldots, P_l$.

Les arrangements inséparables jouissent donc de la propriété que l'application de l'une quelconque des permutations qu'ils déterminent ne change ni leur nombre ni leur nature; mais, étant donnés l arrangements jouissant de cette propriété, on ne peut pas toujours affirmer réciproquement qu'ils soient inséparables. Il peut arriver, au contraire, que, parmi les permutations déterminées, il s'en trouve un certain nombre ($< l$), avec lesquelles on pourra reproduire tous les arrangements. Ces permutations ont cette propriété, que les arrangements inséparables par rapport à chacune d'elles ont un arrangement commun. Ces arrangements sont dits *invariables* par rapport aux permutations qu'ils déterminent.

Cela posé, on peut établir les théorèmes suivants :

1° *Une fonction de m variables indépendantes, qui ne change pas de valeur par suite de la permutation* $\left(\frac{P_1}{P_\mu}\right)$, *a une seule valeur pour tous les arrangements de* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *inséparables par rapport à* $\left(\frac{P_1}{P_\mu}\right)$.

2° Théorème de Lagrange. — *Le nombre des valeurs différentes d'une fonction de m variables indépendantes est un diviseur du nombre m!.*

3° *Les valeurs égales d'une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ correspondent aux arrangements invariables par rapport aux permutations qu'ils déterminent.*

Tels sont les principaux résultats de ce travail. Nous passons sous silence plusieurs théorèmes relatifs aux permutations définies plus haut.

TRZASKA (W.). — *Remarques sur les fonctions complexes à plusieurs caractéristiques.* (12 p.)

Une fonction complexe d'une seule variable à n caractéristiques, qui admet un nombre fini ou infini de déterminations différant entre elles de quantités finies, pour chaque valeur de la variable, et qui n'est constante pour aucune de ces déterminations, ne peut avoir plus de n périodes *distinctes*, c'est-à-dire de périodes telles qu'aucune d'elles ne puisse s'obtenir par l'addition ou la multiplication des autres. M. Trzaska donne une démonstration géométrique de ce théorème, d'abord pour $n = 2$, puis pour $n = 3$.

TRZASKA (W.). — *Démonstration d'un théorème relatif aux fonctions complexes à n caractéristiques.* (7 p.)

Une fonction complexe de m variables indépendantes à n caractéristiques, qui admet un nombre fini ou infini de déterminations différant entre elles de quantités finies, pour chaque système de valeurs des variables, et qui n'est constante pour aucune de ces déterminations, ne peut avoir plus de mn périodes distinctes.

Dans ce théorème, ainsi que dans le précédent, on admet que les quantités à n caractéristiques satisfont aux lois de l'addition algébrique.

KUCHARZEWSKI (F.). — *Sur l'Astronomie en Pologne. Matériaux pour servir à l'histoire de cette science.* (106 p.)

T. III; 1873.

FOLKIERSKI (W.). — *Sur les équations simultanées aux dérivées partielles.* (30 p.)

Ce travail se divise en deux Parties. La première a pour objet les équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, dans le cas où le nombre des variables indépendantes est supérieur de plus d'une unité au nombre des équations. En appliquant les méthodes de Jacobi à ce problème considéré à un point de vue général,

démontre quelques théorèmes qui permettent de le ré-
lans tous les cas où cette solution peut être ramenée aux
ıs différentielles ordinaires. Les résultats s'accordent avec
ɛ Clebsch a obtenus ([1]) par une voie un peu différente. Dans
de Partie, les résultats obtenus pour le cas des équations
ıier ordre sont appliqués à celui des équations du second
ue l'auteur traite par la méthode d'Ampère.

ER (W.). — *La turbine de Fourneyron. Théorie rigou-
théorie approchée de cette machine.* (36 p.)

ARZEWSKI (F.). — *Exposition et analyse des travaux de
rice* LEVY, *sur la théorie du mouvement rectiligne des li-
et son application au mouvement de l'eau dans les tuyaux
'uite.* (46 p.)

ISKI (F.). — *Sur l'atomicité dès noyaux avec un aperçu
ɪouvelles théories chimiques.* (95 p.)

.WSKI (W.). — *Contribution à la théorie des forces vives.*

ɜur donne une nouvelle expression de la somme des forces
ın système de points matériels, expression qui renferme un
.e de Coriolis ([2]), et donne en outre la somme des forces
rrespondant à la *déformation* du système.
isant des applications de cette dernière expression, qui est

$$\frac{\Sigma mm'\left(\frac{dR}{dt}\right)^2}{\Sigma m}$$

t la distance des deux points matériels m, m'), l'auteur ob-
; deux propositions suivantes :
ı force vive due à l'allongement ou au raccourcissement d'un
ıque extensible est égale au douzième de la masse du fil mul-
ɔar la vitesse d'allongement ou de raccourcissement.

ɪer *die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen.*
lt's Journal, Bd. 65; 1865.) — M. Folkierski annonce que son travail est anté-
publication de celui de Clebsch.

r STURM, *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique,* t. II, p. 356.

2° Une particule infiniment petite de matière continue peut être considérée comme un système de quatre points matériels.

MARTYNOWSKI (A.). — *Théorie de la pression des liquides sur des parois planes ou courbes.* 1re Partie : Parois planes. (135 p.)

A. P.

Liste des Ouvrages scientifiques polonais édités par M. le comte Działyński, président de la *Société des Sciences exactes, à Paris,* jusqu'au 19 février 1873.

NIEWĘGŁOWSKI (G.-H.), professeur d'Analyse à l'École supérieure Polonaise, examinateur au Lycée Saint-Louis, à Paris. — *Arytmetyka z teoryą przybliżeń liczebnych.* (Arithmétique, avec la théorie des approximations numériques.). In-8, 352 pages.

— *Geometryi część I. Geometrya płaska.* (Géométrie, 1re Partie. Géométrie plane). 2e édition. 1868, in-8, 436 pages, figures dans le texte.

— *Geometryi część I i II.* (Géométrie, 1re et 2e Partie). Cours complet, 2e édition, contenant la Géométrie des anciens et les méthodes de la Géométrie moderne. 1868, in-8, VIII-778 pages.

— *Trygonometrya prostolinijna i sferyczna z teoryą ilości urojonych i z notami.* (Trigonométrie rectiligne et sphérique, avec la théorie des quantités imaginaires et des notes). 1870, in-8, XV-407 pages.

— *Mechanika rozumowa.* (Mécanique rationnelle, en 2 tomes). Tome Ier, Statique. 1873, in-8, 512 pages, figures. Prix : 10 fr.

FOLKIERSKI (Wł.), ingénieur civil, licencié ès sciences, professeur de Mécanique à l'École supérieure Polonaise. — *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami.* (Éléments du Calcul différentiel et du Calcul intégral, avec des applications). Tome I : Calcul différentiel, avec une Note de M. Trzaska, sur les déterminants, 1870, in-8, XLIII-1087 pages, 136 figures dans le texte. — Tome II : Calcul intégral, 1re Partie, intégration des différentielles, etc. 1873, in-8, XVI-752 pages, 76 figures.

KUCHARZEWSKI (F.) et KLUGER (W.), ingénieurs civils, anciens

élèves de l'École des Ponts et Chaussées. — *Wykład Hydrauliki.* (Traité d'Hydraulique). 1873, LVI-1018 pages, 110 figures dans le texte. Prix : 20 fr.

Gosiewski (W.), professeur de Physique mathématique, à Lemberg. — *Wykład mechaniki cząsteczkowéj* (molekularnéj). (Traité de Mécanique moléculaire.) Tome Ier, 1re livraison. 1873, in-8, 176 pages. Prix : 4 fr.

Sągajło (A.), professeur de Mathématiques. — *Wykład zupełny Algebry.* (Traité complet d'Algèbre, en quatre volumes). Tome Ier, Éléments d'Algèbre. 1873, in-8, 632 pages, figures. Prix : 5 fr. 50 c.

Żebrawski (Dr Theofil), membre de l'Académie des Sciences de Cracovie. — *Bibliografia Piśmiennictwa Polskiego z działu Matematyki i Fizyki oraz ich zastosowań.* (Bibliographie de la littérature polonaise relative aux Sciences mathématiques et physiques et à leurs applications). Cracovie, 1873, in-8, 617 pages, 4 planches. Prix : 3 thalers.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Annuaire météorologique et agricole de l'Observatoire de Montsouris, pour l'an 1874. — Paris, Gauthier-Villars. In-18, 272 p. 2 fr.

Bourget (J.) et Housel (Ch.). — Traité de Géométrie élémentaire, à l'usage des aspirants aux Écoles du Gouvernement. — Paris, Hachette; 1874. Petit in-8°, 382 p., 348 fig. dans le texte. 5 fr.

Dubois (E.), Examinateur-Hydrographe de la Marine. — Les passages de Vénus sur le disque solaire, considérés au point de vue de la détermination de la distance du Soleil à la Terre. Passage de 1874. Notions historiques sur les passages de 1761 et 1769. — Paris, Gauthier-Villars, 1873. In-18, XII-245 p. 3 fr. 50

Flammarion (C.), Astronome, Membre de plusieurs Académies, etc. — Études et lectures sur l'Astronomie, Tome IV. — Paris, Gauthier-Villars, 1873. In-18, XII-336 p., 33 figures astronomiques. 2 fr. 50

HILL (C.-J.-D.). — *Deo favente, Matheseos fundamenta nova analytica. Pars Ima, Mathesin universalem, in usum prælectionum, comprehendens. Pars IIda, Theoriam differentiarum et derivatorum generaliorum, una cum variis binomii consectariis comprehendens. — Calculi differentialis et integralis regulæ generales. — Computatio functionum hyperbolicarum per differentias. — De functionibus rationaliter logarithmicis integrandis, et speciatim de derivatis Lammatum. — Tabula functionis Lamma ejusque derivatæ. — Londini Gothorum,* 1860-1868. — Paris, Gauthier-Villars. — 2 fascicules in-4, 226-286 p. 12 fr.

— Tables arithmétiques correctes. *Felfria Räkne-Tabeller, angifvande tals factorer, producter, reciproker, potenser, visare (indices) och logarithmer. — De proprietate seriei harmonicæ, cum quadam hujus tabula.* — Lund et Stockholm, 1828-1867. — Paris, Gauthier-Villars. — Ensemble 56 p. in-4. 2 fr.

INSTRUCTION sur les Paratonnerres, adoptée par l'Académie des Sciences. 1re *Partie,* 1823, M. GAY-LUSSAC rapporteur; 2e *Partie,* 1854, M. POUILLET rapporteur; 3e *Partie*, 1867, M. POUILLET rapporteur. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-12, 143 p., 58 figures dans le texte, 1 planche en taille-douce. 2 fr. 50

PONCELET (J.-V.). — Cours de Mécanique appliquée aux Machines, publié par M. X. KRETZ, Ingénieur en chef des Manufactures de l'État. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-8°, XXII-520 p., 127 figures dans le texte, 2 planches en taille-douce. 12 fr.

RADAU (R.). — Tables barométriques et hypsométriques pour le calcul des hauteurs, précédées d'une instruction sur l'usage des Tables. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-12, 24 p. 1 fr.

RAPISARDI (Fr.) — Elementi di Geometria. — Catania, 1874. In-8°, 459 p., 350 fig. dans le texte. 8 fr.

TAIT (P.-G.). — An Elementary Treatise on Quaternions. Second edition, enlarged. — Oxford, Clarendon Press, 1873. In-8°, XX-296 p. 12 s. 6 d.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

TAIT (P.-G.), M. A., professor of Natural Philosophy in the University of Edinburgh. — AN ELEMENTARY TREATISE ON QUATERNIONS. Second edition, enlarged. — Oxford, Clarendon Press; 1873. 1 vol. in-8°, XX-296 p.

KELLAND (P.), M. A, F. R. S, & TAIT (P.-G.), M. A., professors in the Department of Mathematics in the University of Edinburgh. — INTRODUCTION TO QUATERNIONS, WITH NUMEROUS EXAMPLES. — London, Macmillan & Co.; 1873. — 1 vol. petit in-8°, XI-227 p.

La méthode des quaternions constitue un procédé d'Analyse géométrique, inventé, comme on sait, par sir William-Rowan Hamilton, qui en a exposé pour la première fois la théorie complète dans ses *Lectures on Quaternions* (1). Cette découverte ne semble pas avoir attiré l'attention d'un grand nombre de géomètres sur le continent; les seuls travaux que nous connaissions sur ce sujet, en dehors des travaux anglais, sont des expositions sommaires de la théorie, dues à MM. Bellavitis (1858), Allégret (1862), Hankel (1867).

Cependant cette méthode, comme les autres méthodes géométriques, a ses avantages aussi bien que ses inconvénients, suivant la nature de la question que l'on veut traiter, et il en est de son usage comme de celui de tous les systèmes de coordonnées, rectilignes ou curvilignes, ponctuelles ou tangentielles, etc.

Ce qui distingue toutefois ce mode de détermination des autres, c'est que, opérant sur des éléments plus complexes, il donne lieu à des opérations moins simples, qui ne présentent pas les mêmes propriétés générales que les opérations de l'Algèbre ordinaire. De là la nécessité d'introduire certaines modifications dans les règles du calcul, notamment dans tout ce qui se rapporte à la multiplication et aux opérations qui en dépendent. La nouvelle Algèbre ainsi constituée exige, dans la pratique, de plus grandes précautions et une attention plus soutenue. En revanche, elle admet de nouveaux symboles d'opérations dont l'usage permet de traiter certains problèmes importants avec une merveilleuse facilité. D'ailleurs, au point de

(1) Dublin, 1853; 1 vol. in-8°, 64-LXXII-736 p.

vue de l'Analyse pure, elle pourra dans
encore inexplorées, et qui conduiront pe
blèmes, ou à des solutions plus simples d

C'en était assez déjà pour que les c
n'aient pas cru devoir laisser dans l'ou
conde, et dont on ne saurait trop admir
L'édition des *Lectures* se trouvant épuis
dernières années de sa vie à la rédaction
étendu que le premier ([1]); la mort le su
de l'impression, qui a été achevée par les

Hamilton, comme la plupart des gran
préoccupé, surtout dans son premier O
portée des intelligences ordinaires. Ses
tables encyclopédies mathématiques, dan
méthode, sans s'assujettir à un plan nette
les plus diverses, à mesure que le dévelo
en fournit l'occasion. Aussi bien peu d
sol britannique, ont eu le courage de pous
ration de ces riches mines scientifiques.
ayant pu profiter des leçons et des enco
sont approprié la méthode, et l'emploien
dans les recherches les plus compliquée
matique.

Parmi ces disciples zélés, il faut citer e
ancien fellow de St.-Peter's College, à C
professeur de Physique à l'Université d'Éd
doit le premier Traité classique, à la fois c
ait été composé sur cette branche des Ma
édition de son Livre, dont les matériaux
temps, mais dont la publication fut ret
qu'Hamilton avait exprimé de faire par
ments, porte la date de 1867. L'accueil e
a reçu, tant en Angleterre qu'en Amériqu
testable du talent de l'auteur et de la bont
dernière, M. Tait a dû procéder à une se

([1]) *Elements of Quaternions.* London, 1866; 1 vol.
([2]) 2 septembre 1865.

profité pour apporter à son Livre plusieurs améliorations, en faisant disparaitre quelques erreurs typographiques, et donnant un plus grand développement aux deux derniers Chapitres.

Donnons un aperçu rapide du contenu de cet excellent Traité.

Dans le Chapitre I, l'auteur établit les premières bases du nouveau calcul, en définissant l'addition et la soustraction des droites dirigées ou *vecteurs,* qui déterminent les translations d'un système parallèlement à lui-même; ces opérations correspondent à la composition et à la décomposition des translations.

Il considère ensuite, dans le Chapitre II, l'opération qui change à la fois la grandeur et la direction d'un vecteur, et que l'on assimile à la multiplication du vecteur par un symbole appelé *biradiale*. L'expression analytique de ce symbole a reçu le nom de *quaternion,* parce qu'elle résulte de l'addition de quatre termes, rapportés à quatre unités irréductibles entre elles. L'auteur expose les règles de calcul algébrique relatives à la multiplication et à la division des quaternions, comprenant, comme cas particuliers, les règles relatives aux vecteurs.

Le Chapitre III contient diverses transformations de formules, avec leur interprétation géométrique. On voit, par les exemples traités, la correspondance qui existe entre chaque opération de calcul et un mouvement d'une figure, de sorte que chaque équation fait image, et parle, pour ainsi dire, aux yeux.

Le Chapitre IV a pour objet la différentiation des fonctions de quaternions, opération qui n'a plus la même simplicité que dans le cas des quantités complexes ordinaires. L'auteur y définit le symbole différentiel ∇, une des plus ingénieuses découvertes d'Hamilton, et dont l'emploi a permis d'étendre aux quaternions l'opération de l'intégration, tant simple que multiple. Si $F(\rho)$ est une fonction du vecteur $\rho = ix + jy + kz$, dont la valeur soit toujours égale d'un nombre réel, ce symbole ∇ représente l'opération

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},$$

i, j, k étant les trois unités imaginaires, correspondant à trois directions orthogonales fixes. Le vecteur exprimé par $\nabla F(\rho)$ est la normale à la surface au point (x, y, z), et la différentielle $dF(\rho)$

prime immédiatement à l'aide de la fonction φ, des propriétés de laquelle elle donne une représentation physique. M. Tait traite encore de la combinaison des dilatations avec les rotations, et des propriétés des moments d'inertie.

Le Chapitre XI et dernier, le plus intéressant du Livre, a pour titre : *Applications physiques*. Voici le sommaire des diverses sections : Équilibre et mouvement d'un système rigide. Mouvement du pendule simple ; pendule de Foucault. Surfaces réfléchissantes. Théorie de la double réfraction de Fresnel, surface des ondes, etc. Électrodynamique. Applications physiques de l'opérateur ∇ : déplacement des groupes de points ; intégrales doubles et triples ; calcul des variations, etc.

Chaque Chapitre est terminé par un recueil de questions, proposées au lecteur comme exercices.

Malgré son titre de *Traité élémentaire*, il ne faudrait pas croire que le Livre de M. Tait fût d'une lecture courante. Tel n'a pas été d'ailleurs le but de l'auteur, et, dans l'intérêt même des étudiants, il n'a pas voulu leur frayer un *chemin royal*, bon pour ceux qui ne visent qu'à atteindre le plus vite possible un but déterminé, mais impropre à donner cette souplesse d'esprit et cette largeur de vues, que l'on ne peut acquérir que par un labeur personnel. Il avoue cependant que la difficulté des premiers Chapitres pourrait bien rebuter quelques commençants, et c'est en faveur des travailleurs moins intrépides qu'il a collaboré, avec son collègue M. Kelland, à la rédaction du Livre vraiment élémentaire que nous annonçons en second lieu.

Le plan général de cet Abrégé ne diffère guère de celui des premiers Chapitres du précédent Ouvrage. Seulement toutes les parties qui exigent l'emploi des calculs transcendants sont omises. Voici les titres des Chapitres :

I. Introduction.
II. Addition et soustraction des vecteurs.
III. Multiplication et division des vecteurs.
IV. La ligne droite et le plan.
V. Le cercle et la sphère.
VI. L'ellipse.
VII. La parabole et l'hyperbole.
VIII. Les surfaces à centre du second ordre.

IX. Formules, avec leurs applications.

X. Équations du premier degré entre des vecteurs.

Comme dans le *Elementary Treatise,* les divers Chapitres de l'Abrégé sont suivis d'un recueil de questions à résoudre. Les solutions détaillées des plus difficiles et des plus intéressantes sont données dans un *Appendice* placé à la fin du volume. J. H.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN (¹).

T. LXXIX; n°s 1873-86; 1871-72.

D'Arrest. — *Sur la position de la raie* D_3 *dans le spectre des protubérances.*

Désignons par H_α, H_β, H_γ, H_δ les quatre raies de l'hydrogène; on sait que les protubérances donnent toujours H_α et H_β avec une certaine raie D_3 d'origine inconnue; quant à H_γ et H_δ, elles n'apparaissent que très-exceptionnellement. Bien que D_3 n'appartienne pas au système des raies de l'hydrogène, M. d'Arrest pense qu'elle a avec elle quelque rapport de parenté. Or le tableau des nombres de vibrations donne à première vue l'équation très-simple

$$D_3 - H_\alpha = \frac{1}{3}(H_\beta - H_\alpha).$$

D'ailleurs, ce même tableau donne encore

$$\log H_\gamma - \log H_\delta = \frac{1}{3}(\log H_\beta - \log H_\delta),$$

de sorte que l'on arrive à ce résultat très-singulier, qu'il existe entre les nombres de vibrations de D_3, H_α et H_β la même relation numérique qu'entre les logarithmes de ces mêmes nombres pour H_γ, H_δ et H_β.

Il semble exister des relations de même nature entre les raies brillantes auxquelles se réduisent respectivement certaines nébuleuses.

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 87.

PETERS (C.-H.-F.). — *Éphéméride pour l'opposition de Ianthe en* 1872. (Angl.)

LORENZONI (G.). — *Sur les raies spectrales f et h de la chromosphère.* (Ital.)

On a vu (*Bulletin,* t. V, p. 182) que M. Lorenzoni, en plaçant ıvenablement la fente du spectroscope, avait réussi à apercevoir tement, en outre des cinq raies dont nous venons de parler, la e *f* (4484 Å) qu'il considère comme nouvelle. M. d'Arrest a fait ıarquer ensuite que cette raie avait déjà été aperçue dans deux ou is circonstances particulières. M. Lorenzoni répond que les disitions de son appareil lui permettent de la voir *constamment* en in soleil et sur tous les points du disque. Elle est surtout visible ıs une zone comprise entre 25 et 155 degrés de distance polaire éale héliographique. Elle s'affaiblit près des pôles, ce qui pour: bien tenir à une moindre intensité dans la température de la omosphère : de même, pour la raie *h* ou H_δ.

BRUHNS (C.). — *Éphéméride de Bellone, pour l'opposition* 1871-1872.

BECKER (E.). — *Éléments et éphéméride de Béatrix, pour l'opition de* 1872.

OPPOLZER (Th. v.). — *Égine* (91) *retrouvée.*

TALMAGE (C.-G.). — *Observation de l'occultation de Vesta, le décembre* 1871. (Angl.)

La planète brillait d'un éclat surprenant, jusque sur le limbe de la ıe, auquel elle a semblé rester suspendue, pendant près de deux ondes.

PALISA (J.). — *Observations faites à Genève : Thisbé; comète Encke.*

GRÜTZMACHER (A.). — *Éléments et éphéméride de la planète* (115).

SCHMIDT (J.-F.-J.). — *Observations faites à Athènes : Comète Encke,* 1871.

Cette comète a été observée simultanément au chercheur et au racteur, pendant toute la durée de son apparition. Elle a à peu ès constamment présenté la forme d'une nébulosité arrondie.

Pour mesurer son diamètre au chercheur, M
à l'aide des cartes de Bonn, à la distance d
tel couple d'étoiles bien connues situées d
ment. Par suite de l'indécision des contour
différentes de celles qui ont été prises au r
séries de mesures s'accordent à montrer qu
ritions précédentes, le diamètre réel de l
nuant, à mesure qu'elle se rapprochait du

La circonstance la plus remarquable de c
le 2 décembre, tandis que le noyau prenai
formé, du côté du Soleil, une expansion
croissant ou de *halo*. Cette apparence, qui
les grandes comètes, ne s'était jamais p
d'Encke : elle semble du reste avoir dispa

D'Arrest. — *Sur une équation qui ex*
satellites d'Uranus.

Lorsque les deux satellites *intérieurs* so
satellites *extérieurs* ne peuvent être eu
qu'à une longitude unique et déterminée,
longitude seulement que peut avoir lieu l
satellites.

Cette équation, qui correspond à la l
Jupiter, est une conséquence d'une relatio
entre les durées des révolutions synodiqu
relation tellement approchée qu'elle do
le temps que M. Lassell assigne dans ses
à la révolution synodique du premier s
considérables dont M. Adams a constaté
d'Uranus, dépendent sans doute en grand

Powalky (C.). — *Détermination de l*
la comparaison des masses du Soleil et

La valeur numérique que donnent les
pour le rapport des masses de la Terre et d
que l'on attribue à la parallaxe, et récip
ce rapport entre dans l'expression de ce
dernières peuvent donc à leur tour ser
rectifier la parallaxe.

r, si l'on ajoute à la longitude du nœud ascendant de Vénus, lors ›assage de 1761, la variation séculaire théorique de cette longi- pour 88^{ans},56, on trouve pour la longitude du nœud en › un nombre qui diffère de 34″ de celui que l'on peut déduire de ›ervation directe. On peut d'ailleurs conclure de la théorie de us, donnée par M. Le Verrier dans le tome VI des *Annales de ›servatoire de Paris,* que cette différence provient à peu près en er d'une erreur commise dans la masse de la Terre considérée me correspondant à la parallaxe 8″,57. En partant de ces don- , M. Powalky montre que cette parallaxe doit être évaluée à 7. Ce nombre se rapproche fort, comme on voit, de la parallaxe lus probable, 8″,86.

ETERS (C.-H.-F.). — *Corrections de l'orbite de Ianthe* (98).

IND (J.-R.). — *Éléments de Camille* (107). (Angl.)

EESON PRINCE (C.). — *Lettre au rédacteur.* (Angl.)
'auteur rappelle qu'il a signalé la lumière cendrée de Vénus en embre 1863 ([1]).

DOLPH (C.). — *Correction de l'éphéméride de Mnémosyne.* gl.)

CCHI (le P.). — *Lettre au rédacteur.* (Fr.)
Auteur donne le résumé de ses observations sur les protubé- es, du 23 avril au 31 octobre 1871. Le nombre et la hauteur ›rotubérances croissent avec l'activité solaire manifestée d'ailleurs la fréquence des taches et des facules ; trois cent soixante-dix ubérances sur quatre cent soixante et onze se sont montrées nées de l'équateur au pôle, ce qui confirme la loi de circulation édemment énoncée par l'auteur lui-même et par M. Spörer. Les ›tions proprement dites sont d'une durée très-courte ; quelque- en moins d'une heure, tout est fini. La plus grande hauteur à elle la matière soit parvenue a été de 4′32″ ; mais c'est l'hy- ;ène et la matière de la raie D_3 qui atteignent à cette élévation. vapeurs des autres métaux n'arrivent qu'à des hauteurs relati- ent très-faibles.

RUHNS (C.). — *Observations de planètes et de comètes.*

---

[1] Voir *Bulletin*, t. V, p. 179.

é verticalement au-dessous de la région atmosphérique où se nt les rayons qui donnent lieu à cette apparence; par suite, re lumineux doit apparaître au sud du zénith magnétique.

ɔutre, soit v l'angle formé par les rayons menés du centre de re aux points O et O', qu'onpeut supposer, pour plus de sim- , pris sur le même méridien magnétique.

nt aussi:

auteur verticale de la région atmosphérique où se forme la onne;

linaison de la droite menée du point O au centre de cette onne;

le de cette droite avec la direction de l'aiguille aimantée au t O;

yon terrestre.

rouve très-facilement la formule approchée

$$z = rv \operatorname{tang} h.$$

leurs les cartes de Lamont donnent, pour l'Europe moyenne,

$$v = \frac{5}{9} u,$$

$$z = \frac{5}{9} ru \operatorname{tang} h.$$

formule analogue donne la hauteur des rayons éloignés du mais situés dans le méridien magnétique; le calcul est un peu mpliqué pour les rayons situés hors de ce méridien.

: méthode, appliquée aux observations de l'aurore de fé- 372, donne 56 milles géographiques (415 kilomètres pour eur de la couronne, et 60 milles (442 kilomètres) pour celle ons éloignés. On trouve une hauteur plus grande encore lomètres) pour l'aurore boréale du 25 octobre 1870.

endice au Mémoire précédent. — Dans cet Appendice, le applique sa méthode aux observations faites dans quelques de l'Allemagne du Nord et de la Hollande. Partout, malgré ations considérables, le zénith magnétique s'est constamment endant l'aurore, à quelques degrés *au nord* du centre de la

couronne. Voici les résultats auxquels co
observations :

Stations	
Münster..	
Deventer....	
Groningue	
Dantzig....................	

La concordance entre ces résultats et l
quée pour donner une grande probabilit
tale adoptée par l'auteur. Remarquons
assignerait à l'atmosphère une hauteur l
paraissent indiquer les observations fait
l'incandescence des étoiles filantes. Ajou
oscillations de l'aiguille aimantée et la dif
mination exacte de la position du centr
la question quelque incertitude. Les o
s'attacher à déterminer aussi exactemen
tions mutuelles d'un petit nombre de ra
aussi obtenir astronomiquement la pos
raies, ce qui donne à la fois leur point
absolue. On connaîtra ainsi l'épaisseur
dans laquelle se passent les phénomè
boréales.

Engelmann (R.). — *Observations m*

Peters (C.-H.-F.). — *Observations*

Oppolzer (Th. v.). — *Éphéméride*

Rümker (G.). — *Observations à l'éq*

Ces observations se rapportent aux p
Lomia, Mnémosyne, ainsi qu'aux co
comète d'Encke. Cette dernière présent
novembre, une chevelure en forme d'év
l'observateur a cru voir une ou même
dirigeant d'abord vers le Soleil et rep
(*Voir* plus haut les observations de M.

Schmidt (J.-F.-J.). — *Observations*

HALL (A.). — *Observations à l'équatorial* (Washington). (16 col., angl.)

SCHMIDT (J.-F.-J.). — *Observations d'étoiles variables.*

MÖLLER (Axel). — *Correction des éléments de la comète de Faye.* (Lund.)

En comparant les observations à la théorie, l'auteur est conduit à modifier très-légèrement les éléments de la comète. Il y aurait aussi un très-petit changement à faire à la masse de Jupiter. Au lieu de la valeur adoptée par Bessel

$$m' = \frac{1}{1047,879 \pm 0,235},$$

il vaudrait mieux prendre

$$m' = \frac{1}{1047,788 \pm 0,275}.$$

On voit, au reste, que chacune des valeurs moyennes est comprise dans les limites extrêmes de l'autre.

OPPENHEIM (H.). — *Détermination de l'orbite de Lydia* (110) *par les observations faites pendant sa première opposition.*

TIETJEN (F.). — 1° *Observations d'Até.* 2° *Éléments d'Iphigénie.*

VALENTINER (W.) et BECKER (E.). — *Observations de planètes et d'étoiles de comparaison au cercle méridien de Leyde.*

GALLE. — *Observations télescopiques d'étoiles filantes composées de plusieurs fragments.*

Lorsqu'une étoile filante passe dans le champ du télescope, elle se présente en général comme composée de deux ou plusieurs fragments lumineux séparés par des intervalles obscurs. (Observations de MM. Haidinger, Schmidt, Reimann, etc.). D'après M. Galle, les bruits successifs que l'on entend, lors de la chute d'un aérolithe, tiennent à ce que ce corps se morcelle plusieurs fois avant son explosion définitive, laquelle n'a lieu qu'au moment où, la vitesse planétaire étant à peu près détruite par la résistance de l'air, l'action de la pesanteur devient prépondérante. Reste à savoir si la subdivision existait déjà en partie avant la rencontre de l'aérolithe et de la

Terre, ou si elle ne commence qu'au moment où ce corps pénètre dans l'atmosphère.

Luther (R.). — *Observations faites à Düsseldorf : découverte d'une nouvelle planète* (118).

Kaiser (F.). — *Observations au 6 pouces de Leyde.*

Lippig (H.). — *Observations de taches solaires.*

Holetschek. — *Éléments et éphéméride d'Até* (111).

Pechüle, Tietjen, Bruhns, Möller. — *Observations de Peitho* (118).

Leppig, Börgen, Peters (C.-F.-W.). — *Occultations d'étoiles par la Lune.*

Paschen. — *Sur l'emploi de la photographie pour l'observation du passage de Vénus.* (34 col.)

Dans des Mémoires précédents, M. Paschen avait donné un exposé sommaire de la méthode qu'il propose, et répondu à quelques objections. (Voir *Bulletin*, t. V, p. 178). Aujourd'hui cet astronome développe minutieusement tous les détails de cette méthode et des expériences préliminaires qu'il a faites pour s'assurer de son exactitude. L'importance de cette communication, qui servira de règle à presque tous les astronomes allemands, lors du passage de Vénus, nous engage à en donner une analyse étendue.

On sait que M. Paschen place au foyer de l'objectif un verre quadrillé qui doit être photographié en même temps que l'image du Soleil. Il compte éviter ainsi les erreurs qui pourraient provenir de la déformation de cette image, mais la méthode exige quelques précautions.

Quatre conditions sont indispensables :

1° Le grossissement doit être assez fort, et donner une image bien délimitée. Un diamètre de 4 pouces est suffisant, et la délimitation est suffisante aussi, si l'erreur ne dépasse pas $0^{mm},01$, ce qui correspond à un angle de $0'',16$. L'exactitude qui en résulte est comparable à celle que pourraient donner des mesures directes prises à l'héliomètre de Königsberg.

2° L'image doit être orientée par rapport à la verticale, ou mieux encore par rapport à l'axe terrestre.

° Les erreurs qui pourraient provenir du retrait du collodion vent être éliminées par l'appareil lui-même.

° Comme il n'est pas certain que l'image chimique et l'image ique du Soleil aient absolument même diamètre, pour qu'il soit sible de déduire les distances angulaires des centres de Vénus et Soleil de mesures prises sur l'épreuve photographique, il faut l'appareil donne le moyen d'évaluer avec la plus grande exacti- e la valeur d'angle qui correspond au diamètre de cette épreuve.

'appareil se compose d'un objectif de Steinheil, qui donne une ge focale de 19,2 millimètres de diamètre, et d'un oculaire ial qui grossit six fois cette image sur le négatif. Bien que la ance entre le foyer optique et le foyer chimique de l'oculaire ne pas négligeable, on peut y remédier par un déplacement conve- le du châssis; mais, pour l'objectif, il est indispensable que cette érence soit à peu près nulle, puisque le réseau qui est au foyer que doit être photographié en même temps que l'image du Soleil. outre, il a fallu, par suite de cette dernière circonstance, dis- er au point de vue de l'oculaire une fenêtre de 10 millimètres iverture. Cette fenêtre est nécessaire, parce que, chaque région plan focal recevant ainsi son grossissement d'une partie déter- ée de l'oculaire, les erreurs accidentelles, s'il y en a, portent à is sur le réticule et sur le verre quadrillé.

e travail préparatoire de M. Paschen consistait surtout à éprou- l'oculaire de son appareil. Pour cela, il a tracé sur verre, à l'aide a machine à diviser de Repsold, un double réseau de lignes pa- les qui se coupent orthogonalement; il en a obtenu l'image ographique à l'aide de son oculaire, et il a pris ensuite minu- sement des mesures comparatives sur le réticule et sur l'épreuve. es mesures prises sur le réticule ont montré que les traits étaient aitement droits et parallèles. Les angles correspondant aux in- alles entre deux traits voisins ont été déterminés comme pour ils de l'instrument des passages.

uant à l'image, elle est légèrement déformée par l'oculaire; les inces des lignes photographiées à la ligne centrale ne sont pas lument proportionnelles aux distances correspondantes comp- sur le réticule; d'où il suit que les lignes de l'épreuve ne sont igoureusement droites. On trouve, en outre, que le grossissement nente sur les bords, et qu'il n'est pas symétrique par rapport au

centre, lorsque le prolongement de l'axe o
passe pas par le centre du réticule. Voici co
médie à ces inconvénients.

A l'aide d'une série empirique, il exprim
tées sur l'épreuve en fonction des longueurs
divisé. Dès lors, pour avoir la position d'un
laire, il suffit de prendre les distances aux cô
ferme, et *une seule* interpolation donne
exprimée en secondes. Ce procédé est évid
ment que les déformations photographiques
verre et sur l'image solaire.

On obtient ainsi les coordonnées du cent
centre de Vénus; on les corrige de la réf
toutes les données nécessaires pour la rech
pourvu que les traits du verre soient orient
ticale ou par rapport à l'axe du monde.

Cette orientation n'offre aucune difficulté,
ture inventée par Hansen, monture qui pe
mouvoir autour de deux axes, l'un horizontal
que le pied porte en outre un troisième a
monde. Si, dans un tel appareil, on dispos
manière que l'une des séries de traits soit ri
diculaire, ou mieux encore, parallèle à l'ax
graphie donne immédiatement la *différence*
des deux astres, ce qui suffit, puisque la p
déplacement que dans le sens de la verticale
lactique exigerait non-seulement un plus gra
mais encore la détermination rigoureuse d
deux séries de traits.

Reste le retrait du collodion. Les expér
montrent que ce retrait est incontestable, m
uniforme. Peu importe, d'ailleurs, à moins
fissures, puisque l'image du Soleil et la plaqu
graphiées simultanément.

D'Arrest. — *Observations spectroscopiqu*

On sait que le spectre des nébuleuses gaz
néral, à trois raies qu'on peut désigner par

d'Arrest a déterminé le spectre de la belle nébuleuse pla-
H.IV.45, si souvent observée et dessinée par Herschel, lord Lassell, etc. Ce spectre se réduit presque absolument à la , raie de l'azote. On aperçoit des traces des raies (2) et (3). ıu donne un spectre continu presque insensible.

ébuleuse H.IV.37 donne les trois raies : la première est la illante; les raies (2) et (3) paraissent l'emporter alternati- l'une sur l'autre.

ırallaxe de cette dernière nébuleuse est insensible.

UTT (J.). — *Observation de l'éclipse partielle de Soleil du ·mbre 1871, à Paramatta.*

RS (C.-H.-F.). — *Sur l'orbite de Miriam (102). Éphéméride ɔpposition de 1872.*

:eur rectifie les éléments de cette planète qui ne représen- ·lus les observations, soit à cause d'une erreur de réduction, · suite d'une confusion commise précédemment entre la pla- quelque petite étoile.

ıLZER (V.), BRUHNS, PECHÜLE. — *Observations et éphéméride :ho (118).*

ELLY. — 1° *Observations de Peitho (118) et d'Égine; 2° nébu- ıouvelles; 3° étoile variable.* (Fr.)

: étoile varie de la 8e à la 10e grandeur. Ultérieurement, her annonce qu'il l'avait marquée sur ses cartes, d'abord de 9e grandeur, ensuite de 9e-10e.

ıY (Paul). — *Découverte d'une nouvelle planète (119).* (Fr.)

ıNS. — *Observation de cette même planète.*

.ELLY. — *Découverte d'une nouvelle planète (120).* (Fr.)

ɔOWSKI. — *Observation d'étoiles doubles* (Fr.)

(*A suivre.*) G. L.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et Ch. BRISSE.

2e Série, t. XI; 1872 (¹).

HERMITE (Ch.). — *Sur l'équation* $x^3 + y^3 = z^3 + u^3$.

On doit à Euler les formules qui vérifient identiquement cette équation, et Binet, dans une *Note sur une question relative à la théorie des nombres* (*Comptes rendus*, t. XII, p. 248), a observé qu'on pouvait réduire ces formules aux expressions plus simples

$$\begin{aligned} x &= (a^2+3b^2)^2 - a + 3b, \\ y &= -(a^2+3b^2)^2 + a + 3b, \\ z &= (a^2+3b^2)(a+3b) + 1, \\ u &= -(a^2+3b^2)(a-3b) - 1. \end{aligned}$$

M. Hermite établit ces résultats en s'appuyant sur la propriété générale des surfaces du troisième ordre, consistant en ce que leurs points se déterminent individuellement. A cet effet, il considère l'équation

$$x^3 + y^3 = z^3 + 1$$

comme représentant une surface du troisième ordre. Une droite variable, qui s'appuiera sur deux droites fixes de cette surface, la coupera en un troisième point variable, dont les coordonnées s'expriment rationnellement. On retrouve ainsi les formules de Binet.

JOACHIMSTHAL. — *Sur le nombre des normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoïde.* (2 art., 12 p.)

Suite de la traduction d'un Mémoire inséré dans le *Journal de Crelle*.

LAGUERRE. — *Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace.* (8 p.)

Étant donné un point imaginaire de l'espace, l'auteur considère le cône ayant ce point pour sommet et pour base le cercle à l'infini.

(¹) Voir *Bulletin*, t. II, p. 75.
Nous avons dû, par suite des limites qui nous sont imposées, supprimer les énoncés de courts articles ou de questions résolues qui se trouvent en grand nombre dans ce Recueil.

ône admet un cercle réel A, qui peut servir à représenter le ; imaginaire. Comme par un cercle A et par le cercle de l'in- ›n peut faire passer deux cônes, le cercle A correspond à deux :s imaginaires conjugués l'un de l'autre. Pour distinguer ces points, on convient de considérer le cercle comme décrit dans ertain sens par le point mobile; le sens dans lequel il sera sup- décrit déterminera celui des deux points dont il sera la repré- ıtion.

y a dans ce mode de représentation une question à se poser : ment se distribuent tous les cercles qui représentent tous les :s d'une courbe plane ou gauche? L'auteur étudie, dans cet ar- et dans les suivants, la solution de cette question pour les courbes hes qui sont l'intersection d'une sphère et d'une surface du se- degré.

ɔEHLER. — *Mémoire sur la théorie géométrique des courbes roisième ordre.* (13 p.)

ɪuteur développe une théorie de ces courbes, en prenant pour la méthode donnée par M. Chasles pour construire une cubique minée par neuf points.

LAIRE (A.). — *Note sur le lieu du point de contact de deux es mobiles qui doivent être tangents chacun à deux cercles*

.

ɪNYADY (DE). — *Étant donnée la fonction*

$$y = A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_n \cos nx,$$

miner les coefficients $A_1, \ldots, A_n$, *de manière que, pour* $\frac{k\pi}{2n+1}$, *y prenne la valeur* y_k; $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots, y_n$ *étant des tités données.*

ɪNVIN (L.). — *Étude d'un complexe du second ordre.* (6 art., ıble 70 p.)

question que se propose l'auteur est la suivante : on donne lipsoïde; étudier la position des droites par lesquelles on peut r à cet ellipsoïde des plans tangents rectangulaires.

s droites forment un de ces assemblages auxquels les géomètres ıprès Plücker, donné le nom de *complexes*. Le complexe par-

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ordre ; il présente les rapports les uns [illegible] soit avec les surfaces homofocales, soit avec les surfaces [illegible]. L'auteur a toujours eu soin de démontrer directement, sans recourir à la théorie générale des complexes, toutes les propositions sur lesquelles il s'appuie, de telle manière que l'étude qu'il a faite se suffit à elle-même. Quant à l'énoncé de quelques résultats, voir *Bulletin*, t. II, p. [illegible] un résumé du travail de l'auteur.

[illegible]. — *Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces*. ([illegible] p.)

L'auteur se propose de donner une démonstration nouvelle des formules de la théorie des surfaces dues à MM. Bonnet, Bour, Codazzi. A cet effet, il part des formules plus générales, relatives au déplacement d'un corps solide quelconque, qui ont déjà été employées par quelques auteurs, et notamment par M. A. Picart (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. VI).

Kœhler. — *Mémoire sur la théorie géométrique des courbes du troisième ordre*. (11 p.)

Suite de l'article déjà signalé. L'auteur donne le théorème de Carnot, celui de Cotes ; il étudie les polaires coniques, et construit les tangentes issues d'un point de la cubique.

Le Besgue (V.-A.). — *Question de théorie des nombres. Si l'équation* $x^2 = y^4 + ay^2z^2 + bz^4$ *est résolue par*

$$r^2 = t^4 + at^2u^2 + bu^4,$$

elle le sera aussi par

$$x = r^4 - (a^2 - 4b)t^4u^4,\quad y = t^4 - bu^4,\quad z = 2rtu.$$

Laguerre. — *Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace*. (2e art., 10 p.)

Mansion (P.). — *Sur la méthode de Brisson, pour intégrer les équations différentielles à coefficients constants.*

La méthode que signale M. Mansion, et qui est très-ingénieuse, est fondée sur l'emploi des facteurs symboliques. Cauchy en a fait remarquer la fécondité (*Exercices de Mathématiques*, t. II, p. 175).

Elle consiste à décomposer l'expression

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{d}{dx} + a_n\right) y$$

en facteurs

$$\left(\frac{d}{dx} + \alpha\right) \left(\frac{d}{dx} + \beta\right) \cdots \left(\frac{d}{dx} + \lambda\right) y.$$

On sait que les géomètres anglais emploient fréquemment des décompositions symboliques de ce genre. On les utilise même dans la théorie des équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

KOEHLER. — *Mémoire sur la théorie géométrique des courbes du troisième ordre.* (3e art., 5 p.)

Courbe hessienne. — Faisceaux de cubiques passant par neuf points.

COMPAGNON. — *Note sur les éléments de Géométrie.*

HERMITE (Ch.). — *Sur l'intégration des fonctions rationnelles.*

M. Hermite se propose de montrer que le procédé élémentaire d'intégration des fractions rationnelles $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ peut être présenté sous une forme telle, que la résolution de l'équation $F(x) = 0$ ne soit plus nécessaire pour le calcul de la partie algébrique de l'intégrale, mais seulement pour en obtenir la partie transcendante.

LAGUERRE. — *Sur les propriétés des sections coniques qui se rattachent à l'intégration de l'équation d'Euler.* (6 p.)

L'auteur parvient au théorème suivant :

Étant donnée l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}},$$

où $f(x)$ représente un polynôme du quatrième degré en x, si l'on décompose d'une manière arbitraire le polynôme $f(x)$ en deux facteurs du second degré, en posant

$$f(x) = \theta(x)\varphi(x),$$

'ersale rencontrant aux points a, b une conique donnée, le rt du produit $ma.mb$ au carré du demi-diamètre parallèle à la 'ersale est l'indice du point m par rapport à la conique.

ıdice d'une droite est égal à l'indice du point où cette droite ncontrée par le diamètre conjugué à sa direction, divisé par le du demi-diamètre parallèle à la droite.

a des définitions analogues pour les surfaces du second

.

ɪpagnon. — *Note sur les éléments de Géométrie.* (10 p.)

vulf (E.). — *Des intersections des faisceaux de courbes et ıisceaux de leurs polaires inclinées.* (8 p.)

sait que M. Dewulf a nommé *première polaire inclinée d'un* P le lieu des points où toutes les droites issues de P rencon-la courbe sous un angle constant, et *coefficient d'inclinaison* gente k de cet angle. L'auteur démontre plusieurs théorèmes tants relatifs à ces polaires.

ıono. — *De la réalité des racines de l'équation du troisième* *en* S.

ʀeau (C.). — *Sur les permutations circulaires distinctes.*

ɔré (D.). — *Si l'on désigne par* a, n *deux nombres entiers* ɔnques supérieurs à l'unité, le quotient $\frac{n(n+1)\ldots(na-1)}{a^n}$ ɪctionnaire si a est premier, entier si a n'est pas premier.*

uerre. — *Recherches analytiques sur la surface du troi-ordre, qui est la réciproque de la surface de Steiner.* (3 art.,

ıteur rattache la théorie de cette surface à celle des formes lratiques simultanées. Il en retrouve très-simplement les asymptotiques, qui ont été, comme on sait, déterminées d par Clebsch. Les articles suivants contiennent diverses pro-s de la surface.

card (H.). — *Trouver l'équation de l'enveloppe de la qui joint les extrémités des deux aiguilles d'une montre ıire.*

RESAL (H.). — *Méthode directe pour déterminer l'influence de la rotation de la Terre sur la chute des graves.*

MISTER (J.). — *Sur l'hyperboloïde de révolution.*

ZOLOTAREFF. — *Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité de Legendre.* (9 p.)

DOSTOR (G.). — *Surfaces de révolution du second degré.* (11 p.)

FAURE. — *Théorie des indices par rapport à une courbe et une surface du second degré.* (2ᵉ art., 20 p.)

M. Faure donne différents théorèmes, dans lesquels interviennent les rapports anharmoniques. Un Chapitre spécial est consacré aux propriétés d'un système de deux, trois ou quatre points, droites et plans, conjugués à une surface du second ordre. La théorie des indices proposée par l'auteur paraît mériter d'être étudiée avec soin.

MALEYX. — *Séparation des racines des équations à une inconnue.* (14 p.)

RESAL (H.). — *Interprétation géométrique de la trajectoire apparente d'un projectile dans le vide.* (6 p.)

ARONHOLD. — *Sur les vingt-huit tangentes doubles d'une courbe du quatrième degré.*

Article traduit de l'allemand, et extrait des *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1864.

FAURE. — *Théorèmes de Géométrie.* (7 p.)

ZOLOTAREFF. — *Sur l'équation* $Y^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} Z^2 = 4X$. (11 p.)

T. XII; 1873.

TRANSON (A.). — *Sur un nouveau mode de construction des coniques.* (16 p.)

Si, en chaque point d'une conique à centre, et sur une direction constamment inclinée du même angle sur la normale, on porte une longueur proportionnelle à la moyenne géométrique des deux rayons focaux relatifs à ce point, l'extrémité de cette longueur décrira une conique concentrique à la première et de même genre qu'elle.

TRANSON (A.). — *Sur un théorème de Dandelin.*

LAGUERRE. — *Recherches analytiques sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner.* (4e art., 17 p.)

PEAUCELLIER. — *Note sur une question de géométrie du compas.* (7 p.)

L'auteur appelle *compas composé* un système quelconque de pièces rigides articulées à liaison complète, et il fait connaître les compas composés traçant les lignes les plus connues : la droite, le cercle, les coniques, les conchoïdes, la cissoïde. Il rappelle en même temps la solution rigoureuse qu'il a donnée, en 1867, du problème proposé par Watt, et dont le parallélogramme, qui porte le nom de ce célèbre ingénieur, ne donne que la solution approchée.

RESAL. — *Sur la capillarité.* (5 p.)

Cet article est extrait du *Traité de Mécanique générale* en cours de publication, et dont le premier volume a déjà paru.

ANDRÉ (D.). — *Théorèmes sur les combinaisons.* (5 p.)

SALTEL (L.). — *Théorèmes sur les coniques et sur les surfaces du second ordre.*

BELLAVITIS (G.). — *Exposition de la méthode des équipollences.* (7 art., 130 p.)

Mémoire publié, à Modène, en 1854; traduit de l'italien par M. LAISANT.

M. Hoüel a déjà exposé d'une manière rapide ([1]) les principes de la méthode des équipollences, et, pour rendre compte de l'utilité et de l'intérêt du travail de M. Laisant, nous ne pouvons mieux faire que de reproduire les appréciations de notre collaborateur.

« Carnot, dans sa *Géométrie de position,* parle des avantages que retirerait la Géométrie de l'introduction d'un algorithme représentant à la fois la grandeur et la position des diverses parties d'une figure, de telle sorte que, sans avoir besoin de recourir à des considérations géométriques spéciales, on pût obtenir les résultats cherchés par l'application d'un calcul fondé sur un petit nombre de lois générales.

» Le désir de Carnot est complétement réalisé, depuis trente-cinq

---

([1]) *Nouvelles Annales,* 2e série, t. VIII; 1869.

[illegible]

[illegible] la méthode avec laquelle on parvient [illegible] des problèmes.

[illegible]

[illegible] Elle permet [illegible] des quantités [illegible] uniquement usitées [illegible] l'Algèbre [illegible] regardait comme la seule [illegible]

[illegible] — [illegible] *de courbure* [illegible] *d'une figure* [illegible]

[illegible] — *Détermination* [illegible] *lignes à double* [illegible]

[illegible] — *Mouvement d'un point* [illegible] *fluide homogène en repos.* [illegible]

L'auteur exprime la résistance du fluide [illegible] forme $A + Bv^2$.



ENT (H.). — *Note sur un passage de la* Théorie analytique babilités.

:S (S.). — *Scolies pour un théorème d'Arithmétique.*

INE. — *Sur l'accélération normale à la trajectoire d'un 'un système invariable mobile dans son mouvement le plus* . (8 p.)

ɜur signale une erreur matérielle commise par M. Resal, ɑ important Mémoire sur les *Propriétés géométriques du :ent le plus général d'un corps solide,* et il donne l'expres-cte de l'accélération normale.

INDE (H.). — *Note sur l'application des déterminants à la des moments des forces.*

LE (J.). — *Sur la distance d'un point à une droite.*

ɪ (J.). — *Note sur la détermination des asymptotes dans sections des surfaces du second degré.* (8 p.)

ION (A.). — *Sur une propriété des asymptotes et sur cette : « Les points situés à l'infini sur un plan sont en ligne* › (7 p.)

ɔNNET (Ch.). — *Propriété caractéristique de la droite ıte.*

NE (A.) et ZOLOTAREFF (G.). — *Sur un certain minimum.*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

., a_n étant des constantes réelles. En désignant par [A] la bsolue de la quantité réelle A, on propose de déterminer cients $a_1, \ldots, a_n$ de $f(x)$, de sorte que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]\, dx$$

leur minimum.

-GERMAIN (A. DE). — *Sur les points d'inflexion d'une lu troisième degré.*

On connait le théorème sur le changement du paramètre et de rgument pour la troisième espèce des transcendantes hyperelstiques; c'est en généralisant, au moyen de ce théorème, l'équam de Legendre pour les modules de périodicité des intégrales liptiques de première et de deuxième espèce que M. Weierass trouva un point de départ pour développer sa théorie des unscendantes supérieures. Cependant Abel a déjà signalé un sultat analogue dans la théorie des équations différentielles léaires, et Jacobi a encore ajouté aux développements d'Abel et a rendus plus succincts. Mais, du temps de Jacobi, le caractère des actions qui satisfont à des équations différentielles à coefficients tionnels avait été peu étudié; pour cette raison, il était imposble, comme le remarque Jacobi lui-même à la fin de son Mémoire, donner une forme bien précise aux théorèmes développés.

Depuis environ dix ans M. Fuchs s'est consacré à l'étude de la ture de ces fonctions, et il est ainsi parvenu dans son nouveau émoire à préciser d'une manière suffisante les théorèmes d'Abel de Jacobi. En même temps, il a su établir des relations entre les tégrales prises entre deux points singuliers des solutions des uations différentielles linéaires, relations analogues à celles qui it été trouvées par Legendre pour les modules de périodicité des tégrales elliptiques, et par M. Weierstrass pour ceux des intérales hyperelliptiques.

Pour plus de détails, il faut comparer :

Abel, OEuvres complètes, t. II, p. 54-65.

Jacobi, Journal de Crelle, t. 32 (OEuvres, t. I, p. 363).

Weierstrass, Programme du Gymnase de Braunsberg, 1848-49.

Fuchs, trois Mémoires, t. 66, 68, 75 du *Journal de Borchardt Bulletin,* t. IV, p. 233).

Frobenius (G.). — *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires au moyen des séries.* (23 p.)

M. Fuchs a déterminé, le premier, la forme des intégrales d'une quation différentielle linéaire, telle que

$$P(y) = p(x)x^{\lambda}y^{(\lambda)} + p_1(x)x^{\lambda-1}y^{(\lambda-1)} + \ldots + p_{\lambda}(x)y = 0,$$

où $p(x), p_1(x), \ldots, p_{\lambda}(x)$ sont des séries développées suivant les puissances ascendantes et positives de la variable x, et qui sont

[illegible] l'intérieur d'un cercle décrit avec le rayon R autour [illegible] la $k^{\text{ième}}$ dérivée de y par rapport [illegible] s'est occupé de la même équation, et y [illegible] plus rapidement les résultats; [illegible] y parvient par une nouvelle voie [illegible]

$$[illegible] = \sum f_i(\rho) x^{\rho};$$

[illegible] et calculons les fonctions [illegible] de la formule récurrente

$$[illegible] \ldots - g_i(\rho) f(\rho) = 0.$$

Alors [illegible]

$$[illegible] = \sum g_i x^{[illegible]}$$

sera convergente à l'intérieur de la circonférence décrite avec le rayon R [illegible] et satisfera à l'équation différentielle

$$[illegible]$$

[illegible] les racines de l'équation $f(\rho) = 0$ en [illegible] groupes, tels que chaque groupe réunit toutes les racines [illegible] ne diffèrent que de nombres entiers. Soient $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k$ les racines d'un groupe, rangées de manière que, si x est plus petit que [illegible] soit un nombre entier positif; soit s non inférieur au maximum de deux racines d'un groupe quelconque; soit enfin

$$[illegible] = [illegible] f(\rho - s) C(\rho),$$

où $C(\rho)$ est une fonction arbitraire de ρ. Alors, si l'on pose

$$g^{(k)}(x, \rho) = \frac{d^k g(x, \rho)}{d\rho^k},$$

l'intégrale de l'équation différentielle $P(y) = 0$ appartenant à la

ıcine ρ_k sera

$$g^{(k)}(x,\rho_k) = x^{\rho_k}\sum\Big[g_r^{(k)}(\rho_k) + k g_r^{(k-1)}(\rho_k)(\log x) + \frac{k(k-1)}{1.2} g_r^{(k-2)}(\rho_k)(\log x)^k + \ldots + g_r(\rho_k)(\log x)^r\Big] x^r.$$

Les λ intégrales correspondant aux racines de l'équation $f(\rho) = 0$:ront indépendantes les unes des autres.

Frobenius (G.). — *Sur la notion de l'irréductibilité appliquée la théorie des équations différentielles linéaires.* (36 p.)

L'auteur appelle *irréductible* une équation différentielle linéaire :pourvue de second membre et dont les coefficients sont des fonc-əns d'une variable définies partout comme monodromes, lors-ı'elle n'a point d'intégrale commune avec une autre équation fférentielle linéaire jouissant de la même propriété, mais étant un ordre moins élevé; s'il n'en est pas ainsi, il l'appelle *réduc-ble.* Alors, si une équation différentielle linéaire a *une* intégrale ımmune avec une équation irréductible, elle les aura *toutes* ımmunes avec elle; et si une équation différentielle linéaire est ductible, il existera une équation différentielle linéaire d'ordre ıférieur avec laquelle elle aura toutes ses intégrales communes. ɪpposons maintenant qu'on connaisse les coefficients des relations néaires qui servent à exprimer les intégrales des systèmes fonda-ıentaux, correspondant aux points singuliers les unes par les ıtres. Pour ce cas, l'auteur développe la solution du problème de éterminer si une équation différentielle donnée est réductible. ʌrsque l'équation différentielle linéaire $P(y) = 0$ a toutes ses inté-grales communes avec l'équation différentielle linéaire $Q(y) = 0$, ›n pourra mettre $P(y)$ sous la forme $R[Q(y)]$, où $R(y)$ est une :xpression différentielle linéaire. Si les multiplicateurs intégrants les équations différentielles linéaires $Q(y) = 0$, $R(y) = 0$ satis-ont aux équations différentielles linéaires $Q'(y) = 0$, $R'(y) = 0$, es multiplicateurs de l'équation différentielle linéaire $R[Q(y)] = 0$ atisferont à l'équation différentielle linéaire $Q'[R'(y)] = 0$. Ceci ésulte aisément de ce que les multiplicateurs de l'équation différen-ielle linéaire

$$v_\lambda D_x v_{\lambda-1} D_x v_{\lambda-2} \ldots D_x v_1 D_x v_0 y = 0$$

ntégrales de l'une des équations différentielles résultent
ımédiatement des expressions de celles de l'autre, ce qui
de la considération suivante : Si l'on réduit l'équation (1),
du facteur intégrant μ_m^{-1}, à

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + p_1^{(1)}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_{m-1}^{(1)}y = c_m\mu_m,$$

st constant, la substitution $M = \mu_m^{-1}\int \mu_m M^{(1)}dx$ réduira
on (2) à

$$\frac{d^{m-1}M^{(1)}}{dx^{m-1}} - \frac{d^{m-2}p_1^{(1)}M^{(1)}}{dx^{m-2}} + \ldots + (-1)^{m-1}p_{m-1}^{(1)}M^{(1)} = 0.$$

substitution, ayant été faite k fois au moyen des k inté-
$_1, \ldots, \mu_k$, ramènera (1) à la forme

$$\begin{aligned}&\frac{d^{m-k}y}{dx^{m-k}} + p_1^{(k)}\frac{d^{m-k-1}y}{dx^{m-k-1}} + \ldots + p_{m-k}^{(k)}y \\ &\quad = c_{m-k+1}\mu_{m-k+1} + c_{m-k+2}\mu_{m-k+1}\int \mu_{m-k+1}^{-1}\mu_{m-k+2}dx + \ldots \\ &\qquad + c_m\mu_{-k+1}\int dx\,\mu_{m-k+1}^{-1}\mu_{m-k+2}\ldots\int \mu_{m-1}^{-1}\mu_m dx,\end{aligned}$$

sont constants, et (2) à la forme

$$\frac{d^{m-k}M^{(k)}}{dx^{m-k}} - \frac{d^{m-k-1}p_1^{(k)}M^{(k)}}{dx^{m-k-1}} + \ldots + (-1)^{m-k}p_{m-k}^{(k)}M^{(k)} = 0.$$

quantités $M_1, M_2, \ldots, M_k$ satisfont à une équation différen-
l'ordre k

$$\frac{d^k\varphi}{dx^k} - \frac{d^{k-1}.g_1\varphi}{dx^{k-1}} + \ldots + (-1)^k g_k\varphi = 0.$$

ès cela M. Thomé fait voir (2) que les $p_a^{(k)}$ sont des fonctions
s et rationnelles des p_a, des g_a et de leurs dérivées; ces $p_a^{(k)}$
onc indépendants du choix des intégrales de l'équation (9).
r ses recherches ultérieures, l'auteur suppose que les p_a et les
nt des fonctions de l'argument complexe x, monodromes dans
inage d'un point $x = a$, continues à l'exception de ce point,
deviennent infinies d'un ordre fini pour $x = a$. Dans cette

hypothèse, il examine l'indice caractéristique
des équations différentielles précédentes, e
intégrales d'une équation différentielle d'
ractéristique h' satisfont à l'équation diff
caractéristique h, les intégrales d'une
d'ordre $m-k$ et d'indice caractéristique h-
tion différentielle (1), et réciproquemen
considérations à l'équation (1) pour en re
régulières (*Bulletin*, t. IV, p. 236), on tr
différentielle (1) d'indice caractéristique h p
linéairement indépendantes (autant qu'elle
tion (2) contiendra les intégrales d'une
d'ordre h et d'indice caractéristique h, et ré
reconnaître généralement si l'équation (2)
d'une équation différentielle d'ordre h et d'i
l'auteur définit (5) les intégrales de l'équa
sions :

$$(10) \begin{cases} M_1 = \mu_m^{-1}, \quad M_2 = \mu_m^{-1}\int \mu_m \mu_{m-1}^{-1}\, dx, \ldots \\ M_k = \mu_m^{-1}\int dx\, \mu_m \mu_{m-1}^{-1} \ldots \int \mu_{m-k+2} \end{cases}$$

où les dérivées $\frac{d \log \mu}{dx}$ sont monodromes dan
et deviennent infinies d'un ordre fini pour
de l'étude de ces intégrales fait encore voi
possède h intégrales où $\frac{d \log \mu}{dx}$ devienne infi
supérieur à 1, elles satisferont à une équati
caractéristique h. C'est pourquoi l'auteur di
savoir si l'équation (2) possède des intégral

$$e^{w}(x-a)^{r}\sum_{0}^{\infty} c_a (x-a)^{a}, \quad w = \sum_{1}^{n}$$

En posant $M = e^{w} N$, l'équation différenti
quantité $\frac{dw}{dx} = z$, et celle-ci doit être déte

l'équation en N puisse avoir une intégrale de la forme

$$(x-a)^r \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha.$$

La détermination de z fait l'objet principal du numéro 6; après cela, la convergence du développement

$$(x-a)^r \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$$

reste à examiner. Si l'on trouve h intégrales de l'équation (2) jouissant de la propriété définie ci-dessus, elles servent à résoudre l'équation (1) au moyen de la formule (7) dont le premier membre égalé à zéro donne les intégrales régulières. Alors on a aussi résolu l'équation (2), en vertu des relations (3) et (4).

Hermite (Ch.). — *Extrait d'une Lettre à M. Paul* Gordan. (9 p., fr.)

La Lettre se rapporte au système des polynômes entiers en x, U, V, W, tels que le développement de l'expression à trois termes $U \sin x + V \cos x + W$ commence par la plus haute puissance possible de la variable, ce qui forme une extension de la théorie des fractions continues algébriques.

Rosanes. — *Sur un principe d'adjonction des formes algébriques.* (19 p.)

En égalant à zéro l'expression

$$a_0\alpha_n - \binom{n}{1} a_1 \alpha_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 \alpha_{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n \alpha_0,$$

où entrent les coefficients a et α de deux formes binaires de degré n, on établit une relation entre ces formes; l'auteur les appelle *conjuguées*. Dans le premier paragraphe, il considère des groupes conjugués, se bornant à des formes binaires. Après une généralisation du principe pour plusieurs variables, les §§ 2 et 3 développent une représentation de formes algébriques en sommes de puissances, représentation remarquable par la disposition géométrique distincte des droites qui servent de fondements aux formes linéaires. Dans le § 4, on fait l'application du problème aux courbes du troi-

sième ordre ; le théorème le plus général des représentations comme sommes de puissances est énoncé au § 5. Le sixième paragraphe, indépendant de la méthode des autres, déduit d'un nouveau principe une représentation de formes ternaires de degré n par $\frac{1}{2}n(n-1)$ puissances, que M. Reye avait déjà trouvée par l'application de considérations empruntées à la Mécanique.

BACHMANN (P.). — *Recherches sur les formes quadratiques.* (11 p.).

M. Hermite, déterminant les substitutions qui transforment une forme quadratique en elle-même, ne montre pas comment on peut tirer ces substitutions immédiatement des relations de transformation et ne prouve pas qu'on les trouve réellement toutes. M. Bachmann complète la méthode de M. Hermite pour les formes ternaires.

HERMITE (Ch.). — *Extrait d'une Lettre à M. Borchardt.* (3 p., fr.)

WEBER (H.). — *Sur la théorie de la transformation des fonctions algébriques.* (4 p.) E. L.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, publiées sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique par un Comité de rédaction, composé de MM. les Maîtres de conférences de l'École.

2e Série, t. I; année 1872 (1).

PUISEUX (V.). — *De l'équilibre et du mouvement des corps pesants, en ayant égard aux variations de direction et d'intensité de la pesanteur.* (26 p.)

Dans les questions relatives à l'équilibre et au mouvement des corps pesants à la surface de la Terre, on raisonne ordinairement comme si cette surface était immobile et que les actions de la pesanteur sur des molécules de masses égales fussent égales et parallèles entre elles. On admet aussi que la direction commune de ces actions reste constante relativement aux objets terrestres réputés immobiles.

(1) Nous n'analysons que les Mémoires consacrés aux Mathématiques.

En réalité, à prendre les choses à la rigueur, la pesanteur, à un instant déterminé, varie d'intensité et de direction quand on passe d'un point à un point voisin; en outre, les actions du Soleil et de la Lune sur un point de la surface de la Terre n'étant pas tout à fait égales et parallèles aux actions de ces astres sur le centre de notre globe, il en résulte, dans la grandeur et la direction de la pesanteur en chaque point, des changements continuels qui sont rendus manifestes par le phénomène des marées. M. Puiseux se propose d'examiner comment ces diverses circonstances modifient la théorie ordinaire de l'équilibre et du mouvement des corps pesants.

L'auteur commence par exprimer les composantes de l'attraction terrestre, en regardant la Terre comme un noyau solide recouvert d'une couche liquide, le noyau solide étant formé de couches sphériques, dans chacune desquelles la densité est constante, et supposant que la surface libre de la couche liquide soit celle d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe de rotation du globe.

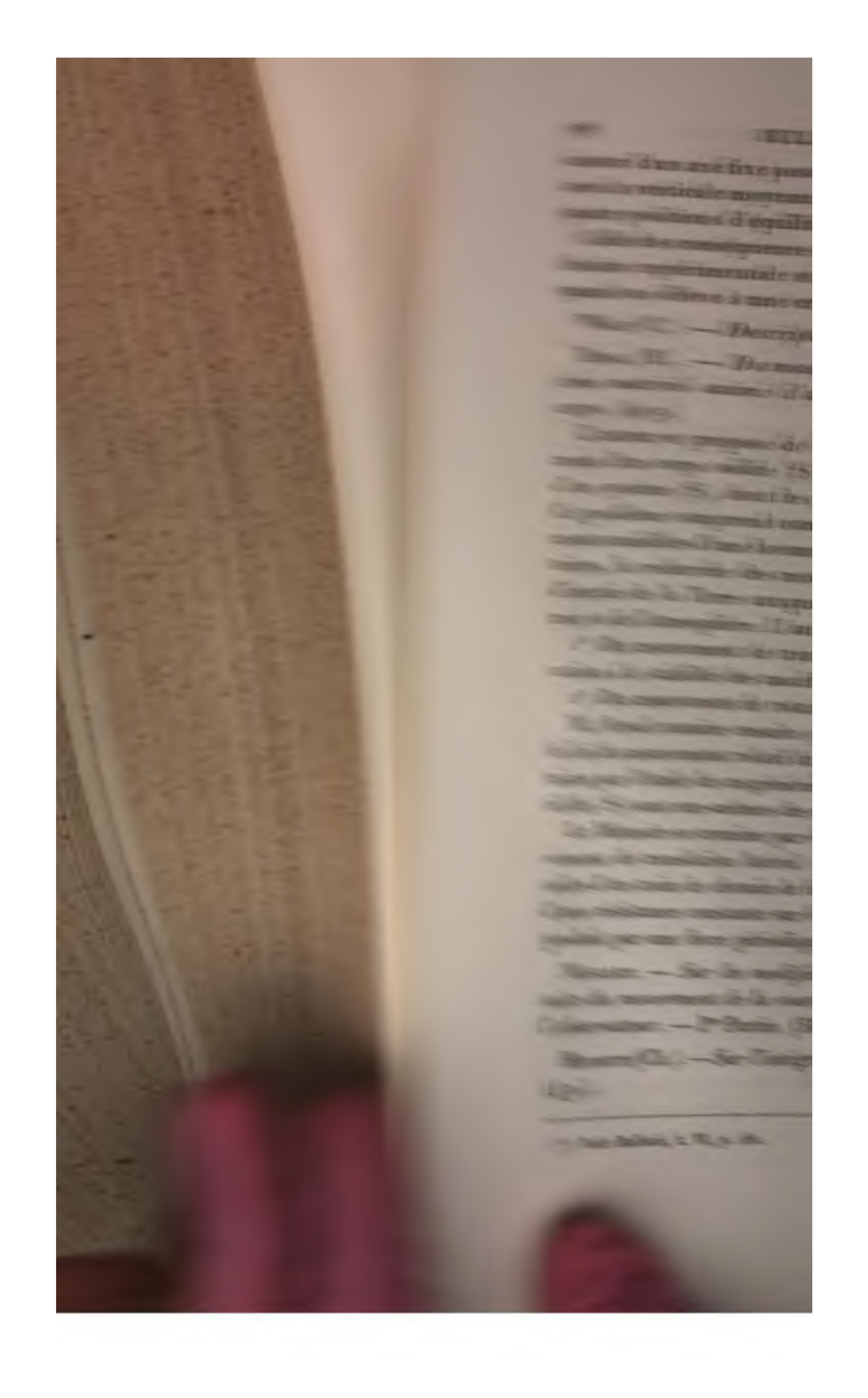
Il évalue ensuite les composantes des forces provenant des actions de la Lune, et il montre que leur composition donne une force R variable avec le temps, mais qu'on peut considérer comme indépendante de la position du point matériel.

Cela posé, la connaissance de la force R, de l'attraction terrestre et des forces Φ qui agissent à la surface de la Terre permet d'écrire l'équation générale du mouvement des corps pesants. Cette équation contient des coefficients dont l'auteur, avant toute application, effectue le calcul numérique.

La première application est relative à l'angle que fait un fil à plomb avec la verticale du point de suspension. Il est clair qu'un fil à plomb se dirige suivant la verticale de son extrémité inférieure et non pas suivant celle de son extrémité supérieure. M. Puiseux trouve l'angle de ces deux verticales. Cet angle serait à Paris, pour un fil à plomb de 100 mètres, de 0″,017.

L'auteur examine ensuite la forme d'un fil pesant homogène, suspendu par une de ses extrémités. Le fil doit être dans un plan passant par la méridienne, et faisant un angle très-petit avec le méridien. Sa forme serait celle d'une parabole.

La troisième application est relative à la chute dans le vide d'un point pesant, abandonné à lui-même sans vitesse initiale. Le Mémoire se termine par l'étude du mouvement d'un corps solide



URENT (H.). — *Mémoire sur la théorie des courbes gauches.* ?.)

anteur traite surtout de l'hélice osculatrice et du cylindre qui ntient; l'axe de cette courbe est la droite suivant laquelle se ure la plus courte distance de deux normales principales infi-ent voisines.

ORNU (A.). — *De la réfraction à travers un prisme suivant une quelconque.* (42 p.)

ARBOUX (G.). — *Mémoire sur les surfaces cyclides.*

auteur désigne sous ce nom les surfaces du quatrième ordre qui le cercle de l'infini pour ligne double, surfaces dont il a fait étude développée dans un Ouvrage spécial. ([1])

auteur montre, entre autres résultats, qu'il existe sur toute de une série de coniques sphériques, situées sur des sphères le centre décrit une cubique gauche ayant des relations remar-bles avec la surface. Il détermine les sections planes, qui sont ovales de Descartes, et les sections sphériques analogues aux les de Descartes. Le travail se termine par l'étude de certaines faces réglées, formées de normales aux cyclides, et analogues belles surfaces réglées trouvées par M. de la Gournerie.

DARBOUX (G.). — *Sur les relations entre les groupes de points, cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace.* (68 p.)

La théorie des tétraèdres et des distances mutuelles des points as le plan et dans l'espace doit à un grand nombre de géomètres formules élégantes, établissant des relations entre les aires, les umes, les distances, se rapportant aux groupes géométriques con-érés. Plusieurs équations importantes, dues à Euler, Legendre, La-nge, Carnot, Gauss, Joachimsthal, Cayley, Sylvester, von Staudt, beck, etc., ont été développées et démontrées par M. Baltzer as son *Traité des déterminants*. L'auteur se propose de montrer 'il peut y avoir, dans bien des cas, avantage à considérer ces for-les, en les rattachant à certaines formes homogènes qui se pré-ntent naturellement dans cette théorie.

Par exemple, pour le tétraèdre, cette forme homogène est celle i, égalée à zéro, représenterait la sphère circonscrite. Pour les

---

[1]) Voir *Bulletin*, t. V, p. 52.

ıules qui ont été données dans les Parties précédentes, par nple, la construction du cercle coupant trois cercles donnés sous angles donnés, coupant sous des angles égaux quatre cercles nés, ou ayant avec quatre cercles donnés une tangente commune même longueur, etc., et les problèmes analogues relatifs aux ères.

.e Mémoire se termine par la démonstration d'une identité remarıble, qui lie les puissances d'un point par rapport à cinq sphères. tte équation est homogène et du second degré; l'auteur y avait conduit depuis longtemps d'une manière indirecte par ses études les cyclides.

CARNOT (S.). — *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur machines propres à développer cette puissance.* (64 p.)

L'Ouvrage de Sadi Carnot était depuis longtemps épuisé. Tiré à petit nombre d'exemplaires, ce mémorable travail est resté longıps inconnu aux premiers auteurs de la Thermodynamique. st pour rendre service aux savants privés de la lecture d'un vrage resté presque inédit, pour rendre un hommage éclatant et eptionnel à la mémoire de Sadi Carnot, que la Rédaction des *nales scientifiques de l'École Normale* réimprime aujourd'hui *Réflexions sur la puissance motrice du feu.*

. II; année 1873.

PHILLIPS. — *Notes sur divers points de la Thermodynamique.* p.)

L'auteur traite: 1° des changements d'état d'un corps quelconque vant une ligne adiabatique; 2° des diverses formules qui donnent vitesse d'écoulement d'un gaz permanent par un petit orifice cé dans un réservoir; 3° d'une nouvelle forme des équations gé-ales de la Thermodynamique, et sur le coefficient économique cycles fermés réversibles.

DIDON (F.). — *Note sur une formule de Calcul intégral* [1]. p.)

[1] Cette Note et la suivante sont les derniers travaux d'un géomètre enlevé tout ie à la science, et qui donnait les plus belles espérances. Nous avons déjà ailleurs yé de rendre justice à sa mémoire, en nous faisant l'interprète des sentiments de camarades; mais nous tenons à renouveler ici l'expression des regrets de tous les tres et de tous les amis de Didon. G. D.

L'auteur démontre la proposition générale suivante, qui avait déjà fait l'objet des études de M. Laurent.

Si Δ désigne le déterminant fonctionnel de n fonctions bien déterminées $f(t, u, v, \ldots)$, $\varphi(t, u, v, \ldots)$, $\psi(t, u, v, \ldots)$, ... à n variables imaginaires $t, u, v, \ldots$, et s'il n'existe aucun système de points $t, u, v, \ldots$, pris le premier sur un contour fermé T, le deuxième sur un contour fermé U, le troisième sur un contour fermé V, etc., susceptible d'annuler ou de rendre infinie l'une quelconque des fonctions $f, \varphi, \psi, \ldots$, l'intégrale multiple d'ordre n

$$\int\int\int \ldots \frac{\Delta}{f(t, u, v, \ldots)\,\varphi(t, u, v, \ldots)\,\psi(t, u, v)\ldots}\, du\, dv\, dw \ldots$$

dans laquelle on fait parcourir à t tout le contour T, à u tout le contour U, etc., a une valeur de la forme $(2\pi\sqrt{-1})^n p$, p représentant un nombre entier.

... sur l'attraction. 6 p.

... la proposition suivante :

... on considère, relative... une surface d'égale ... de la masse sur tous les ... R, les droites suivant ... attraction sur tous les points de cette ... normales à une seconde surface, qui intercepte ... sur chacune de ces droites un segment égal au ... du potentiel de la masse attirante sur le point correspondant de la première surface.

... ensuite cette proposition, et la prend pour point ... quelques questions sur l'attraction.

... que Didon fait connaître dans sa Note sur l'attraction peut ... de Mécanique, et prendre la forme suivante : ... famille de surfaces, définie par une équation quelconque

$$V = F(x, y, z),$$

... différentes surfaces (V), en tous les points de l'espace pour lesquels

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = \varphi(V),$$

... à une même surface. »

KRETZ. — *Mémoire sur les conditions à remplir dans l'emploi du frein dynamométrique.* (29 p.)

DURRANDE (H.). — *Essai sur le déplacement d'une figure de forme variable.* (40 p.)

L'auteur se propose d'étudier le déplacement d'une figure dont es diverses parties peuvent se déformer suivant une loi donnée, mais telle cependant que deux positions de la figure puissent être onsidérées comme deux figures homographiques. Le mouvement 'un corps solide invariable est un cas particulier de celui que traite auteur; celui d'un corps naturel en est un également, si l'on suppose les déformations très-petites.

Le point de vue très-général auquel s'est placé l'auteur le conduit des propositions d'un réel intérêt. Plusieurs de ces propositions sont ouvelles, même quand on les restreint au cas d'un solide invariable.

D'ARLINCOURT. — *Nouveau relais.* (12 p.)

NIEWENGLOWSKI. — *Note sur la transformation des courbes par ayons vecteurs réciproques.* (4 p.)

NIEWENGLOWSKI. — *Sur les arcs de certaines courbes sphériques.* (12 p.)

ALLÉGRET. — *Mémoire sur la représentation des transcendantes ar des arcs de courbe.* (28 p.)

Le Mémoire débute par un résumé historique, et l'auteur signale 'abord la méthode de Jacques Hermann pour représenter les quaratures par des arcs de courbe, à une quantité algébrique près, insi que les formules analogues de Jean Bernoulli. Il expose ensuite ne autre méthode pour résoudre complétement le problème dans n grand nombre de cas, et rappelle les recherches de MM. W. Roerts et J.-A. Serret.

Le Chapitre IV est consacré à l'étude de la transformation expoentielle de Maclaurin et à diverses conséquences de cette méthode. es Chapitres suivants étudient les courbes que cette transformation ait dériver du cercle, de la ligne droite, des épicycloïdes, etc.

PHILLIPS. — *Note sur un théorème de Cinématique.* (4 p.)

Le problème résolu est le suivant : Étant données deux courbes uelconques MN, M″N″, trouver une courbe M′N′, qui soit telle que, IN roulant sur M′N′, un point a, invariablement lié à MN, écrive M″N″.

ey (A.). — *Sur la théorie des courbes et des surfaces dé-ables.* (24 p.)

ait que l'auteur a établi le premier ([1]) les formules rela-ux singularités des courbes gauches. Depuis, M. Cayley et then ont introduit la considération de singularités nouvelles, ier dans un article *On a special sextic developpable* ([2]), cond dans un Mémoire dont nous avons rendu un compte ([3]), et qui a paru dans les *Annali di Matematica*, 2e série, 1869.

eur se propose de reprendre et de développer cette théorie; ules ne comprennent pas moins de vingt et une singu-

e (R.). — *Déformation d'une sphère élastique pressée eux plans parallèles.* (8 p.)

ron (W.). — *Note sur* sin ∞ *et* cos ∞.

eur combat l'opinion de certains géomètres, qui prétendent ∞ = cos ∞ = 0.

sher (J.-W.-L.) — *Sur la sommation, par les intégrales ;, des séries géométriques du second ordre et des ordres urs.* (16 p.)

ey (A.). — *Sur un théorème relatif à huit points sur une* .

erches sur ce théorème connu : *Si un octogone est inscrit e conique, les côtés* 1, 3, 5, 7 *de cet octogone coupent les* , 4, 6, 8 *en huit points, formant un nouvel octogone dans une seconde conique.* M. Cayley démontre ce théo-t forme même l'équation de la nouvelle conique.

send (R.). — *Sur les analogues, dans la théorie des qua-, de plusieurs propriétés connues des coniques.* (15 p.)

liamson (B.). — *Sur le théorème de Gauss, relatif à la de la courbure en un point d'une surface.*

fiths (J.). — *Sur le cercle qui coupe trois cercles donnés s angles donnés.* (6 p.)

---

rnal de Liouville, t. X.
rterly Journal, t. VII; 1865.
r Bulletin, t. I, p. 139.

Townsend (R.). — *De l'attraction d'un ellipsoïde pour la loi de l'inverse de la quatrième puissance de la distance.* (20 p.)

L'auteur remarque qu'avec la loi qu'il a choisie le problème de l'attraction des ellipsoïdes est d'une solution extrêmement facile. Les résultats peuvent être obtenus d'une manière élémentaire, et ils sont d'une grande simplicité; par exemple, pour un point intérieur, les surfaces d'équilibre sont des ellipsoïdes semblables; pour un point extérieur, ce sont des surfaces homofocales.

Jeffery (H.). — *Sur les rayons principaux de courbure d'une surface rapportée à des coordonnées tétraédriques et tangentielles.* (26 p.)

L'auteur considère différents systèmes de coordonnées, et il associe dans ses recherches, aux lignes de courbure ordinaires, d'autres lignes qu'il appelle *dual lines of curvature,* et dont les propriétés sont en quelque sorte celles des lignes de courbure ordinaires, transformées par la méthode des polaires réciproques. L'auteur avait déjà étudié ces lignes dans un travail sur les conicoïdes concycliques [1]. M. Darboux les a aussi considérées, et en a donné quelques propriétés dans son Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques,* p. 178.

Ball (R.-St.). — *Notes de Mécanique appliquée.* (3 p.)

Cayley (A.). — *Sur une équation identique se rattachant à la théorie des invariants.* (4 p.)

Cayley (A.). — *Note sur les intégrales*

$$\int_0^{x^2} \cos x^2\, dx \quad et \quad \int_0^{x^2} \sin x^2\, dx.$$

(8 p.)

A propos de ces intégrales, l'illustre géomètre présente des remarques sur les intégrales doubles dans les cas où la courbe limite s'étend à l'infini; il montre qu'il faut tenir compte de la forme de cette courbe limite à l'intérieur de laquelle on intègre. Ainsi l'on peut avoir des résultats différents, suivant qu'on intègre à l'intérieur d'un rectangle dont on fait croître les dimensions, ou d'un cercle dont le rayon devient infini.

---

(1) *Quarterly Journal,* t. XI, p. 242.

WALTON (W.). — *Sur la* [illegible] *de la théorie des intégrales défini*[illegible]

GLAISHER (J.-W.-L.). — *Sur un*[illegible] celle de Riccati. (3 p.)

L'auteur examine l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} = a^2 u - \frac{i(i}{}$$ [illegible]

où il en exprime l'intégrale au moyen [illegible]

THOMSON (B.). — *Sur une con*[illegible] *nique d'un corps solide.* (8 p.)

WALTON (W.). — *Sur le développ*[illegible] *trigonométriques.* (2 p.)

L'objet de cet article est de donner [illegible]

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}$$ [illegible]

CAYLEY (A.). — *Sur la cyclide.* [illegible]

Dans cet article, l'auteur passe en [illegible] la cyclide de Dupin, qui a, comme on [illegible] dont deux au moins sont imaginaire[illegible] modes de génération de cette surface, [illegible] tions de forme simple, rationnelles ou [illegible] Il examine la cyclide du troisième deg[illegible]

GLAISHER (J.-W.-L.). — *Note sur* [illegible] (2 p.)

WALTON (W.). — *Sur l'expressio*[illegible] *d'un angle en fonction des puissance*[illegible] (4 p.)

La démonstration proposée est pure[illegible] l'emploi d'aucune équation différentiel[illegible]

MACMAHON (G.-M.). — *Démonstrati*[illegible] *rème fondamental.* (4 p.)

Relatif à la théorie des déterminants[illegible]

CAYLEY (A.). — *Sur les superligne*[illegible] *dans un espace à cinq dimensions.* (5 [illegible]

WALTON (W.). — *Sur l'évaluation des deux intégrales définies*

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{c^2}{x^2}\right)\cos\alpha} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left[\left(x^2+\frac{c^2}{x^2}\right)\sin\alpha\right]dx.$$

WALTON (W.) — *Sur l'évaluation de l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{(x^{m-1}-x^{-m})\,dx}{(1+x)\log x}, \quad où \quad 1>m>0.$$

CAYLEY (A.). — *Démonstration du théorème de Dupin.* (7 p.)

WALTON (W.). — *Note sur une des intégrales définies d'Euler*

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\sin x\,dx = \frac{1}{2}\pi\log\frac{1}{2}.$$

CAYLEY (A.). — *Théorème concernant le hessien d'une fonction quaternaire.* (4 p.)

M. Cayley considère la fonction $P^k+\lambda P'^{k'}$, où P, P' sont deux fonctions homogènes de degrés donnés. Le hessien de cette fonction est du quatrième ordre en λ. L'article en contient le développement complet, mis sous une forme simple.

CAYLEY (A.). — *Note sur la correspondance* (2, 2) *de deux variables.*

L'auteur entend par là une relation entre x, x' du second degré par rapport à chacune de ces variables. L'étude de cette relation a des rapports les plus étroits avec la théorie des polygones circonscrits et les théorèmes de Poncelet.

FROST (P.). — *Du potentiel moyen sur une surface sphérique.*

TOWNSEND (R.). — *Sur une construction dans la dynamique d'un corps rigide qui roule sans glisser sur une surface fixe rugueuse.* (3 p.)

L'auteur donne une élégante construction pour déterminer l'action de la surface sur le corps en grandeur et en direction.

WATSON (W.-H.). — *Du mouvement d'un point matériel rapporté à un espace en mouvement.* (10 p.)

TOWNSEND (R.). — *Sur une propriété de l'équilibre de deux*



RTS (S.). — *De l'ordre de la condition pour que deux s se touchent.*

SHER (W.-L.). — *Sur certaines séries pour le dévelop- de π.*

H (C.). — *Trouver les foyers et les axes d'une conique -données trilinéaires.*

N (R.). — *Sur l'intégration des équations exactes appli- au mouvement dans un plan d'un fil infiniment mince.*

NSEND (R.). — *Sur les courbes tautochrones et brachisto- s pour les forces parallèles ou concourantes.* (11 p.)

teur emploie les deux propositions suivantes :

ur des forces parallèles, toute courbe plane ou gauche, pour e $S^2 = \varphi(z)$, z étant l'ordonnée d'un point dans la direction rce, est tautochrone pour l'origine des arcs, pour une loi de donnée par la formule

$$Z = -\frac{1}{2} k^2 \varphi'(z),$$

constant.

ur des forces concourantes, toute courbe plane ou gauche, quelle $S^2 = \varphi(r)$, où r est la distance au centre d'attraction, ochrone pour une loi de la force exprimée par la formule

$$R = -\frac{k^2}{2} \varphi'(r). \text{ »}$$

icle contient le développement des nombreuses conséquences leux propositions :

TER (J.). — *Sur la méthode des factorielles de* W.-G. HORNER.

EY (A.). — *Sur une transformation spéciale du quatrième des fonctions elliptiques.*

on pose

$$X = (1 - x^2)(1 - k^2x^2), \quad Y = (1 - y^2)(1 - k^2y^2),$$

$$\frac{y+1}{y-1} = \frac{(1-k^2)x^2}{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

$$\frac{dr}{\sqrt{Y}} = \frac{2\,dx}{\sqrt{X}}.$$

[illegible] — *Sur les plans de rayons dans les cristaux* [illegible]

[illegible] — *Notes mathématiques.* (5 p.)

[illegible] — *Sur les caractéristiques plückériennes d'u*[illegible] *est un résultant ou un discriminant d*[illegible] (14 p.)

[illegible] — *Sur les solutions singulières.* (13 p.)

[illegible] — *Courbure des courbes et des surfac*[illegible]

[illegible] se propose de montrer comment les notions les pl[illegible] élémentaires sur le mouvement d'un corps solide conduisent a[illegible] principales formules relatives à la courbure.

[illegible] — *Sur les réciproques des lignes géodésiqu*[illegible] *sur un ellipsoïde, et sur ses podaire*[illegible]

[illegible] et énoncé de plusieurs propositio[illegible]

[illegible] — *Sur certains théorèmes généraux obten*[illegible]

[illegible] — [illegible] *du problème planétaire à u*[illegible] *constante.* (Traduit pa[illegible]

[illegible] M. Lipschitz de ses beaux travaux [illegible]

[illegible] — *Note sur l'optique géométrique.* (10 p.)

HANDLUNGEN DER MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU MÜNCHEN ([1]).

T. X et t. XI, 1re livraison; 1866-1871.

SEIDEL (L.) et LEONHARD (E.). — *Mesure de l'intensité lumi-use de deux cent-huit étoiles fixes, faites à l'aide du photo-ètre de Steinheil, pendant les années* 1852-1860. (118 p.)

STEINHEIL (C.-A. v.). — *Le chronoscope, instrument servant à terminer le temps et la hauteur du pôle sans calcul.* (31 p., pl. et 6 tableaux.)

BAUERNFEIND (C.-M.). — *Nivellement général de la Bavière.* 11 p., 1 pl.)

SEIDEL (L.). — *Sur les valeurs limites d'une exponentielle in-ie de la forme*

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}.$$

) p.)

Eisenstein, dans une étude de la fonction définie par l'équation

$$x^y = y,$$

ouve que la convergence de la fonction $x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$ est seulement pour les leurs positives de $x \leqq 1$. L'auteur démontre que cette fonction end des valeurs finies pour les valeurs de $x > 1$, jusqu'à $x = \sqrt[e]{e}$, établit les principaux résultats suivants :

En désignant par x_n la valeur de la fonction $x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$ correspondant nombre d'exposants n, alors, pour x compris entre o et $\frac{1}{e^e}$, la ite de x_{2n}, n croissant indéfiniment, est une certaine fonction u i croît de o à $\frac{1}{e}$ et la limite de x_{2n+1} est une autre fonction v croissant de 1 à $\frac{1}{e}$. Pour $x = \frac{1}{e^e}$, $v = u = \frac{1}{e}$. Pour des valeurs x plus grandes que $\frac{1}{e^e}$ jusqu'à la valeur limite de $x = \sqrt[e]{e}$, les

([1]) *Mémoires de la Classe mathématique et physique de l'Académie des Sciences de vière*, à Munich. — Publiés par fascicules in-4°, à des époques indéterminées.

›i dans sa *Theoria novi multiplicatoris*, a donné émonstration des équations remarquables par les- ɛprime, en coordonnées curvilignes générales, les astiques dans les milieux isotropes.

si l'on rapporte les divers points d'un milieu élas- e à des axes rectangulaires, les projections u, v, w, déplacement supposé infiniment petit d'un point M ›nt à trois équations linéaires à différences partielles : : ceci a lieu, que le milieu soit ou non isotrope; ; particulier des milieux isotropes, il se présente un e. Si, aux trois fonctions u, v, w on adjoint quatre ıires, à savoir : la dilatation cubique au point M et yennes autour d'axes parallèles aux axes de coor- ›ar ce point, ce qui porte à sept le nombre des fonc- ıer, ces sept fonctions satisfont à sept équations à elles du premier ordre.

a montré, c'est que ces sept équations se main- qu'elles ont d'essentiel, lorsque les déplacements :u d'être rapportés à des coordonnées rectilignes, le lonnées curvilignes orthogonales quelconques, et que M. Borchardt a de nouveau mis en lumière.

géomètre allemand, bien que n'étant peut-être pas ırts que ceux de Lamé, sont en eux-mêmes très- par leur élégance, et parce qu'ils font bien ressortir ; analytiques qui expliquent le résultat dû à Lamé; lant de près, on reconnaît que ce résultat est, en réa- :ométrique, et que les équations de Lamé ne sont pas l'expression analytique d'un théorème très-élémen- *rie pure,* établi en 1842 par Cauchy, sur ces quan- e géomètre a introduites dans la Science sous le nom *yennes*. En partant de ce théorème, il se trouve e les équations de Lamé presque sans calcul, et, .t fondamentales dans la théorie mathématique de us a paru qu'il y aurait peut-être quelque utilité à cette manière.

s équations dont il s'agit ne sont pas applicables *stiques,* ou du moins ne le sont que quand ces sur- rtées à leurs lignes de courbure, en sorte qu'elles

[illegible] d'u [illegible] à les condit [illegible]

[illegible] celle qui d [illegible] M. Bonnet pour la d [illegible] [illegible]

[illegible] d'un point M d [illegible] les projections [illegible] V, W les [illegible] du point M [illegible] les trois [illegible]

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

$$V = [illegible]$$

[illegible] curvilignes du point M [illegible] la ligne d'intersection de [illegible] la courbure de la sur [illegible]

[illegible] soient R, R₁, R₂ les [illegible] du point M sur les normale [illegible] les rayons moyennes accor [illegible]

[illegible] à une surface [illegible] le signe — ou le signe —, suivant [illegible] sur la partie positive ou sur la partie négativ [illegible]

s mêmes normales : R, R_1, R_2 ; $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ sont six fonctions des ordonnées ρ, ρ_1, ρ_2.

Supposons qu'on prenne pour axes des coordonnées x, y, z les rmales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2 passant au point M.

Alors, pour le point particulier M, origine des coordonnées, on ra

$$)\quad \begin{cases} u = R, & v = R_1, \quad w = R_2, \\ U = \mathfrak{R}, & V = \mathfrak{R}_1, \quad W = \mathfrak{R}_2. \end{cases}$$

Soit maintenant M′ un point pris sur la ligne s à une distance iniment petite $ds = \frac{d\rho}{h}$ de M. En négligeant les infiniment petits second ordre, les coordonnées rectilignes du point M seront

$$dx = ds = \frac{d\rho}{h}, \quad dy = dz = 0.$$

Soient $M'x'$, $M'y'$, $M'z'$ les normales aux surfaces ρ_i au point M′. s projections du déplacement de ce point sur ces normales sont

$$R + \frac{dR}{d\rho}d\rho, \quad R_1 + \frac{dR_1}{d\rho}d\rho, \quad R_2 + \frac{dR_2}{d\rho}d\rho,$$

si a, a', a'' ; b, b', b'' ; c, c', c'' désignent les cosinus des angles e les lignes $M'x'$, $M'y'$, $M'z'$ font respectivement avec les axes coordonnées Mx, My, Mz, les projections du déplacement de sur ces axes seront

$$)\quad \begin{cases} \left(R + \frac{dR}{d\rho}d\rho\right) a + \left(R_1 + \frac{dR_1}{d\rho}d\rho\right) b + \left(R_2 + \frac{dR_2}{d\rho}d\rho\right) c, \\ \left(R + \frac{dR}{d\rho}d\rho\right) a' + \left(R_1 + \frac{dR_1}{d\rho}d\rho\right) b' + \left(R_2 + \frac{dR_2}{d\rho}d\rho\right) c', \\ \left(R + \frac{dR}{d\rho}d\rho\right) a'' + \left(R_1 + \frac{dR_1}{d\rho}d\rho\right) b'' + \left(R_2 + \frac{dR_2}{d\rho}d\rho\right) c''. \end{cases}$$

Entre les neuf cosinus qui entrent dans ces expressions, il existe six relations d'orthogonalité qui, en négligeant les infiniment its du second ordre, peuvent s'écrire simplement

$$a = b' = c'' = 1, \quad b + a' = 0, \quad c + a'' = 0, \quad c' + b'' = 0.$$

is, puisque la ligne s est une ligne de courbure de la surface ρ,

étrique est immédiate [1],

$$\frac{1}{r_i^{(j)}} = \frac{h_i}{h_j}\frac{dh_j}{d\rho_i},$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= h\frac{dR}{d\rho} - \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}R_1 - \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}R_2, \\ \frac{dv}{dx} &= h\frac{dR_1}{d\rho} + \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}R, \\ \frac{dw}{dx} &= h\frac{dR_2}{d\rho} + \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}R. \end{aligned}\right.$$

prenant le point M′ successivement sur les lignes s_1 et s_2, on erait de même les expressions des dérivées partielles de u, v, w, ivement à y et à z. Mais, au lieu des neuf dérivées partielles de w, il est plus utile de chercher les neuf quantités suivantes, nt des significations géométriques :

Les trois dilatations linéaires suivant les normales Mx, My, ux trois surfaces coordonnées. La première est fournie par emière équation (7) ; les autres s'en déduisent par permutations antes :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= h\frac{dR}{d\rho} - \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}R_1 - \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}R_2, \\ \frac{dv}{dy} &= h_1\frac{dR_1}{d\rho_1} - \frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}R_2 - \frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}R, \\ \frac{dw}{dz} &= h_2\frac{dR_2}{d\rho_2} - \frac{h}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}R - \frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}R_1, \end{aligned}\right.$$

pour la dilatation cubique θ ou $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$,

$$\theta = hh_1h_2\left(\frac{d\frac{R}{h_1h_2}}{d\rho} + \frac{d\frac{R_1}{h_2h}}{d\rho_1} + \frac{d\frac{R_2}{hh_1}}{d\rho_2}\right).$$

Les trois quantités $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$, $\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}$, $\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$ que Saint-Venant a appelées les *glissements transversaux*. La se- e équation (7)

$$\frac{dv}{dx} = h\frac{dR_1}{d\rho} + \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}R$$

Leçons sur les coordonnées curvilignes, § 28.

tant deux constantes dépendant de la nature de la matière

mplaçant les seconds membres de ces expressions par les (8), (9) et (10), on aura les forces élastiques A_i et T_i en des déplacements R_i; par suite, on aura, au moyen des déplacements, les pressions sur un élément plan quelconque; méthode pourrait être facilement étendue aux corps hétéres, s'il y avait quelque intérêt à faire cette extension.

III.

erchons maintenant les dérivées partielles des fonctions U, V, omme nous avons cherché celles de u, v, w. Au premier abord, oblème semble beaucoup plus difficile, parce que les dérivées , V, W dépendent des dérivées du second ordre R, R_1, R_2; nous allons montrer que le théorème de Cauchy, auquel nous s fait allusion en commençant, lève la difficulté, et permet rire le résultat cherché, sans aucun calcul nouveau. Ce théoe peut être énoncé ainsi :

l'on déforme infiniment peu un milieu continu, élastique on, et que sur chacune des droites issues d'un de ses points M *porte une longueur égale ou proportionnelle à la rotation venne autour de cette droite, le lieu des extrémités des longueurs ainsi obtenues est une sphère passant par le point* M.

De là résulte : 1° que le diamètre de la sphère, passant par le nt M, est, de toutes les droites issues de ce point, celle pour laelle la rotation moyenne est maximum; cette rotation est ce que uchy nomme la *rotation principale;* 2° que la rotation moyenne our de toute autre droite issue de M est représentée par la protion sur cette droite de la rotation principale.

Ainsi les rotations moyennes U, V, W se projettent et, par suite, composent entre elles absolument comme les déplacements u, v (1). Or, pour établir les équations (5), et par suite, toutes celles

(1) On peut démontrer le théorème de Cauchy d'une façon très-élémentaire. Soient , z; x', y', z' deux systèmes d'axes rectangulaires. Soient m, n, p; m_1, n_1, p_1; n_2, p_2 les cosinus des angles que les x', y', z' font respectivement avec les x, y, z; n soient u, v, w; U, V, W les déplacements et les rotations moyennes relatifs aux miers axes; u', v', w'; U', V', W' les quantités analogues pour le second système

qui en découlent, nous n'avons fait que des projections; nous pou[rrions] rions donc répéter mot pour mot tous les raisonnements qui o[nt] conduit à ces équations, en substituant aux lettres u, v, w, R, R_1, [illegible] celles U, V, W et $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$. En particulier, nous retrouverions ain[si] les analogues des équations (11), de sorte que, en rapprochant l[es] membres extrêmes de ces équations, nous pouvons, sans nouve[au] calcul, écrire

$$
[illegible]\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{dV}{dz}-\frac{dW}{dy}&=h_1h_2\left(\frac{d\dfrac{\mathfrak{A}_1}{h_1}}{d\rho_2}-\frac{d\dfrac{\mathfrak{A}_2}{h_2}}{d\rho_1}\right),\\
\frac{dW}{dx}-\frac{dU}{dz}&=h_2h\left(\frac{d\dfrac{\mathfrak{A}_2}{h_2}}{d\rho}-\frac{d\dfrac{\mathfrak{A}}{h}}{d\rho_2}\right),\\
\frac{dU}{dy}-\frac{dV}{dx}&=hh_1\left(\frac{d\dfrac{\mathfrak{A}}{h}}{d\rho_1}-\frac{d\dfrac{\mathfrak{A}_1}{h_1}}{d\rho}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

IV.

[illegible] quelle que soit la position des axes des coordonnée[s] [illegible] qu'il s'agit d'un milieu élastique isotrope en équilibr[e] [illegible] axes quelconques, les sept fonctions u, v, w, U, V, [illegible] [illegible] équations suivantes :

[illegible] transformation

$$
[illegible]\qquad x=mx'+m_1y'+m_2z',
$$
$$
[illegible]\qquad y=nx'+n_1y'+n_2z',
$$
$$
[illegible]\qquad z=px'+p_1y'+p_2z';
$$

[illegible]

$$
[illegible]\ \frac{[illegible]}{[illegible]}-\frac{[illegible]}{dy}
$$
$$
[illegible]\left(\frac{[illegible]}{[illegible]}-\frac{[illegible]}{[illegible]}\right)+(m_1n_2-n_1m_2)\left(\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}\right),
$$

[illegible] $=$ [illegible], $m_1n_2-n_1m_2=p$, on a la pre[mière] [illegible] autres s'obtenant par symétrie,

$$
[illegible]\ W,
$$
$$
[illegible]\ W,
$$
$$
[illegible]\ W.
$$

[illegible]

1° Pour définir la dilatation cubique,

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}. \tag{13}$$

2° Pour définir les rotations moyennes,

$$\left\{\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right), \\ V &= \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right), \\ W &= \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

3° Entre les rotations moyennes et les composantes X, Y, Z suivant les axes de coordonnées de la force accélératrice rapportée à l'unité de masse

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} &= \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}\frac{d\theta}{dx} + \frac{\delta}{2\mu}X, \\ \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} &= \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}\frac{d\theta}{dy} + \frac{\delta}{2\mu}Y, \\ \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} &= \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}\frac{d\theta}{dz} + \frac{\delta}{2\mu}Z, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

où λ et μ sont, comme précédemment, les deux coefficients d'élasticité relatifs à la matière considérée, et δ sa densité.

Il s'agit de montrer que les sept fonctions R, R_1, R_2, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ et θ des coordonnées curvilignes ρ, ρ_1, ρ_2 satisfont aussi à sept équations à différences partielles du premier ordre; or cela est évident par ce qui précède. On aura :

1° Pour définir la *dilatation cubique* θ, l'équation (9).

2° Pour définir les rotations moyennes $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, les équations (11), en considérant les deux derniers membres de chacune d'elles.

3° Reste donc à trouver les équations équivalentes à (15). A cet effet, soient F, F_1, F_2 les projections sur les normales aux surfaces ρ_i de la force accélératrice rapportée à l'unité de masse. Les équations (15) ayant lieu, quelle que soit la position des axes de coordonnées, faisons, comme précédemment, coïncider ces axes avec les normales Mx, My, Mz aux surfaces ρ_i qui se croisent en M. Alors les premiers membres de ces équations sont égaux aux premiers membres, et par suite aux seconds membres des équations (12).

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

RÈGE (Dr. H.), ord. Professor an der Universität zu Prag. — ELEMENTE **ER** THEORIE DER FUNCTIONEN EINER COMPLEXEN VERÄNDERLICHEN GRÖSSE. **lit** besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemann's bearbeitet. **weite**, zum Theil umgearbeitete Auflage. — Leipzig, Verlag von B.-G. Teubner, 873 (¹).

Cet Ouvrage, dont la première édition a paru en 1864, est le **s** ancien Traité où se trouve exposée en corps de doctrine la **orie** fondée par Cauchy, complétée et simplifiée par les décou**rtes** de Riemann.

On possédait depuis longtemps de nombreuses formules fondées **r** l'emploi des quantités imaginaires, bien avant que l'on eût **sé** de considérer ces quantités comme des symboles d'impossibi**é**; mais c'est seulement à partir du moment où, se plaçant à un **int** de vue plus élevé, on a reconnu leur réalité et introduit **ur** représentation géométrique, que la théorie des quantités com**xes** a été véritablement fondée. Le premier pas dans cette voie **été** fait par Argand en 1806. Quinze ans plus tard, Cauchy, **oique** partageant encore les anciennes idées, établissait rigou**usement**, dans son *Analyse algébrique*, les bases du Calcul des **aginaires**, et bientôt il allait inaugurer, par l'invention du Cal**des** résidus, la série de ses prodigieuses découvertes, auxquelles **sage** de la notation géométrique, adoptée par lui dans ses der**res** productions, est venue ajouter la clarté et l'harmonie qui **que**-là leur faisaient défaut. Les travaux du grand géomètre ont **idement** fondé la théorie de ces quantités, auxquelles l'usage **d** maintenant à enlever le nom, désormais impropre, d'*imagi**res***. Il ne restait plus à ses successeurs qu'à la perfectionner.

a représentation géométrique, complétement satisfaisante pour **fonctions** à une seule détermination, était encore imparfaite **ur les** fonctions susceptibles de plusieurs valeurs. Riemann com**cette** lacune par l'ingénieuse conception de ses surfaces à plu-

---

(¹) DURÈGE (H.) professeur ordinaire à l'Université de Prague. — *Éléments de la rie des fonctions d'une variable complexe, principalement au point de vue des tions de Riemann*. Seconde édition, en partie refondue. — Leipzig, Teubner, 1873. **l.** in-8°, XII-223 p. Prix 1 Thlr. 20 Sgr.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] Chapitre I traite des fonctions [illegible] l'auteur considère exclusivement [illegible] homogènes, et [illegible] les règles du Calcul différentiel établies [illegible]

Dans le Chapitre III, où il est questi[illegible] déterminations, M. [illegible] explique [illegible] au moyen des sur[illegible]

Le Chapitre IV est consacré aux inté[illegible] variable complexe. L'auteur donne [illegible] stration du théorème de Cauchy relatif à [illegible]

prise le long du contour d'une aire à l'intérieur de laquelle la fonction est synectique. Il traite ensuite des intégrales prises autour d'un infini de la fonction, et auxquelles Cauchy a donné le nom de *résidus*.

L'étude du logarithme et de la fonction exponentielle, qui en est l'inverse, forme l'objet du Chapitre V.

Dans le Chapitre VI, M. Durège revient à la théorie générale; il démontre le théorème fondamental de Cauchy sur la représentation d'une fonction sous la forme d'un résidu, et il en tire les développements des fonctions en séries de puissances, infinies dans un seul sens ou dans les deux sens.

Le Chapitre VII comprend l'étude des valeurs infiniment grandes ou infiniment petites des fonctions tant uniformes que multiformes.

Dans le Chapitre VIII, intitulé *Intégrales*, M. Durège s'occupe d'abord des intégrales prises le long d'un contour fermé, puis des intégrales prises le long d'une ligne non fermée.

Ces premiers Chapitres sont restés à peu près tels qu'ils étaient dans la première édition. Des changements plus considérables ont été opérés dans le Chapitre IX, où l'auteur traite la difficile question de l'ordre de connexité des surfaces. Jusqu'à présent on avait bien démontré que le nombre q des sections transverses nécessaires pour transformer une surface donnée en une section simplement connexe est constant pour chaque surface; mais il restait à prouver que, réciproquement, tout système de q sections transverses, quelle que soit la loi de sa formation, changera nécessairement une surface à connexion $(q+1)^{\text{uple}}$ en une surface à connexion simple. Les nouvelles recherches de M. Durège lui ont permis de combler cette lacune importante.

Le Chapitre X, qui est le dernier de la nouvelle édition, a pour objet l'étude des modules de périodicité. L'auteur donne comme exemple l'inversion de la fonction logarithmique, de l'arc-tangente, de l'arc-sinus et de l'intégrale elliptique.

Le Chapitre XI de la première édition, relatif à la détermination d'une fonction d'après ses conditions de discontinuité, a été supprimé à cause des développements étendus qu'eût exigés l'état actuel de la question. L'ancien Chapitre XII a été fondu dans le Chapitre IX. J. H.

M. Strutt, à ce que les expérimentateurs n'ont pas pris assez de soin pour simplifier les conditions de leurs expériences. La théorie des tuyaux ouverts, en particulier, était restée incomplète ou même inexacte tant qu'on a voulu l'asseoir sur l'hypothèse que l'air reste immobile à l'extrémité ouverte du tuyau, jusqu'à ce que M. Helmholtz l'ait enfin établie ([1]), sous certaines restrictions, mais sans rien supposer sur ce qui se passe à l'extrémité ouverte.

M. Helmholtz a traité aussi la question des vibrations de l'air dans des cavités dont les trois dimensions sont très-petites par rapport à la longueur d'onde, et qui communiquent avec l'atmosphère par un ou plusieurs petits trous percés dans leurs surfaces. Le Mémoire de M. Strutt a pour objet de donner la théorie des vibrations de cette nature sous une forme plus générale.

Rankine (W.-J.-M.). — *Sur la théorie mathématique des lignes de courant, particulièrement de celles à quatre foyers et remontantes.* (40 p., 1 pl.)

L'auteur appelle *ligne de courant* (*stream-line*) la trajectoire d'une particule dans un courant permanent de fluide. Chaque trajectoire conserve constamment la même figure, et c'est le lieu d'une file de molécules qui se suivent continuellement. Le mouvement d'un courant permanent peut être représenté à l'œil par un groupe de lignes de cette nature. Ces lignes sont importantes à considérer dans l'architecture navale, quand on veut déterminer la forme d'un vaisseau, de manière que les molécules de l'eau glissent sur sa surface avec le moins de frottement possible.

Ces lignes ont été étudiées déjà par plusieurs auteurs ([2]). M. Rankine a montré, dans ses travaux antérieurs, qu'elles peuvent être ou *unifocales* ou *bifocales*, c'est-à-dire qu'elles peuvent être engendrées par la combinaison d'un mouvement progressif uniforme, avec un autre mouvement consistant dans une divergence des particules à partir d'un certain point ou foyer, suivie d'une convergence soit vers le même point, soit vers un point différent. Sui-

---

([1]) *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden* (*Journal de Borchardt*, 1860).

([2]) Stokes (*Cambridge Transactions*, 1842 et 1850). — Hoppe (*Quarterly Journal of Mathematics*, 1856). — Rankine (*Philosophical Transactions*, 1864; *Philosophical Magazine*, 1864).

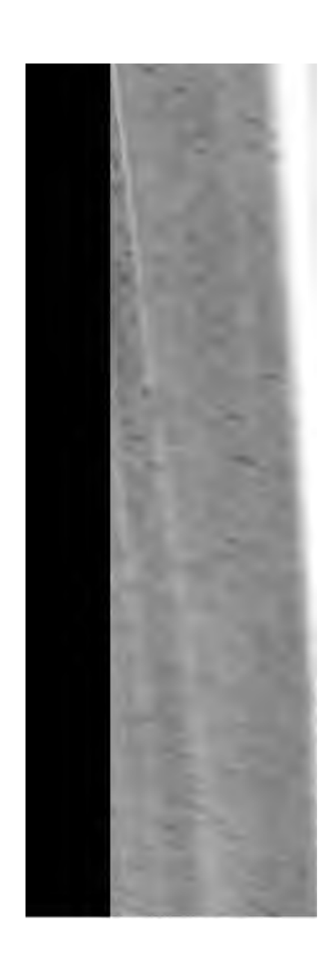
:e que la masse, en se solidifiant, s'est inégalement contractée; et
que, au-dessous du niveau de la mer, sous les montagnes et les plaines, il y a un déficit de matière à peu près égal à la masse qui s'élève au-dessus de ce niveau. Au-dessous du lit de la mer, il y aurait un excès de matière à peu près égal au déficit que présenterait l'Océan comparé avec la roche; de sorte que la quantité de matière renfermée dans une colonne verticale de même section, allant de la surface de la Terre jusqu'à une surface de niveau inférieure à la croûte, serait maintenant et aurait toujours été à peu près la même en tous les points de la Terre.

Cayley (A.). — *Sur le problème du triangle inscrit et circonscrit.* (44 p.)

Ce problème est un cas particulier de celui du polygone inscrit et circonscrit, lequel consiste à chercher un polygone tel, que ses sommets soient situés sur une ou plusieurs courbes données, et que ses côtés soient tangents à une ou plusieurs courbes données. On peut chercher d'abord quel est le nombre de ces polygones : lorsque les courbes contenant les sommets sont toutes distinctes des courbes tangentes aux côtés, le nombre des polygones s'obtient aisément et a une expression simple, savoir le double du produit des *ordres* des courbes contenant les sommets par les *classes* des courbes tangentes aux côtés; mais, lorsque plusieurs de ces courbes se confondent en une seule, et en particulier lorsque tous les sommets doivent être situés sur une courbe et tous les côtés tangents à cette même courbe, le nombre des polygones est beaucoup plus difficile à déterminer. Le présent Mémoire contient la solution complète de tous les cas du problème, lorsque le polygone se réduit à un triangle. Les principes et les méthodes peuvent toutefois s'étendre au cas d'un polygone quelconque, la solution étant fondée principalement sur le principe de correspondance.

Reed (E.-J.). — *Sur l'inégale répartition du poids et de la résistance dans les navires, et sur ses effets dans l'eau calme, dans la vague et dans des positions exceptionnelles à la côte.* (53 p., 6 pl.)

Roscoe (H.-E.) et Thorpe (T.-E.). — *Sur la mesure de l'intensité chimique de la lumière totale du jour à Catane, pendant l'éclipse totale du 22 décembre 1870.* (10 p., 1 pl.)



sphères d'inversion de la cyclide, et, en y incorporant les constantes, leurs équations sont liées par une relation identique

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 = 0.$$

» A l'aide de ces équations, j'ai montré que, en général, une quartique peut être engendrée de cinq manières différentes, comme enveloppe d'une sphère variable qui coupe orthogonalement une sphère donnée, et dont le centre se meut sur une quadrique donnée, quadrique à laquelle, en considération d'une de ses plus importantes propriétés, j'ai donné le nom de *quadrique focale* de la cyclide. Toute cyclide a, en général, cinq quadriques focales; ces quadriques focales sont confocales; leurs coniques focales sont les foyers doubles ou *nodo-foyers* de la cyclide.

» J'ai fait voir que les lieux des foyers isolés ou ordinaires des cyclides sont des sphéro-quartiques (courbes d'intersection d'une sphère et d'une quadrique). En général, une cyclide a cinq sphéro-quartiques focales. Si l'on appelle *confocales* deux cyclides ayant une sphéro-quartique focale commune, on peut faire passer par un point quelconque trois cyclides confocales avec une cyclide donnée; ces confocales sont orthogonales entre elles. Je donne encore d'autres méthodes pour engendrer les cyclides : ainsi, étant donnés trois cercles dans l'espace, dont les plans sont des plans diamétraux d'une sphère donnée, et qui sont orthogonaux à la sphère, une cyclide sera engendrée par un cercle variable dans l'espace, s'appuyant sur ces trois cercles. Cette méthode est analogue à celle qui sert à décrire les quadriques réglées par le mouvement d'une ligne.

» L'équation d'une cyclide peut s'interpréter de trois manières différentes, savoir, comme représentant : 1° une cyclide, 2° une sphéro-quartique, 3° un cône tangent à la cyclide. De là résulte que les sphéro-quartiques, tant par leur mode de génération que par un grand nombre de leurs propriétés, présentent une frappante analogie avec les cylindres. Ainsi la forme canonique de l'équation d'une sphéro-quartique est

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 = 0,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des cercles d'une sphère donnée U; les pôles des

pôles de α, β, γ, δ par rapport à U sont les sommets des c
cônes qui peuvent être décrits par la sphéro-quartique. Les
[illegible] de α, β, γ, δ, en incorporant les constantes, sont liée
une relation identique

$$\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2 = 0.$$

Au moyen de cette relation, qui a lieu aussi pour les quart
[illegible], on déduit les équations des quatre sphéro-con
[illegible] de la sphéro-quartique. Ces sphéro-coniques se constru
géométriquement comme intersections de U avec les perpen
[illegible] abaissées de son centre sur les plans tangents aux q
cônes que l'on peut faire passer par la sphéro-quartique. Les s
[illegible] focales sont confocales, leurs foyers étant les f
[illegible] de la sphéro-quartique.

[illegible] sphéro-quartiques peuvent être transformées par in
[illegible]; elles peuvent aussi être projetées suivan
[illegible] de deux manières : premièrement, sur l'u
[illegible] des plans des sections circulaires de la quadrique dont
[illegible] avec la sphère est la sphéro-quartique, au moye
lignes parallèles à l'axe maximum ou minimum de cette quadri
[illegible] par la projection elliptique, c'est-à-dire au mo
[illegible] lignes de courbure des quadriques confocales qui passent
[illegible] point de la sphéro-quartique. La développable formée
[illegible] plans tangents à la sphère U en chaque point de la sphéro-qu
[illegible] de nombreuses propriétés géométriques. Ainsi le c
[illegible] pour sommet le centre de U, et qui s'appuie sur son arête cu
[illegible] engendré par les lignes focales d'un cône varial
[illegible] un cône du second degré, et ayant un double contact a
[illegible] arête de rebroussement et les lignes nodales de la dé
[illegible] peuvent être projetées suivant la développée et les
[illegible] d'une quartique bicirculaire. La développable jo
[illegible] grand nombre de propriétés anharmoniques : ainsi toutes
[illegible] sont divisées homographiquement par les lignes
[illegible]

[illegible] sur l'inversion et la classification des c
[illegible] prouve que la présence ou l'absence de nœuds dépe
[illegible] relatives de la quadrique focale et de la sphère d'i
[illegible]. Ainsi, si elles se touchent, il y aura un nœud conique.

rclide étant, dans ce cas, l'inverse d'une quadrique, laquelle est a hyperboloïde ou un ellipsoïde, suivant que le nœud a un cône contact réel ou imaginaire. Si elles sont osculatrices, la cyclide ra l'inverse d'un paraboloïde; le nœud sera biplanaire, si le paraboloïde est elliptique ou hyperbolique; il sera uniplanaire, si le paboloïde est cylindrique. Si la quadrique focale et la sphère d'inrsion ont un double contact, la cyclide sera l'inverse d'un cône second degré, et aura deux nœuds, qui devront être des nœuds niques. Quand une cyclide a des nœuds, le nombre des quaiques focales éprouve une diminution. J'ai donné, dans les èmes Chapitres, les équations et les singularités des cônes tannts, et j'ai fait voir que, en général, toute cyclide a autant de cônes ublement tangents qu'elle a de quadriques focales; en effet, les nes doublement tangents sont les réciproques des cônes asymotiques des quadriques focales. On prouve aussi que les lignes ntersection d'une cyclide avec ses sphères d'inversion sont des nes de courbure de la cyclide, et que le cercle imaginaire à l'inii est une courbe flecnodale sur sa surface des centres.

» Dans le Chapitre sur la classification des sphéro-quartiques, i donné les caractéristiques de M. Chasles pour les cercles osculeurs d'une sphéro-quartique. Par inversion, on obtient les cactéristiques pour les cercles osculateurs des quartiques bicircures : ainsi $V = 24$ pour ces cercles. Dans le même Chapitre, les uations de M. Cayley, donnant les singularités des arêtes de reoussement des développables, sont transformées de manière à re connaître les singularités de la développée d'une courbe plane, int données trois quelconques des singularités de la courbe.

» Les deux derniers Chapitres contiennent une indication des bstitutions à l'aide desquelles, des propriétés des quadriques, on ut conclure les propriétés correspondantes des cyclides. Ces Chatres sont, en réalité, l'exposé d'une nouvelle méthode de transrmation géométrique; effectivement, puisque l'équation générale $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ que j'emploie est de la même forme que l'équation nérale d'une quadrique, si ce n'est que, dans ma méthode, les riables représentent des sphères au lieu de plans, on verra faciment que les théories des invariants, des figures réciproques, etc., ns la Géométrie des surfaces du second degré, ont leurs analoes dans la théorie des cyclides; et, en effet, les modes de dé-

AIRY (G.-B.). — *Expériences sur la puissance directrice des gros aimants d'acier, des barreaux de fer doux aimantés et des bobines galvaniques, dans leur action sur les petits aimants extérieurs.* (13 p.)

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA. — In-4° [1].

2e Série, t. IV; 1870-1871.

CHRISTOFFEL (E.-B). — *Sur un problème proposé par Dirichlet.* (9 p.)

Addition au Mémoire inséré, t. I (2e série) du même Recueil.

CODAZZI (D.). — *Sur les coordonnées curvilignes d'une surface et de l'espace.* (4e Mémoire, 15 p.)

Dans ce nouveau travail, l'auteur rappelle que l'abbé Aoust a introduit un élément géométrique nouveau, la *courbure inclinée,* qui simplifie la théorie des coordonnées curvilignes quelconques de l'espace. Il se propose d'étudier par une méthode particulière, et en employant les mêmes éléments que l'abbé Aoust, les relations entre les trois séries de surfaces déterminant un système de coordonnées curvilignes.

Il considère les neuf composantes obliques de la courbure ordinaire, les dix-huit composantes obliques de la courbure inclinée, et six autres quantités entre lesquelles il établit des relations finies ou aux dérivées partielles du premier ordre.

GEISER (C.-F.). — *Sur un théorème fondamental de la Géométrie.* (6 p.)

L'auteur examine certains modes de démonstration employés en Géométrie pure par M. Chasles et par d'autres géomètres; il adresse des objections à ce principe fondamental, que, si deux variables λ, λ' sont liées l'une à l'autre, de telle manière qu'à une valeur de chacune d'elles ne corresponde qu'une valeur de l'autre, la relation entre λ, λ' est de la forme

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0.$$

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 311, 370.

[illegible] — *Démonstration d'un théorème fondamenta[illegible] la théorie des fonctions de variables complexes.* (5 p.)

M. Laurent a [illegible] dans sa *Théorie des résidus*, le théor[illegible] suivant :

Si les fonctions [illegible] sont synectiques à l'intéri[illegible] d'une aire [illegible] et si la série

$$[illegible]$$

est convergente à l'intérieur de cette aire, ladite série représ[illegible] une fonction synectique à l'intérieur de l'aire, dont la dér[illegible] sera

$$[illegible] + \ldots,$$

et dont l'intégrale sera

$$\int [illegible]\, dz + \ldots + \int [illegible]\, dz + \ldots .$$

M. [illegible] se propose de donner une nouvelle démonstratio[illegible] ce théorème qui, du reste, nous croyons inexact.

[illegible] — *Sur le développement en série des intégrales [illegible] équations différentielles linéaires.* (14 p.; fr.)

Étant donnée l'équation

$$D(y) = \frac{d^m y}{dx^m} - p_{m-1}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} \cdots - p_1 y - p = 0,$$

[illegible] *intégrale principale relative à* x_0 l'intégrale de c[illegible] équation qui se réduit à zéro, ainsi que ses $m-1$ premières d[illegible] pour $x = x_0$. Cela posé, il remplace $D(y)$ par

$$D_1(y) - D_2(y) = D(y),$$

de telle manière que $D_1(y)$, $D_2(y)$ soient des fonctions linéair[illegible] homogènes de y et de ses dérivées, et que $D_1(y)$ contienne $\frac{d^m y}{dx^m}$ [illegible] que $D_2(y)$ ne contiendra que les dérivées d'ordre inférieur. [illegible] une intégrale de l'équation

$$D_1(y) = 0,$$

telle que [illegible] prennent, pour $x = x_0$, des val[illegible]

qui soient les mêmes que pour la solution cherchée. Alors, en posant

$$y = u_0 + u,$$

u sera l'intégrale principale appartenant à x_0 de l'équation différentielle

$$D_1(u) = D_2(u) + F_0(x),$$

où l'on a

$$F_0(x) = D_2(u_0) + p.$$

Soit u_1 l'intégrale principale appartenant à x_0 de

$$D_1(u) = F_0(x),$$

et posons

$$u = u_1 + v;$$

alors v sera l'intégrale principale de l'équation

$$D_1(v) = D_2(v) + F_1(x), \quad \text{où} \quad F_1(x) = D_2(u_1).$$

En continuant ces opérations, on trouve que

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_r + v_{r-1}$$

est une intégrale quelconque de l'équation (1), en supposant que u_ρ soit l'intégrale principale appartenant à x_0 de l'équation différentielle

$$D_1 y = F_{\rho-1}(x), \quad \text{pour} \quad \rho > 0,$$

et u_0 l'intégrale quelconque de l'équation

$$D_1(y) = 0,$$

et que les fonctions F soient liées par les relations

$$F_\rho(x) = D_2(u_\rho), \quad \rho > 0,$$
$$F_0(x) = D_2(u_0) + p,$$

et enfin que u_{r-1} soit l'intégrale principale appartenant à x_0 de l'équation

$$D_1 y = D_2 y + F_r(x).$$

L'auteur examine la loi de formation de ces fonctions, démontre la convergence du développement en série auquel il est ainsi con-

[illegible] applications [illegible] résultats publiés par [illegible] Journal de Liouville [illegible]

[illegible] — *De la représentation des surfaces* [illegible]

[illegible] théorie générale, puis il en fait application aux surfaces du quatrième ordre.

[illegible] — *Sur la surface* [illegible] *par les plans qui* [illegible] *courbe gauche du quatrième ordre et de la seconde espèce* [illegible] *point* [illegible] *cercle* [illegible]

[illegible] cette question pour la courbe gauche du quatrième ordre [illegible] espèce. M. [illegible] pour [illegible] la courbe de la seconde espèce [illegible] la courbe en quatre points [illegible] une surface de la quatrième classe, ayant huit [illegible] remarquables propriétés. Dans une [illegible] M. Cremona indique plusieurs théorèmes [illegible] surface.

[illegible] — *De l'emploi du principe des vitesses virtuelles* [illegible]

[illegible] — *Sur les fonctions abéliennes à quatre périodes.* [illegible]

[illegible] relations entre les intégrales abéliennes.

[illegible] — *Les séries* [illegible], *ou les séries* [illegible]

$$[\text{illegible}] = \frac{1-q}{1-q}\,\frac{1-q^{2}}{1-q^{2}}\cdots\frac{1-q^{n}}{1-q^{n}}\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q^{n+1}}\cdots\frac{1-q^{n+m}}{1-q^{n+m}}\cdots$$

[illegible]

[illegible] — *Sur les espaces à un nombre quelconque de dimensions.* [illegible]

[illegible] — *Sur les fonctions d'une variable complexe.* (16 p.)

t article traite du développement d'une fonction d'une variable ılexe dans un espace compris entre deux cercles concentriques, deux ellipses homofocales, etc., en supposant que l'on cone la partie réelle pour tous les points du contour, et la partie inaire en un point pris à l'intérieur.

NI (U.). — *Snr quelques formules générales de la théorie urfaces et sur leurs applications.* (32 p.)

auteur examine différentes hypothèses, en particulier les syss de coordonnées curvilignes formés avec les deux séries de lignes ptotiques, ou l'une de ces séries associée à ses trajectoires or-ɔnales, etc.

ıBERTS (W.). — *Sur les courbes équidistantes sphériques.* ; fr.)

EYR (Ed.). — *Note sur les fonctions dont les dérivées succes- forment des séries arithmétiques.* (3 p.; fr.)

INVIN (L.). — *Étude de la courbure en un point multiple e courbe plane.* (24 p.; fr.)

PSCHITZ (R.). — *Sur la théorie de l'inversion d'un système ɔnctions.* (21 p.)

RDELLI (G.). — *Quelques théorèmes de Statique rationnelle.* ɔ.)

EYR (Em.). — *De la correspondance du second ordre entre systèmes simplement infinis.* (9 p.)

auteur étudie ce mode de correspondance, dans lequel à un élét de chaque série correspondent deux éléments de l'autre. Il y a re points coïncidant avec leurs homologues. M. Weyr applique ésultats obtenus, notamment aux courbes gauches situées sur ɔerboloïde et à leurs perspectives.

INVIN (L.). — *Détermination des plans osculateurs et des ns de courbure en un point multiple d'une courbe gauche.* p.; fr.)

EYR (Em.). — *Sur les courbes gauches rationnelles.* (3 p.)

UTHEN (H.-G.). — *Note sur les quadriques polaires.* (7 p.;

L'auteur traite actuellement du second système de lignes de courbure situées sur des hyperboloïdes à deux nappes, et complète ainsi la solution du problème qu'il s'était posé.

COMBESCURE (E.). — *Sur diverses conditions d'intégrabilité et d'intégration.* (43 p.; fr.)

Ce Mémoire est divisé en articles : le premier traite de l'intégration d'une expression contenant une fonction déterminée de la variable indépendante et de ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé. L'auteur met sous une forme simple les conditions d'intégrabilité, et il étend ensuite la solution au cas où il y a plusieurs fonctions d'une variable indépendante.

Le troisième article traite de l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = f(x, y).$$

M. Combescure cherche dans quel cas il est possible d'intégrer cette équation, au moyen d'une expression contenant, en dehors de tout signe d'intégration irréductible, une fonction arbitraire de x et de ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé, la variable y pouvant entrer d'une manière quelconque dans l'intégrale.

Le quatrième article est relatif au Mémoire de Laplace sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre.

M. Combescure reprend l'analyse de Laplace, en présentant plusieurs remarques nouvelles, et en indiquant les moyens de simplifier l'emploi de la méthode.

Comme application, il démontre l'importante formule intégrale donnée par Poisson dans le XIXe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, pour l'équation

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\lambda}{x}\frac{du}{dx} + \frac{\mu}{x^2}u,$$

λ, μ étant des constantes réelles quelconques.

REISS (M.). — *Évaluation du nombre de combinaisons desquelles les vingt-huit dés d'un jeu de domino sont susceptibles d'après la règle de ce jeu.* (50 p.; fr.)

THOMAE (J.). — *Sur les limites de la convergence et de la divergence des séries infinies à termes positifs.* (10 p.; fr.)

Combescure (E.). — *Sur quelques problèmes relatifs à deux* *ries de surfaces*. (25 p.; fr.)

Le premier article contient le développement de plusieurs for- ules relatives au système triple orthogonal, formé de surfaces pa- llèles et de deux séries de développables.

L'auteur se propose ensuite le problème suivant : Étant données ux séries seulement de surfaces aux paramètres respectifs α, β, ux surfaces infiniment voisines du premier système, et deux rfaces infiniment voisines du second, donnent lieu, par leurs in- sections réciproques, à un canal quadrangulaire infiniment étroit, dont la section droite change, en général, de forme et de grandeur and on chemine le long de l'arête curviligne $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ ı demande que cette section droite reste toujours la même pour même canal infinitésimal.

Après avoir traité cette question, on demande seulement que la tion droite demeure toujours semblable à elle-même, ce qui con- ue un nouveau problème devant fournir toutes les solutions du écédent.

Aoust (l'abbé). — *Théorie des coordonnées curvilignes quel- iques*. (25 p.; fr.)

Dans la *première Partie* de sa *Théorie des coordonnées curvi- nes* (1), l'auteur a exposé les formules qui servent de fondement ette théorie. La *seconde Partie* (2) a été consacrée aux principales plications de ces formules à la Géométrie des surfaces et des irbes tracées sur les surfaces. L'auteur généralise ces résultats, déduit des mêmes formules une série de relations se rapportant x divers éléments des surfaces, relations importantes qui, par te de l'introduction de la courbure inclinée, prennent un carac- e remarquable de simplicité.

Schlaefli (L.). — *Quand est-ce que, d'une surface générale du isième ordre, il se détache une partie qui ne soit pas réellement ipée par tout plan réel?* (7 p.)

Siacci (F.). — *Sur quelques transformations des déterminants*. p.)

) *Annali di Matematica*, 1a Serie, t. VI.

) *Ibid.*, 2a Serie, t. II.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, herausgegeben von O. SCHLÖMILCH, E. KAHL und M. CANTOR. — In-8° (1).

T. XVIII; 1872.

MITTELACHER (C.). — *Sur la théorie générale des coniques.* (32 p.)

L'auteur développe d'abord différentes relations métriques entre les groupes de points et leurs polaires, et il en déduit ensuite les théorèmes fondamentaux de Pappus, de Carnot, de Ménélaüs, de Chasles, de Brianchon.

GEISENHEIMER. — *Sur les systèmes de rayons formés par les tangentes à une surface.* (25 p.)

L'auteur indique quelques propriétés de ces systèmes, et il démontre en particulier que les tangentes à un faisceau de lignes géodésiques d'une surface forment les normales d'une autre surface.

PERLEWITZ (P.). — *Recherches sur les cas dans lesquels un point attiré ou repoussé par deux centres fixes décrit une ellipse ou une hyperbole dont les foyers sont ces deux points.* (35 p.)

L'auteur, après avoir rappelé les recherches d'Euler, de Lagrange, de Legendre, de Jacobi, de MM. Liouville, J.-A. Serret et Königsberger, indique qu'il se propose d'examiner le cas particulier où la trajectoire est une conique. Ce cas est d'ailleurs très-étendu, et il méritait des recherches particulières. L'intégration est achevée au moyen des fonctions Θ.

ENNEPER (A.). — *Note sur l'équation biquadratique.* (3 p.)

SCHLEGEL (V.). — *Sur le poids spécifique des alliages.* (6 p.)

VOSS. — *Sur les coniques qui ont deux points communs.* (5 p.)

ECKARDT (F.-E.). — *Sur les normales à l'ellipse.* (4 p.)

GEER (VAN). — *Sur la théorie du mouvement rectiligne d'un point.* (6 p.)

Étant donnée une force répulsive inversement proportionnelle à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance, si on lance d'un point A vers le centre de répulsion un mobile avec une vitesse v_0, il se rapprochera

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 59.

ıules telles que

$$X + Yi = \varphi(x + yi).$$

que ces transformations sont les seules qui conservent les
:t la similitude des parties infiniment petites. M. Holzmüller
ıccessivement les exemples suivants :

$$X + Yi = \cos(x + yi),$$
$$X + Yi = \sin \mathrm{am}\,(x + yi),$$
$$X + Yi = \sqrt{1 - (x + yi)^2}.$$

:rnier conduit à des courbes du quatrième ordre bien con-
ui ont été d'abord étudiées par M. Siebeck, comme le rap-
ıuteur.

ERITZSCH (Th.). — *Contribution à la Mécanique des corps daux*. (28 p.)

ication à l'ellipsoïde des recherches précédentes de l'auteur istribution de l'électricité.

ER (F.). — *Relations entre le module des fonctions ellip- t les invariants de la forme biquadratique binaire*. (8 p.)

OWSKI. — *Générations de figures projectives courbes.*

R (R.). — *L'hexaèdre harmonique et l'octaèdre harmo-* (5 p.)

donnés par l'auteur : 1° à l'hexaèdre formé par trois couples
dont les arêtes d'intersection sont dans un même plan ; 2° à
e formé par trois couples de points dont les droites de jonc-
:oupent en un même point. On a alors cette proposition :
une surface du second ordre contient sept sommets d'un
e harmonique elle contient le huitième. »

ELFINGER (S.). — *Sur une proposition de la théorie des nants*. (3 p.)

ralisation d'une proposition donnée par M. Kronecker, t. **72** *nal de Borchardt*.

MILCH (O.). — *Sur quelques intégrales de forme géné-* p.)

le tome X du *Zeitschrift*, M. Schlömilch a démontré d'une

RAUCH (J.-J.). — *Équation de la ligne élastique pour une ctiligne chargée d'une manière quelconque.* (8 p.)

MAE (J.). — *Étude d'un problème de représentation con-* (6 p.)

EPER (A.). — *Sur quelques intégrales définies.* (8 p.)

ER. — *Sur l'histoire de la Théorie mécanique de la chaleur la théorie des gaz.* (9 p.)

NÄHEN (S.). — *Sur la surface minimum engendrée par une e.*

SLÖMILCH (O.). — *Sur la convergence ou la divergence simul-e de deux séries.* (1 p.)

ATTHIESSEN (L.). — *Résolution générale en nombres entiers équation*

$$y^2 = ax^2 \pm 1.$$

).)

IMONY. — *Bases d'une nouvelle théorie moléculaire dans l'hy-thèse d'une seule matière et d'un seul principe de force.* (48 p.)

SERSAWY (V.). — *Sur l'intégration des équations aux dérivées artielles.* (6 p.)

GILLES. — *La force d'inertie ramenée à la loi d'attraction de Newton.* (4 p.)

SCHLÖMILCH (O.). — *Sur les séries dont la convergence ne subsiste plus quand on prend tous les termes avec le même signe.* (2 p.)

Étant donnée la série

$$\varphi = f(0) - f(1) + f(2) - f(3) + \ldots,$$

si l'on change l'ordre des termes en faisant suivre p termes positifs de q termes négatifs, la nouvelle somme est égale à l'ancienne augmentée de

$$\frac{1}{2}\log\frac{p}{q} + \lim\left[\omega f(\omega)\right],$$

ω croissant indéfiniment.

SILLDORF. — *La transformation géométrique de l'espace.* (20 p.)

...e des distances des orbites, Pythagore n'y pouvait ... ni proportionnalité, mais seulement une analogie ...éloignée.

...-H.). — *Hypothèse astronomique de Philolaüs.*

...ilolaüs, la Terre tournait autour d'un Feu central ... au centre du monde; elle comptait, ainsi que le So... des planètes. Pour compléter le nombre 10 qu'il ...ur base de son harmonie céleste, il avait imaginé ..., situé entre la Terre et le Feu central, et toujours ... l'hémisphère terrestre que nous habitons. Dans son ...leil était une espèce de lentille recevant et condensant ...ffuse dans l'espace.

...P.). — *Notice sur les travaux de* Jules Plücker, *par* ...lebsch. (Traduit de l'allemand.) (29 p.; fr.)

...l est accompagné d'une Note sur les travaux physiques ...par M. le professeur Hittorf, et de la liste des travaux de ...

...de Haan. — *Notice sur* Meindert (Mathieu) Semeijns.

...Semeijns, savant hollandais du xviiie siècle (1708-1775), ...r d'une hypothèse sur le magnétisme terrestre. Pour ex... déviation du compas, il considérait la Terre comme for...ois sphères concentriques tournant autour du même axe ...vitesses différentes.

...mpagni (B.). — *Sur la vie et les travaux de* Meindert ... (7 p.)

... bibliographique accompagnée d'indications relatives aux ...le Semeijns.

...esi (A.). — *Biographie du P. Giovanni Antonelli,* ... (14 p.)

...mpagni (B.). — *Sur un Ouvrage de l'abbé N.-L. de la* ...ntitulé : « *Leçons élémentaires de Mathématiques* ».

...iée dans le *Bulletin*, t. III, p. 59; 1872.

Étude bibliographique sur les diverses éditions françaises, latines, italiennes et grecques de ce livre.

Sédillot (L.-Am.). — *Lettre à M. Boncompagni au sujet d'une Note de M. Th.-H. Martin.* (3 p.; fr.)

Hankel (H.), traduit par Keller (Ph.). — *Sur un volume intitulé : « Geschichte der mathematischen Wissenschaften. I. Theil. » Von den ältesten Zeiten bis Ende des 16 Jahrhunderts. Von » Dr Heinrich Suter. — Zürich, 1872 »* ([illegible]).

Indication de quelques erreurs contenues dans l'Ouvrage de M. Suter.

Menabrea (F.-L., comte). — *Sur un écrit de M. le professeur A. Genocchi. Lettre à M. Boncompagni.* (5 p.)

Sédillot (L.-Am.). — *Sur quelques points de l'histoire de l'Astronomie ancienne, et en particulier sur la précession des équinoxes. Lettre à M. Boncompagni.* (12 p.; fr.)

Hankel (H.), traduit par M. Keller (Ph.). — *Histoire des Mathématiques chez les Arabes.* (59 p., 1 pl.)

Cette étude intéressante est extraite d'un travail que l'auteur préparait sur l'Histoire générale des Mathématiques [2]. Voici les titres des Chapitres :

I. Introduction de l'Astronomie indienne chez les Arabes.
II. Traduction arabe des écrits mathématiques des Grecs.
III. Astronomes et mathématiciens du IXe siècle.
IV. Astronomes et mathématiciens du Xe et du XIe siècle.
V. Astronomes et mathématiciens d'Espagne.
VI. Astronomes et mathématiciens d'Orient, du XIIIe au XVIe siè
VII. Signes numériques des Arabes.
VIII. Arithmétique élémentaire.
IX. L'Algèbre et son origine.
X. Développement ultérieur de l'Algèbre.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. VI, p. [illegible].

[2] Depuis que ces lignes sont écrites, nous avons appris avec regret la mo[illegible] [illegible] enlevé à la Science le 29 août 1873, à l'âge de tr[illegible] [illegible] ans. [illegible] doit paraître à la librairie Teu[illegible] à Leipzig. [illegible] traduction française. (*Note de la Rédac*[illegible]

XI. Arithmétique théorique et Analyse indéterminée.
XII. Géométrie.
XIII. Construction des équations cubiques.
XIV. Trigonométrie.
XV. Les Tables trigonométriques.

STEINSCHNEIDER (M.). — *Vie des Mathématiciens arabes, tirées d'un Ouvrage de* BERNARDINO BALDI; *avec des Notes.* (108 p.)

Bernardino Baldi, d'Urbino (1553-1617), premier abbé de Guastalla, a laissé un Ouvrage intitulé *Delle Vite de' Matematici,* dont M. le prince Boncompagni possède trois exemplaires manuscrits, l'un autographe. M. Steinschneider a extrait de cet Ouvrage quatorze articles contenant les biographies des savants arabes dont voici les noms : Messala, Alfagranus, Alkindi, Albumazar, Thebit, Albategnius, Almansor, Alhazen, Ali Abenrodan, Punicus, Ali Abenragel, Arzachel, Geber, Alpetragius, et il les a publiées avec des Notes étendues, historiques et critiques.

GENOCCHI (A.). — *Remarques sur une Lettre de M. le comte L.-F.* MENABREA ([1]). (8 p.)

Réponse aux critiques adressées par M. Menabrea aux travaux de Félix Chiò sur la série de Lagrange, travaux approuvés par l'Académie des Sciences de Paris.

CARINI (I.). — *Sur les Sciences occultes au moyen âge, et sur un codex de la famille Speciale.* (2 p.)

Compte rendu de cet Ouvrage par M. le prince Boncompagni.

A. P.

REVUE DES PUBLICATIONS NORVÉGIENNES.

LIE (Sophus). — *Sur la théorie des problèmes différentiels.* (Forh. i Chr., 1872, p. 132-133.)

Courtes indications relativement à plusieurs théories nouvelles. L'Auteur attire en même temps l'attention sur ce fait, que ces nouvelles théories, publiées simultanément par M. Mayer et par lui-

([1]) Voir *Bulletin,* t. IV, p. 246, et l'article de M. Menabrea, mentionné ci-dessus, p. 254.

même au commencement de l'année 1872, ramènent le Prol des trois Corps à la recherche d'une intégrale de chacun des sys de six, de quatre et de deux équations différentielles ordinaire considère.

LIE (S.). — *Sur la théorie des invariants des transform tangentielles*. (Forh. i Chr., p. 133-135.)

Soient $f_1, \dots, f_r$ des fonctions données de $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots$ et supposons qu'il soit toujours possible d'exprimer (f_i, f_k) en tion des f: les équations linéaires

$$(f_1, \varphi) = 0, \dots, (f_r, \varphi) = 0$$

forment un système complet. Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n-r}$ les solutions munes de ces équations; on pourra, comme on sait, exp (φ_i, φ_k) en fonction des φ. Les deux groupes de fonctions f et en relation de réciprocité complète. Il y a un certain nombre fonctions F de $f_1, \dots, f_r$, qui donnent

$$(f_1, \mathrm{F}) = 0, \dots, \ (f_r, \mathrm{F}) = 0.$$

Les deux nombres r et m sont les seules propriétés du groupe subsistent sans altération dans une transformation tange quelconque. Là-dessus se fondent d'importantes théories d gration.

LIE (S.). — *Nouvelle méthode d'intégration des équation dérivées partielles du premier ordre entre n variables* (F Chr., 1872, p. 28-34).

Par des considérations sur les variétés (*Mannigfaltigk n*-uplement étendues, l'auteur établit une nouvelle méthode tégration. D'après cette méthode, l'intégration d'une équatio

$$\mathrm{F}(z, x_1, \dots, x_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}) = 0$$

n'exige que la détermination d'une seule intégrale de chacu systèmes considérés de $2n-3$, $2n-5, \dots, 5, 3, 1$ équation férentielles ordinaires.

LIE (S.). — *Court résumé de plusieurs nouvelles théories*. (I i Chr., p. 24-27.)

Pour que les équations

$$z' = F_0(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$
$$x_i' = F_i(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

léfinissent une transformation tangentielle, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$[F_i, F_k] = 0, \quad (i = 0, 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n).$$

Il est convenable de généraliser la notion de caractéristique donnée par Monge. Si l'on connaît une solution, renfermant trois paramètres, de l'équation de Monge et d'Ampère

$$rt - s^2 + Ar + Bs + Ct + D = 0,$$

il est possible de trouver une transformation tangentielle qui ramène la même équation à la forme linéaire

$$ar + bs + ct + d = 0.$$

Cette remarque simplifie beaucoup la théorie de ces équations donnée par Ampère.

Guldberg (C.-M.). — *Sur le mouvement de l'eau dans les conduites.* (Polyteknisk Tidsskrift, 6e cah., 1871, p. 1-8.)

Après une courte revue des travaux de Colding, de Levy et de Hagen, l'Auteur expose ses propres recherches. Il traite particulièrement des conduites rectangulaires; la formule qu'il établit est analogue à celle qui a été donnée auparavant par Levy dans le cas d'une section circulaire.

Guldberg (C.-M.). — *Théorie des courants de l'eau et de l'air à la surface de la Terre.* (Polyteknisk Tidsskrift, 3e cah., 1872, p. 1-9.)

L'auteur passe d'abord en revue les travaux de Colding; puis viennent ses propres recherches, qui se rapportent au Gulf-Stream et au mouvement de l'air dans les ouragans. Il donne une formule pour ce dernier phénomène.

Guldberg (C.-M.). — *Remarques sur la formule pour la mesure des hauteurs par le baromètre.* (Forh. i Chr., 1872, p. 120-131.)

Discussion de l'importance relative des quantités qui entrent la formule pour la mesure barométrique des hauteurs.

Guldberg (A.-S.). — *Sur la résolution des équations du sec du troisième et du quatrième degré.* (Forh. i Chr., 1872, p. 169.)

Tables pour le calcul numérique, avec une explication.

S. L.

MÉLANGES.

FRANÇOIS-XAVIER DE ZACH.

Parmi les savants de la génération précédente, dont l'influen les développements de l'Astronomie a été considérable, san leurs noms soient restés attachés à quelque théorème importa à quelque grande découverte, il faut placer en première lig baron de Zach, dont Lalande pouvait déjà, en 1803, dire san gération : « Aucun des astronomes vivants n'a été plus uti progrès de la Science », bien que de Zach ne fût pas, à bea près, l'astronome le plus éminent de son temps.

Franz Xaver von Zach, né à Pest, le 13 juin 1854, d'une fa distinguée, mais sans fortune, fut élevé, paraît-il, dans un co de Jésuites, où il reçut d'abord, conformément à ses dispos naturelles, une instruction mathématique; mais il y conç même temps contre cet ordre une aversion qui le domina pe toute sa vie. Le passage de Vénus, pendant l'été de 1769, grande comète qui apparut dans l'automne de la même anné terminèrent, dès cette époque, la vocation du jeune homme l'Astronomie, et le Traité de Lalande, qui venait alors de par fut son premier guide.

A l'exemple d'un de ses frères aînés (le futur général d'arti Antoine de Zach), François-Xavier, après avoir terminé ses ét entra, en 1775, dans l'armée autrichienne, parvint à peu pr grade de capitaine, et ne tarda pas à être nommé à une chai Mécanique, créée exprès pour lui à Lemberg, mais que, à la

Marie-Thérèse, on supprima pour cause d'économies, en pro-
ettant toutefois à Zach de songer à lui à la première vacance.
Zach, goûtant peu la perspective d'une attente indéfinie, partit
1783 pour l'étranger; il employa l'été de cette même année à
rfectionner son instruction à Paris, où il fit la connaissance de
lande, de Laplace, de Bochart de Saron, etc.; au mois de no-
mbre suivant il partit pour Londres, où il se mit en relation avec
askelyne, Herschel, Ramsden, Emery, etc., et particulièrement
ec l'envoyé de Saxe, le comte Henri de Brühl, amateur zélé de
Astronomie, qui possédait un observatoire privé dans les environs
Londres. Zach plut tellement au comte, que celui-ci le prit dans
maison en qualité de correspondant (*informator*) et d'homme
compagnie, l'introduisit partout, l'emmena dans ses voyages,
ef lui fit une position aussi sûre qu'agréable. Ainsi Zach passa
utomne de 1784 chez lord Egremont, beau-fils du comte, à
etworth-House; là il découvrit les papiers scientifiques posthumes
célèbre Harriot, sur lesquels il fit paraître une Notice, et il
blia, entre autres, les précieuses observations de la comète de
307, consignées dans ces papiers, et qui servirent plus tard à Bes-
l de base pour un nouveau calcul de cette comète (la comète de
alley). Ainsi, dans l'été de 1785, il accompagna le comte à
ruxelles, puis à Dresde, fit de là une échappée à Berlin pour voir
ode, et en novembre retourna avec son protecteur à Londres, en
ssant par Paris, après avoir, pendant tout son voyage, déterminé
position de chaque lieu à l'aide du sextant et du chronomètre.
insi, pour citer encore un dernier fait, il fit connaissance, sans
oute encore par l'intermédiaire du comte, avec le duc Georges de
larlborough, qu'il alla voir, paraît-il, dans son observatoire de
lenheim, dans l'Oxfordshire, et il fut certainement à Oxford, où
fit sur Harriot une lecture qui lui valut le diplôme honoraire de
octeur en droit.

Tandis que Zach vivait ainsi auprès du comte de Brühl, un des
nis de celui-ci, comme lui amateur passionné de l'Astronomie, le
ic Ernest de Saxe-Gotha, le pria de lui venir en aide pour l'ac-
uisition de bons instruments, destinés à un observatoire qu'il pro-
tait de construire. Le comte accepta la commission, et lui de-
anda en même temps s'il possédait un bon astronome pour son
ouvel observatoire, en lui recommandant si chaudement Zach pour

cet emploi, que le duc Ernest s'empressa de l'engager. En c
quence, Zach partit pour Gotha (30 mai 1786), où il arr
22 juin suivant; aussitôt il sut décider le prince à se rend
même en Angleterre, pour y visiter les observatoires et les a
et y faire les commandes nécessaires. Ce voyage eut lieu, en
du 5 juillet au 11 septembre.

A peine de retour, Ernest résolut de conduire dans le mid
France sa femme, dont la santé était affaiblie, et d'emmene
avec lui. Zach partit donc pour Hyères, en passant par Fra
Lyon et Marseille, et là, avec les instruments qu'il avait emp
il dressa un petit observatoire sur une tour d'un fort et y tr
avec activité. Au printemps de 1787 il alla à Gênes et à M
puis à Genève et à Chamounix; dans l'automne il revint à G

Pendant le même automne, Zach dressa le plan d'un nouv
servatoire sur le Seeberg, près de Gotha, et, après que ce pl
été approuvé, il en détermina la méridienne et l'on comme
fondations. Pour ne pas rester inactif pendant la constructi
l'édifice, il fit en même temps disposer l'aile orientale du ch
de Friedenstein pour l'installation provisoire des instrumen
étaient déjà arrivés; en sorte que, de 1787 à 1791, il put dét
ner de nombreuses positions du Soleil et des étoiles. Il alla
per alors le nouveau bâtiment, achevé avec succès dans tout
parties, et dont Lalande, qui le visita lui-même en 1798, d
rendant compte de sa construction : « L'observatoire de Got
le plus beau et le plus utile qu'il y ait en Allemagne; M. le
a dépensé plus de 200 000 francs; aucun prince de ce sièc
donné ni suivi cet exemple. »

Zach ne manqua pas non plus d'aides pour les observatio
les calculs. Sans parler de la part considérable que l'auguste c
prit à ces travaux — car la duchesse elle-même était une
bile et laborieuse calculatrice — il eut presque toujours le
heur de pouvoir appeler auprès de lui des jeunes gens de ta
désireux de se familiariser, sous sa direction, avec l'Astron
pratique. Nous citerons parmi eux :

Peter Niewland, qui fut plus tard professeur éminent d'A
nomie à Leyde, mais qui, malheureusement, mourut très-je

Gottlieb-Friedrich Bohnenberger, d'abord théologien, puis
fesseur d'Astronomie à Tubingue, et qui, inspiré par Zach, c

posa, aussitôt après son départ du Seeberg, son excellent Livre *Sur la détermination des positions géographiques* (¹);

Johann-Carl Burckhardt, qui, avec la recommandation de Zach, vint à Paris, y traduisit la *Mécanique céleste* de Laplace, fut reçu membre du Bureau des Longitudes, et, après la mort de Lalande, dans la maison duquel il habitait, devint son successeur à l'Observatoire de l'École Militaire.

Jan-Frederic van Beeck-Calkoen, qui exerça depuis avec distinction les fonctions de professeur d'Astronomie à Leyde;

Johann-Caspar Horner, qui se signala plus tard comme astronome-navigateur dans le voyage autour du monde de Krusenstern, occupa ensuite une chaire de Mathématiques dans sa ville natale de Zurich, et s'est fait surtout connaître par ses excellents articles dans la nouvelle édition du *Dictionnaire de Physique* de Gehler;

Johann-Tobias Bürg, qui, bien que déjà astronome-adjoint à l'Observatoire de Vienne et couronné pour le calcul de ses Tables de la Lune, n'en vint pas moins chercher pendant plusieurs mois au Seeberg les savants entretiens de Zach;

Et, avant tous, le conseiller de finances Bernhard von Lindenau, qui commença tard, mais avec grand succès, ses études astronomiques, fut dans la suite le successeur de Zach au Seeberg, et enfin, comme président du Conseil des ministres de Saxe, mérita par ses services la reconnaissance de son pays.

Tandis que Zach faisait ainsi de son Seeberg une pépinière de bons astronomes praticiens, il travaillait en même temps à différents Ouvrages scientifiques. Sans parler de quelques écrits d'actualité sur une opposition d'Uranus, sur la latitude d'Erfurt, etc., d'une traduction annotée de l'*Eloge de Bailly*, par Lalande, etc., nous citerons en première ligne les *Tabulæ motuum Solis novæ et correctæ*, publiées par lui en 1792, aux frais du duc Ernest, à qui elles étaient dédiées. Comme suite à ces Tables, il publia en 1804, peu après la mort du duc et comme hommage à sa mémoire, les *Tabulæ motuum Solis novæ et iterum correctæ*, puis, en 1809, les *Tables abrégées et portatives du Soleil*. En seconde ligne, nous mentionnerons les *Tabulæ aberrationis et nutationis*, dédiées au

(¹) *Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung, vorzüglich vermittelst des Spiegelsextanten*. Göttingen, 1795.

duc Georges de Marlborough, qui l'avait aidé de ses conseils (son argent, et suivies, en 1812, des *Nouvelles Tables d'aberra et de nutation*. Toutes ces Tables, étant très-maniables et nant, en outre, de bons résultats, furent très-bien accueillies, co le furent surtout les Catalogues d'étoiles qu'il y joignit, et dont comprenait 381 étoiles fondamentales, et l'autre, 1830 étoile diacales. Le premier, fondé sur des observations faites par quand il était encore au château de Friedenstein, s'accordait bien avec les travaux analogues de Delambre et de Laland qui faisait dire à celui-ci : « L'accord qui se trouve dans nos r tats forme une preuve de l'exactitude à laquelle nous somme trois parvenus. » Le second, dont les ascensions droites avaie obtenues par Zach au Seeberg, à l'aide de l'instrument de sages de Ramsden, parfaitement construit et parfaitement tandis que les déclinaisons avaient été, pour la plupart, dét nées par Lalande au cercle mural de l'École Militaire de Paris sentait, d'après ce dernier astronome, surtout pour les ascen droites, une exactitude supérieure à celle de tous les Catal précédents.

A ces travaux scientifiques importants il faut ajouter e l'édition faite par Zach de l'excellent Mémoire d'Olbers *Sur l termination de l'orbite des comètes* (¹), d'autant plus que l'augmenta d'une remarquable Préface, de quelques additions plémentaires, et d'un Catalogue de toutes les comètes obs jusqu'alors. Citons également son édition du nouvel Atlas cé dressé par Goldbach et revu par lui.

Un épisode marquant dans la vie de Zach fut le Congrès nomique tenu en août 1798 à l'Observatoire du Seeberg, e l'idée fut inspirée d'abord par une visite de Lalande, ann pour cette époque, et par le souhait exprimé par le célèbre astro de pouvoir faire, à cette occasion, la connaissance personne Bode. Sans un avis envoyé d'Angleterre à diverses cours d magne, et portant « qu'un astronome français pourrait très s'occuper d'autres révolutions que des révolutions célestes en vertu duquel, par exemple, le permis de voyage den

---

(¹) *Abhandlungen über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn ei meten aus einigen Beobachtungen zu berechnen*. Weimar, 1797.

par les astronomes autrichiens ne leur fut pas accordé, un plus grand nombre de savants auraient pris part à cette réunion. Malgré cela, outre Lalande et sa nièce, Mme Le Français, qui l'accompagnait, outre Zach et son aide Horner, on compta encore, parmi les membres présents, Bode, de Berlin; Klügel, Gilbert et Pistor, de Halle; Seyffer, de Göttingue; Wurm, de Nürtingen; Köhler et Seyffert, de Dresde; Schaubach et Feer, de Meiningen, et Huber l'aîné, de Bâle. Ce dernier ne put prendre aucune part aux travaux, car il tomba malade et mourut. Le Congrès dura une dizaine de jours, employés soit en entretiens libres et en excursions de toute espèce, soit en séances régulières. Les discussions et les résolutions eurent pour objet l'emploi du temps moyen et des mesures métriques pour les données scientifiques; l'introduction de quelques nouvelles constellations, proposées par Lalande et par Bode; un vœu, demandant des observations plus fréquentes des culminations lunaires, etc. D'autre part, il ne fut pris aucune décision relativement à la convenance de la division décimale du quadrant, et il ne fut même pas question de l'introduction du nouveau Calendrier français, déjà très-impopulaire dans le pays même qui l'avait vu naître. Malheureusement, le temps fut presque toujours mauvais, de sorte qu'il ne fut guère possible de songer à faire usage des instruments que l'on avait sous les yeux. On put, du moins, se rendre, le 14 août, à une invitation de la duchesse, à l'Inselsberg, où l'on emporta des chronomètres et des sextants, de sorte que Lalande eut l'occasion de se convaincre par lui-même des grands avantages pratiques de ces derniers instruments, vantés si souvent par Zach. On quitta Gotha, en se promettant mutuellement de s'y réunir de nouveau dans quelques années.

Dès le commencement de cette même année 1798, Zach avait inauguré la publication d'un Journal consacré à l'Astronomie et à la Géographie, qui parut d'abord sous le titre de *Allgemeine geographische Ephemeriden,* et, deux ans après, sous celui de *Monatliche Correspondenz.* Cette fondation rendit les plus grands services aux deux sciences qu'elle eut d'abord pour objet, et Zach, par cette seule entreprise, s'acquit des droits tout à fait exceptionnels à la reconnaissance des savants. Le journal eut un plein succès, Zach ayant trouvé, d'une part, dans Lalande, Laplace, Méchain, Delambre, Olbers, Humboldt, Gauss, Bessel,

Schröter, Bohnenberger, Piazzi, Oriani, Herschel, Troughton, d'excellents collaborateurs, et, d'autre part, ayant su diriger ce cueil de telle manière, qu'il ne devint pas seulement nécessaire gens du métier, mais encore qu'il intéressa les amateurs d'A nomie, et qu'il gagna à cette science de nombreux amis. Auj d'hui même, plus d'un demi-siècle s'est écoulé, et l'on éprouve en une véritable jouissance à parcourir ces vieux volumes; seule on ne peut s'empêcher de regretter que l'époque actuelle ne offre rien de semblable. D'ailleurs l'immense utilité de ce Jo apparaît d'une manière éclatante dans l'histoire de la décou des petites planètes, Zach lui-même ayant pris à toutes les pér de cette découverte une telle part, que nous ne pouvons nou penser ici d'en donner un rapide aperçu.

Son attention ayant déjà été appelée, à plusieurs reprises, grande lacune existant entre Mars et Jupiter, Zach voulut s'occuper de cette question. Dès 1785, il communiqua à Bode seulement ses idées sur ce sujet, mais encore les éléments planète qu'il supposait située dans cette lacune; et, dans sa sion du ciel étoilé, commencée à Friedenstein en 1787, il tra d'abord sur les étoiles zodiacales, convaincu que cette march la seule qui pût lui faire rencontrer la planète inconnue. Plus dans l'automne de 1800, Zach se trouvant, avec Olbers e Ende, à Lilienthal, pour rendre visite à Schröter et à son in teur Harding, on y parla sérieusement de cette entreprise, e décida de distribuer le zodiaque entre vingt-quatre astron dont Piazzi devait faire partie. Chaque associé devait recevoi carte de sa portion, s'étendant jusqu'aux plus petites étoiles copiques, et, par de continuelles révisions du ciel, s'assurer d état d'immobilité, ou reconnaitre les astres errants qui pour se présenter. Il est évident que ce plan, qui a été réalisé d jours par les Cartes célestes de l'Académie de Berlin, aurait n sairement donné des résultats au bout d'un petit nombre d'an si Piazzi n'en eût prévenu l'exécution par la découverte qu le premier jour du nouveau siècle, de la planète Cérès, prise précisément dans cette lacune. Piazzi, il est vrai, avai d'abord que son astre errant n'était qu'une petite comète; il s borné à suivre sa marche, et c'est seulement le 24 janvier avait envoyé à Oriani et à Bode un avis formel de sa décou

Mais aussitôt que Bode (20 mars), et, par l'intermédiaire de celui-ci, Zach (fin d'avril) eurent reçu ces premières indications, ils en conclurent que ce devait être la planète cherchée ; et les calculs de l'orbite, entrepris bientôt après par Olbers et par Burckhardt, donnèrent d'une manière si concluante une petite excentricité, que Piazzi et Lalande, malgré toute la résistance qu'ils avaient opposée d'abord, durent finir par se ranger à l'opinion de leurs confrères. Mais, par malheur, avant que la lettre de Piazzi parvînt à sa destination, la planète avait depuis longtemps disparu dans les rayons du Soleil, et il ne restait plus guère d'espoir de pouvoir la retrouver avant la fin de l'année ; tandis que, d'un autre côté, les méthodes usitées jusqu'alors étaient insuffisantes pour fournir des éléments qui pussent satisfaire à la totalité des vingt observations faites par Piazzi jusqu'au 11 février. C'est alors que le jeune Gauss vint apporter aux astronomes en détresse le secours de son immense talent. A l'aide d'une méthode nouvelle, indépendante de l'hypothèse de la petitesse de l'inclinaison et de l'excentricité, méthode que, depuis, il développa encore davantage dans son Ouvrage classique *Theoria motus*, etc., il calcula une orbite elliptique satisfaisante, et publia même une éphéméride pour faciliter les recherches des observateurs. A l'aide de cette éphéméride, Cérès fut retrouvée par Zach, pour la première fois probablement, le 1er et le 31 décembre 1801 ; puis par Olbers, le 1er et le 2 janvier 1802, et, dès lors, elle fut acquise définitivement et pour toujours à notre système solaire.

Dans toute l'histoire de cette découverte, la *Monatliche Correspondenz* joua un rôle capital, comme Gauss l'affirme en ces termes dans une Lettre à Zach : « Avec quelle tiédeur et quelle indifférence n'eût-on pas accueilli la découverte de Piazzi, si vous n'aviez pas dans votre Journal rassemblé et répandu, avec toute la rapidité possible, toutes les informations sur cet événement ; si vous n'aviez pas éveillé l'intérêt du public, pesé les raisons pour et contre, et établi avec la plus haute probabilité la nature planétaire de cet astre ! Vraisemblablement, bien peu d'astronomes se seraient donné la peine de le retrouver, alors que le maître et chef de tous les astronomes d'aujourd'hui (Lalande) éprouvait encore lui-même, tout récemment, des doutes si forts au sujet de la nouvelle planète. » Dans les découvertes des autres planètes Pallas, Junon et

Vesta, qui suivirent celle de Cérès, comme aussi dans tous les tres événements astronomiques importants de cette époque, o toujours Zach et sa *Correspondenz* au premier rang dans l'ac

En octobre 1802, Frédéric-Guillaume de Prusse confia à 1 Zach le relèvement astronomique et trigonométrique de la ringe, et le duc Ernest, toujours prêt à mettre sa fortune priv service des travaux scientifiques, décida que l'on y rattacher mesure de 3 à 4 degrés du méridien du Seeberg, et de 5 à 6 d du parallèle. Dès 1803, tout était en très-bon train, et, da courant de cette année et de la suivante, on effectua diverse terminations de latitudes, et, en outre, à l'aide de signau poudre, quelques déterminations de longitudes; on mesura sieurs azimuts, on commença la triangulation, en s'appuyan une base soigneusement mesurée, etc. Pour ces travaux, trouva d'excellents aides dans le futur général von Müffli dans d'autres officiers préposés à cette opération, parfois auss Bürg et dans Lindenau; mais, par malheur, cette mesure d gré, la première qui ait été entreprise en Allemagne dans les modernes, fut bientôt interrompue. « Les champs d'Uranie », plus tard Zach, « furent convertis en champs de Mars; la fa bataille d'Iéna et ses suites nous firent abandonner nos triangle la mort de l'excellent duc Ernest, survenue en 1804, amena Zach lui-même, nommé grand-maître du palais de la ducl une vie toute différente. Dans les premiers temps, la réside la veuve ayant été transférée au château de Christiansburg, senberg, près d'Iéna, Zach put bien encore se livrer sans ob à ses anciennes occupations; mais, les médecins ayant prescr duchesse de passer l'hiver de 1804-1805 dans le midi de la Fr il fut forcé d'abandonner pendant ce temps à Lindenau son C vatoire et la rédaction de son Journal.

Les voyageurs passèrent d'abord par Viviers, où l'on rend site à Flaugergues, puis par Marseille; ensuite, après un séjo plusieurs mois à Hyères, ils revinrent chez eux par la Suisse Strasbourg, où le chef de brigade Henry était précisément o de la détermination d'une position géographique. Zach fixa de nouveau sa résidence à Eisenberg, où la duchesse fit const pour lui un observatoire; mais il habita aussi une grande part temps au Seeberg, dont il reprit la direction, en même temps

la rédaction du Journal. Dans l'été de 1807, la duchesse s'étant décidée à habiter d'une manière permanente les climats méridionaux, la direction du Seeberg passa définitivement entre les mains de Lindenau, qui convint en même temps de continuer la *Monatliche Correspondenz*, sous le nom de Zach.

Le nouveau voyage eut lieu par Nuremberg et Insbruck, puis par Vérone et Padoue, où l'on rencontra Cagnoli et Santini. On passa l'hiver de 1807-1808 à Venise, l'été de 1808 à Gênes, Milan, Bologne et Florence; l'hiver de 1808-1809 à Pise; l'été de 1809 à Milan et à Turin. A partir de décembre 1809, la petite cour se fixa auprès de Marseille, dans une maison de campagne qui se prêtait à la construction d'un petit observatoire, jusqu'au moment où les troubles qui s'élevèrent, au printemps de 1814, après la chute de Napoléon, engagèrent les voyageurs, par mesure de prudence, à se retirer à Gênes. Mais à peine y furent-ils arrivés et eurent-ils commencé leur installation, que Murat, désirant profiter du secours de Zach pour l'établissement d'un nouvel observatoire à Naples, envoya une frégate pour le chercher. Après une traversée orageuse, qui lui procura l'occasion de voir l'illustre exilé de l'île d'Elbe, Zach débarqua heureusement à Naples, où l'on mit à sa disposition tout ce qui était nécessaire pour les travaux préparatoires de la construction à la Mergelina; mais, dans le courant de l'été, Murat fut renversé, et Zach revint, assez désappointé, à Gênes, où il crut maintenant pouvoir trouver, pour de longues années, un séjour tranquille.

Comme Zach ne voyageait jamais sans emporter avec lui un théodolite, quelques sextants et des chronomètres, et qu'il savait manier ces instruments avec une habileté toute particulière, s'il lui manquait quelque chose pour ses travaux d'Astronomie et de Géographie, du moins il pouvait déterminer la position de chaque point un peu remarquable, et, dans les pays où l'on avait déjà fait des mesures de degré, il recueillait toutes les données possibles qui lui paraissaient utiles pour la vérification de ces mesures, comme on peut le voir par les nombreuses communications insérées dans la *Monatliche Correspondenz*, par son *Mémoire sur le degré de Beccaria*, publié en 1811, etc. En outre, soit en voyage, soit dans les observatoires qu'il improvisait pendant ses séjours de quelque durée, il observait et calculait avec soin les solstices, les opposi-

tions, les éclipses, les occultations d'étoiles, etc., et surtout l
mètes qui venaient à se montrer; il recueillait, dans les collec
et dans les bibliothèques, les nombreuses notices historiques
téraires, grâce auxquelles les journaux publiés par lui,
comme après cette époque, sont encore aujourd'hui des mi
riches et si précieuses. Ajoutons encore, comme fruit de son
à Marseille, un travail de longue haleine, publié en 1814 en
volumes, sous le titre de : *Attraction des montagnes*, travai
lequel il écarte résolûment cette action, souvent alléguée c
excuse d'observations imparfaites, et la réduit en même te
sa mesure exacte. « Que Zach », dirai-je en me servant des p
de Lindenau, « ait entrepris et mené à bonne fin une opéra
difficile, si longue, si coûteuse, qui jusqu'alors n'avait été
mencée que deux fois, par de grands États; qu'il l'ait fai
autre secours étranger que celui de son secrétaire, et en pre
sa charge toute la dépense, c'est ce que nous ne pouvons
sous silence, d'autant que cela offre une riche matière à d
flexions, que nous ne voulons pas toutefois développer plu
guement. »

Après le départ de Zach, dans l'été de 1807, Lindenau
nua pendant plusieurs années à rédiger la *Monatliche Corr
denz*, sous le nom de son prédécesseur et dans le même
mais, à la fin de 1813, il dut annoncer à ses lecteurs que, pa
de la part qu'il devait prendre à la campagne qui allait s'ouv
rédaction du Journal serait momentanément interrompue. (
il revint, dans l'été de 1814, de Paris au Seeberg, il ne repr
l'ancien mode de publication; il se décida, en 1816, à fai
raitre, avec Bohnenberger, un *Journal pour l'Astronomie
Sciences qui s'y rapportent* (¹); mais ce Recueil, malgré le
des collaborateurs, n'atteignit jamais la vogue de l'ancien, et
d'exister dès 1818. D'autre part, dans la même année 1818,
commença à publier, à Gênes, une *Correspondance astronom
géographique, hydrographique et statistique*, qui réussit ad
blement, comme la première. Il faut bien l'avouer, Zach
rédigeait plus avec le même soin que l'ancienne, et il lui é
pait quelquefois des bévues qui donnaient beau jeu à la crit

(¹) *Zeitschrift für Astronomie und verwandten Wissenschaften.*

en outre, sa plume, de tout temps incisive, devenait, avec les années, de plus en plus mordante, et, pour bien des gens, extrêmement désagréable. Comme il est, hélas! dans la nature humaine de se souvenir bien mieux des injures que des bienfaits, les adversaires de Zach se multiplièrent, même en Allemagne, et les Benzenberg, les Schubert, les Bürg, les Bode, etc., passèrent dans leur camp, parce que Zach leur avait en passant marché sur le pied. Olbers, Gauss, Bessel et Encke eux-mêmes manifestèrent une grande indignation lorsque Zach intervint un peu imprudemment dans l'affaire entre Pasquich et Kmeth ([1]), eux qui, quelques années auparavant, n'avaient pas eu une seule parole de blâme contre Arago, qui avait attaqué Zach d'une manière si passionnée et si injuste ([2])!

Zach avait, en effet, pris la liberté de critiquer plusieurs savants de Paris; il avait, par exemple, reproché à Delambre une certaine nonchalance dans ses mesures d'angle; il avait déploré l'inactivité qui régnait, à cette époque, à l'Observatoire de Paris, et que d'autres aussi avaient constatée; il avait adressé aux rédacteurs de la *Connaissance des Temps* quelques dures critiques, etc. Lorsque, ensuite, il s'occupa, dans un article intitulé : *les Singes astronomes*, de l'histoire des *Mestivos* (enfants d'un père blanc et d'une mère négresse, dont quelques naturalistes français avaient fait des singes), histoire souvent reproduite d'après la Condamine, et qu'il fit raconter par un auditeur d'un professeur d'Anatomie de Paris, « qu'il y avait en Amérique des *singes* en état de faire des observations *aussi parfaitement que les faisaient les savants français* », les astronomes parisiens se crurent obligés de répondre, et Arago riposta dans les *Annales*, dont il était un des rédacteurs. Si, après avoir rapporté les accusations de Zach, il eût cherché à les contredire par des faits, on eût pu lui pardonner une certaine violence de langage; mais, au lieu de cela, il chercha seulement à rabaisser Zach de toutes les manières, « moyen désespéré », comme Horner en fait la remarque, « qui n'a d'explication que la mauvaise cause de celui qui l'emploie ». Il voulut, par exemple, faire croire au public que Zach, l'auteur des calculs de tant de

---

([1]) *Voir* la *Correspondance entre Gauss et Schumacher*, t. I, p. 363 et suivantes.
([2]) *Annales de Chimie et de Physique*, 1821. — *Œuvres d'Arago*, t. XII, p. 47.

Tables et d'orbites de comètes, n'entendait pas même la Tri
métrie sphérique; que l'homme signalé par Lalande com
plus habile dans la détermination des ascensions droites co
sait à peine la lunette méridienne. etc. Il alla même jusqu'à
contre Zach la grave accusation d'avoir publié *comme son*
travail les Tables solaires de Delambre, qui lui avaient ét
muniquées en manuscrit par Lalande, bien que le moindre
illégitime, en pareil cas, fût en contradiction la plus formel
son caractère, et que l'emprunt fût en lui-même très-invr
blable, puisque les Tables de Zach diffèrent entièrement
leur disposition, de celles de Delambre, et que ce dernier re
lui-même avec satisfaction que les deux Tables, *quoique f*
sur des observations différentes, sont en parfait accord.

Par bonheur, Zach ne releva pas le gant, bien qu'il fi
aisément venu à bout d'une attaque ouverte, quoique si p
surée, que des hostilités secrètes des jésuites et consorts
en face de lui, cherchaient à se faire passer pour ses pl
times amis et ses plus fervents admirateurs, mais qui ne ces
en arrière, de travailler contre lui, si bien qu'il se trouva
cas d'écrire à Littrow, au sujet d'un de ces bons amis : « J
assure que, si le diable et cet homme entraient dans ma ch
en se tenant par la main, je me jetterais dans les bras du
pour qu'il me protégeât contre l'autre. »

« Plaignons le galant homme, le noble cerf après lequel
chiens sont aujourd'hui lâchés », écrivait Littrow à Horn
1822; « au lieu de passer le soir d'une vie si bien remplie
quille et heureux au milieu des amis qui lui sont dévoués
harcelé par des misérables, et, ce qui doit lui être le plus d
reux, par ceux-là mêmes qu'il a jadis comblés de bienfaits,
doivent à lui, et à lui seul, toute leur existence astronomiqu
il devait presque en être ainsi; car si quelquefois les visites
lettres des amis restés fidèles, Lindenau, Horner, Littrow,
venaient le ranimer; si les observations, les travaux de cabi
d'autres occupations du même genre le distrayaient momen
ment; s'il avait la satisfaction d'avoir, par son action, fait g
du terrain à l'Astronomie en Italie, en obtenant, par exemp
construction de l'observatoire de Marlia, près de Lucques, et en
curant à Pons une place digne enfin de son mérite, les jours

commençaient pas moins pour lui où il lui faudrait dire : « Je n'y prends point plaisir ! » Non-seulement il fut attaqué d'une maladie grave, la pierre, que les médecins furent longtemps à reconnaître, et qui se manifesta de la manière la plus douloureuse, dans l'été de 1826, mais encore, tandis qu'il était au lit, brisé par la souffrance, ses ennemis réussirent, par des rapports mensongers, à obtenir du roi bigot Charles-Félix, par l'entremise de son confesseur, qu'il fût enjoint à Zach, en août 1826, de sortir dans les cinq jours de ses États. On ne se contenta pas d'une déclaration des médecins que le malade était alors absolument hors d'état d'être transporté, ni d'une réclamation autographe de la duchesse au roi, ni d'une attestation fournie par le ministère de Saxe en faveur de Zach et portant sur tout son passé : il fallut encore les démarches énergiques de l'envoyé de Prusse à Turin pour obtenir qu'il fût sursis à l'ordre d'expulsion jusqu'au moment où le malade pourrait se mettre en route sans que sa vie fût en danger formel. Ce moment, attendu par Zach avec une impatience si naturelle en pareilles circonstances, semblait reculer de plus en plus ; il fut, en 1827, dans la nécessité de faire venir de Paris à Gênes le célèbre Civiale pour une consultation, et c'est seulement le 22 mai 1827 que le pauvre patient, après avoir rendu quelque temps auparavant les derniers devoirs à son excellente duchesse, put quitter Gênes pour se rendre à Paris à petites étapes, en passant par Turin et Genève, et se confier au traitement de Civiale. Là encore les choses n'allèrent pas aussi vite qu'on pouvait d'abord l'espérer. C'est seulement le 8 décembre, quand il eut subi vingt-cinq opérations, que les médecins purent déclarer que son état ne réclamait plus leurs soins. Il passa l'hiver à Marseille et l'été de 1828 chez son ami Schäferli, dans l'Elfenau, près de Berne ; il alla visiter Horner à Zurich et se rendit enfin à Francfort, où son cher Lindenau, alors député à la Diète, lui tenait un logement prêt. Malheureusement, à l'entrée de l'hiver, l'ancien mal ayant reparu, un second voyage à Paris devint nécessaire, et quand il voulut encore essayer, dans l'été de 1830, de retourner en Allemagne, il lui fallut de nouveau revenir à Paris, où il succomba, le 2 septembre 1832, à une attaque de choléra. Son tombeau, où Lindenau fit placer une modeste pierre, est au cimetière du Père-Lachaise. Sa dépouille mortelle est depuis longtemps détruite ; mais nous jouissons encore aujourd'hui de

bien des fruits de sa loyale activité, et nous devons pour ce sa mémoire en honneur. « Moi, du moins », dirai-je en répé paroles de Littrow, « je conserverai avec respect son souvenir la fin de ma vie! »

RUDOLPH WOLF

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ANSART (A.), capitaine de frégate. — Essai sur la Mécanic vents et des courants. — Paris, Gauthier-Villars, 187 in-8, 128 p., 8 pl.

BERTIN (E.), Ingénieur des constructions navales. — Note théorie et l'observation de la houle et du roulis. — Paris thier-Villars, 1872. Gr. in-8, 56 p., 1 pl. 1

— Complément aux Notes sur la théorie et l'observatio houle et du roulis. — 1874, 40 p. 1

BONNANGE (F.). — Projet d'un Catalogue universel des prod intellectuelles. Précédé d'une Préface de M. *É. Littré*. — Gauthier-Villars, 1874. Gr. in-8, 39 p., 1 pl.

BRIOT et BOUQUET, professeurs à la Faculté des Sciences. — rie des fonctions elliptiques. 2e édition, 2e fascicule. — Gauthier-Villars, 1874. In-4, 160 p. — Prix de l'Ouvrag plet pour les souscripteurs :

DUMOULIN (Eug.). — Manuel élémentaire de Photographie lodion humide, à l'usage des commençants. — Paris, Ga Villars, 1874. In-12, 62 p. 1

GLOESENER, Professeur à l'Université de Liége. — Études sur tro-dynamique et l'électro-magnétisme. Importance du p du renversement alternatif du courant dans les électro-ai — Bruxelles, Hayez, et Paris, Gauthier-Villars, 1874. Gr 111 p.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

PONCELET (J.-V.). — COURS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX MACHINES, publié par M. *Kretz*, ingénieur en chef des Manufactures de l'État. — Un fort volume in-8° imprimé sur vélin, avec gravures dans le texte et deux planches. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. Prix : 12 fr.

En présentant à l'Académie ce volume qui, sera surtout extrêmement utile aux professeurs de sciences appliquées et aux ingénieurs, M. Resal s'est exprimé ainsi :

« L'origine de cet Ouvrage remonte à 1825, époque à laquelle Poncelet, qui jusqu'alors s'était uniquement occupé de Géométrie, fut chargé d'organiser, à l'École d'Application de l'Artillerie et du Génie, l'enseignement de la Mécanique appliquée.

» En 1826, des feuilles lithographiées, reproduisant les Leçons de Poncelet, furent distribuées aux officiers élèves. On ne tarda pas à connaître au dehors l'originalité de cet enseignement, qui se distinguait par la nouveauté des aperçus et la nature de certaines questions qui y avaient trouvé place.

» Ces feuilles furent, l'année suivante, soumises à l'appréciation de l'Académie. Dans la séance du 7 mai 1827, Ch. Dupin, au nom d'une Commission qu'il constituait avec Arago, fit, sur l'enseignement de Poncelet, un Rapport extrêmement élogieux, qui aurait conclu à l'insertion aux *Mémoires des Savants étrangers*, si le Ministre de la Guerre ne s'était réservé la faculté de reproduire les lithographies.

» Aux feuilles de 1826, qui produisirent une grande impression dans le monde savant, succédèrent, avec quelques modifications, celles de 1832 et de 1836, publiées en cahiers par les soins de M. Morin. C'est en collationnant ces trois éditions que M. Kretz a constitué l'Ouvrage dont il s'agit, et dont on comprendra toute l'importance par le simple énoncé des chapitres qui le composent :

» 1° Considérations générales sur les machines en mouvement ; 2° principaux moyens de régulariser l'action des forces sur les machines et de transmettre les vitesses dans des rapports donnés ; 3° calcul des résistances passives dans les pièces à mouvement uniforme ; 4° influence de la variation de la vitesse sur les résistances.

bien des fruits de sa
sa mémoire en honn
paroles de Littrow,
la fin de ma vie!

Ansart (A.).
vents et de
in-8, 128 p

Bertin (E.).
théorie et
thier-Vill

— Complém
houle et d

Bonnange
intellectu
Gauthier

Briot et Bo
rie des
Gauthier-V
plet pour l

Dumoulin
lodion hum
Villars, 187

Gloesener. Pr
tro-dynamiq
du renversem
— Bruxelles,
111 p.

Pon
-siè
st très-con
les m
ont
ment
publication
observat
surtout pou
prétées.
encor
originalité

conditions
point de vue
mination
— Corr
d'une
accélération
ant des
roies;
ence de l'é

pliquée
questions
qui
Notes
qui
indust

machines

LA SCIENC
l'heo
APPLICATI
spéci
machi
D

s du mouvement. Moyens généraux de régulariser le s. — IV. DE L'ÉTABLISSEMENT DES MACHINES INDUS- *meilleur établissement des machines. Indications gé- nt des machines. Conditions pratiques de l'établisse-*

ncipaux moyens de régulariser l'action des forces sur ansmettre les vitesses dans des rapports déterminés.

Des divers genres de modérateurs. Des freins. Des DES RÉGULATEURS : *Des divers genres de régulateurs. et à flotteur. Du régulateur à force centrifuge. Nou- et instantané.* — III. DES MANIVELLES : *Notions préli- les. Considérations dynamiques sur les effets des conduisant des pièces à mouvement rectiligne alter- isant un balancier à mouvement alternatif. Du joint* APPLICATIONS PARTICULIÈRES DE LA THÉORIE DES VO- *nérales sur l'emploi et sur la construction des des manivelles à simple ou à double effet dans les s. Calcul du volant, en tenant compte du poids et antes.* — V. MOYENS GÉOMÉTRIQUES DE TRANSMETTRE S UN RAPPORT DONNÉ : *Communication d'un mouve- roues. Communication du mouvement par courroies tion du mouvement par engrenages. Des cames.* — LEURS DE DIVERS MOMENTS D'INERTIE : *Principes des lignes ou verges à section très-petite. Moment disques minces. Observations générales. Moments s à dimensions quelconques. Applications.*

ances passives dans les pièces à mouvement uniforme actions sensiblement invariables.

ES. — II. DES DIVERSES SORTES DE RÉSISTANCES : *ment et de l'adhérence des corps en contact. corps. De la roideur des cordes et des cour- courroies autour des cylindres immobiles.* — MPLES : *Frottement d'un corps sur un plan ment des pièces maintenues dans une direc- oulisses, etc. Frottement des tourillons des vots, des épaulements des axes. Résistance treuil, en ayant égard au frottement et à la ances dans les poulies, le treuil des Chinois ournants conduits par des cordes et cour- s mouflées. De la résistance des chaînes. s cordes et courroies dans les équations ets carrés. Frottement de la vis à filets*

triangulaires. Du frottement dans les engrenages. — NOTES : I. *Sur l leur approchée linéaire et rationnelle des radicaux de la forme* $\sqrt{a^2}$ · $\sqrt{a^2-b^2}$,.... II. *Sur le moment total et le bras de levier moyen des résis dans la vis à filets carrés ou triangulaires et les cônes de friction.*

IVe SECTION. — Influence des variations de la vitesse sur les résistance

I. DES RÉSISTANCES DANS LES PIÈCES A MOUVEMENT VARIABLE PÉRIODIQ PERMANENT. — II. INFLUENCE DES CHANGEMENTS BRUSQUES SUR LA VITESSE : *cipes généraux.* — III. APPLICATIONS : *Du choc des cames et des pilon choc des cames et des marteaux. Des machines à percer, à découper, à ét et à frapper les monnaies.*

TODHUNTER (I.), M. A., F. R. S. — A HISTORY OF THE MATHEMATICAL THE OF ATTRACTION AND THE FIGURE OF EARTH, FROM THE TIME OF NEWT THAT OF LAPLACE. — London, Macmillan & Co.; 1873 (¹).

L'Histoire scientifique, qui est déjà redevable à M. Todh de deux publications importantes (²), vient encore de s'en d'une nouvelle production du savant auteur, consacrée, comn précédentes, à l'examen critique et détaillé de tous les travau ont paru sur le vaste sujet indiqué par le titre. Ce Livre ne s'ad donc pas aux lecteurs curieux de connaître seulement les ci stances qui ont accompagné la découverte des grands faits Science, et la biographie des inventeurs. Il est écrit pour l' des géomètres, et destiné à leur servir de guide dans une approfondie de cette difficile théorie.

Nous ne saurions mieux faire, pour donner une idée exac contenu de ce Livre, que de traduire l'analyse que l'auteu même en a donnée dans sa Préface :

« Le premier Chapitre est nécessairement consacré à Newt

(¹) TODHUNTER (I.). *Histoire des Théories mathématiques de l'Attraction e Figure de la Terre, depuis le temps de Newton jusqu'à celui de Laplace.* — 2 vol. xxxvi-476 et 508 p. Prix : 24 sh.

(²) *A History of the Process of the Calculus of Variations during the nin Century.* 1861; 1 vol. in-8°.

A History of the Mathematical Theory of the Probability, from the time of to that of Laplace. 1865; 1 vol. in-8°.

fondateur de l'Astronomie physique. La puissance de génie qui se révèle dans tous ses travaux n'apparait nulle part avec plus d'éclat que dans la manière dont il a traité nos deux sujets.

» Dans la théorie de l'attraction, entre autres résultats importants, il a fait voir que l'attraction d'une couche sphérique sur un point extérieur est la même que si la couche était réunie en son centre, et que l'attraction sur un point intérieur est nulle. Ces deux propositions constituent une théorie complète de l'attraction d'une sphère dans laquelle la densité varie avec la distance au centre. En outre, le résultat relatif à un point intérieur a été étendu par Newton au cas où les surfaces qui limitent la couche sont des ellipsoïdes de révolution semblables, semblablement placés et concentriques.

» Newton, dans sa recherche de la figure de la Terre, partit de la supposition qu'on pouvait la traiter comme un fluide homogène, tournant avec une vitesse angulaire uniforme. Il admit comme postulat qu'il pouvait exister, en pareil cas, un équilibre relatif, si la forme était celle d'un ellipsoïde de révolution aplati; et il détermina le rapport des axes et la loi de variation de la gravité à la surface. Cette recherche, malgré quelques imperfections, est un rare exemple de succès dans la première discussion d'un problème des plus difficiles, et constitue un monument impérissable du génie hors ligne de son auteur.

» Le second Chapitre est consacré à Huygens. C'est à ce géomètre que nous devons l'importante condition d'équilibre d'un fluide, savoir, que la force résultante en un point quelconque de la surface libre doit être normale à la surface en ce point, et par là il a contribué indirectement à l'avancement de nos connaissances sur ce sujet; mais Huygens n'accepta jamais le grand principe de l'attraction mutuelle des particules de la matière, et à cause de cela on ne lui est redevable que de la solution d'un problème théorique, celui de la recherche de la forme de la surface d'un fluide animé d'un mouvement de rotation sous l'influence d'une force dirigée constamment vers un point fixe.

» Le Chapitre III traite de recherches diverses, se rattachant à notre sujet, pendant le cours de la génération qui suivit la publication des *Principes*. On n'ajouta rien, en réalité, aux résultats théoriques de Newton, tandis que les mesures d'arcs de méridien

en France conduisaient les Cassini à adopter l'hypothèse qu forme de la Terre n'était pas aplatie, mais allongée.

» Le Chapitre IV est relatif à Maupertuis. Ce géomètre éc divers Mémoires, parmi lesquels il y en avait deux en form commentaires des théories de Newton sur l'attraction et la fi de la Terre. Ces théories étaient rendues plus accessibles p traduction du langage géométrique de l'original dans le lan analytique familier de l'époque. En adhérant aux conclusion Newton, Maupertuis a puissamment contribué au triomphe c vérité chez ses compatriotes, contre les erreurs soutenues par l torité de Descartes et des Cassini.

» L'important postulat, admis par Newton, fut examiné po première fois par Stirling, géomètre éminent; on voit, dans le C pitre V, qu'il a obtenu, au moins implicitement, une démonstr approchée du résultat cherché.

» Dans le Chapitre VI, on rend compte de divers Mémoir Clairaut, antérieurs à la publication de son important Ouvrag la figure de la Terre. Clairaut a donné, explicitement, une monstration par approximation de la vérité du postulat de New Il a fait connaître aussi le théorème qui porte son nom, et qui blit une liaison entre l'ellipticité de la Terre et le coefficien terme exprimant l'accroissement de la gravité lorsqu'on pass l'équateur au pôle.

» Le Chapitre VII contient un récit sommaire des circonsta dans lesquelles s'est opérée la mesure d'un arc de méridien en ponie. J'ai entrepris d'exposer la marche des théories mathé tiques de l'attraction et de la figure de la Terre; mais je ne prét pas y faire entrer les opérations pratiques, qui conduisent à la c naissance des dimensions exactes de la Terre. Ces opérations c sistent surtout en observations du pendule et en mesure d'arc un compte rendu de ces travaux, tiré des sources originales, for rait un ouvrage aussi intéressant qu'instructif; mais les sujets difficiles auxquels j'ai consacré les présents volumes m'ont fo une abondance de matériaux assez grande, sans que je fasse auc digression sérieuse sur le terrain des applications pratiques. Je suis donc borné à de courtes indications sur les plus anciennes servations du pendule, et sur les deux grandes expéditions Laponie et du Pérou; ces expéditions méritent quelque attentio

:ause de leur intérêt historique et des preuves décisives qu'elles ont fournies de la forme aplatie de la Terre.

» Le Chapitre VIII traite de diverses recherches faites entre 1721 et 1740. Desaguliers soutint, avec une ardeur parfois inconsidérée, l'aplatissement de la Terre contre l'hypothèse des Cassini; d'autre part, les mesures prises en France semblaient toujours favoriser cette hypothèse. Vers la fin de cette période, l'Académie de Paris proposa pour sujet de prix la Théorie des marées, ce qui donna occasion aux importantes recherches de Maclaurin.

» Le Chapitre IX est consacré à Maclaurin. Ce géomètre résolut complétement le problème de l'attraction d'un ellipsoïde de révolution sur un point de l'intérieur ou de la surface; sa méthode et ses résultats se prêtaient à l'extension, qui se présentait naturellement, de ce cas à celui d'un ellipsoïde à trois axes inégaux. L'extension qu'il entreprit de faire au cas d'un point extérieur demande à être exposée avec soin, pour corriger les erreurs de nature contraire qui s'y rencontrent. Le résultat le plus général, obtenu jusque-là, peut être énoncé ainsi : Les potentiels de deux ellipsoïdes confocaux pour un point donné, extérieur aux deux corps, sont entre eux comme leurs masses. Ce théorème a été établi pour la première fois par Laplace; mais Maclaurin l'a démontré pour le cas particulier où le point extérieur est sur le prolongement d'un des axes des ellipsoïdes. Dans la théorie de la figure de la Terre, le plus grand mérite de Maclaurin est d'avoir donné une démonstration exacte du postulat de Newton, dont on n'avait jusque-là que des preuves par approximation.

» Dans le Chapitre X, on rend compte des travaux de Thomas Simpson. Cet éminent géomètre fit voir explicitement que, si la vitesse angulaire de rotation dépasse une certaine valeur, l'ellipsoïde aplati n'est pas une forme possible d'équilibre relatif pour une masse fluide; de ces résultats il s'ensuivait implicitement que, pour une valeur quelconque de la vitesse angulaire inférieure à cette limite, il existe plus d'une figure d'équilibre relatif. Simpson a donné aussi une remarquable étude sur l'attraction à la surface d'une classe très-étendue de corps approchant de la sphère.

» Le Chapitre XI consiste dans une analyse du célèbre Ouvrage de Clairaut. La Première partie de cet Ouvrage traite des principes de l'équilibre des fluides; ici Clairaut s'est montré de beaucoup

supérieur à ses prédécesseurs, au point de vue de la générali
de l'exactitude, et il a présenté la théorie sous la forme qu'elle
serve encore, à l'exception seulement du perfectionnement
Euler, qui a introduit la notion de la pression en un point
conque du fluide, en même temps que le symbole convenable
choisi pour la désigner. La seconde Partie traite de la figure
Terre. Pour le cas d'un fluide homogène, Clairaut a suivi pas
Maclaurin. Le cas d'un fluide hétérogène n'avait pas été jusq
traité d'une manière pratique, et Clairaut inventa, pour l'étu
un beau procédé, que l'on a conservé jusqu'à présent sans
changement essentiel. Le principal résultat est une certaine
tion reliant l'ellipticité des couches avec leur densité, et qui se
sente sous deux formes, que j'ai respectivement désignées so
noms d'*équation primitive* et d'*équation dérivée* de Clairaut.

» Le Chapitre XII retrace brièvement les circonstances
mesure de l'arc de méridien au Pérou. J'ai examiné avec so
nombreuses publications, consistant en grande partie en artic
controverse, auxquelles a donné lieu cette mémorable expéd
et, par des renvois exacts aux sources, je suis venu en aide
ceux qui voudront étudier cette question et en connaître à fo
détails.

» Le Chapitre XIII est consacré à la première moitié des
de d'Alembert, relatifs à notre sujet. Ces écrits sont volumine
peuvent avoir indirectement servi à répandre le goût de ces re
ches, que doit avoir ressenti l'auteur lui-même; mais, à cause d
reurs de principes et des inexactitudes de détails qu'ils renfer
leur valeur intrinsèque n'est pas considérable. Dans les diverse
tatives qu'il a faites pour critiquer l'Ouvrage de Clairaut, d'Ale
me semble avoir eu constamment tort en ce qui regarde la
de la Terre, et avoir eu raison seulement sur quelques points
daires de l'Hydrodynamique. On lit, dans la vie de d'Ale
publiée dans le *Biographical Dictionary of the Society f*
Diffusion of Useful Knowledge, que « lui et Clairaut étaient r
» et qu'aucun ouvrage de l'un d'eux ne paraissait sans trouve
» l'autre un critique sévère; mais que d'Alembert, le plus c
» spect et le plus profond des deux, prenait généralement
» côté de la question. » Ce jugement est prononcé par un
haute autorité, devant laquelle j'ai coutume de m'incline

respect; mais, pour ce qui touche au sujet du présent Ouvrage, je me permettrai de prendre le contre-pied de cette sentence.

» Le Chapitre XIV est consacré principalement à Boscovich, dont les écrits nous offrent des exposés élémentaires des résultats les plus importants obtenus à la date de leur publication. Je donne aussi une courte Notice sur le poëme de Stay, pour lequel Boscovich a fourni des Notes et des dissertations supplémentaires.

» Le Chapitre XV traite des recherches diverses qui ont eu lieu entre les années 1741 et 1760. Il renferme une brève analyse d'un Mémoire couronné sur la Figure de la Terre, publié par Clairaut, quelques années après son Traité.

» Le Chapitre XVI a pour objet la seconde moitié des écrits de d'Alembert. Leur caractère général est le même que celui de la première moitié; les recherches elles-mêmes sont déparées par de graves erreurs, mais elles servent à attirer l'attention sur des sujets pleins d'intérêt et d'importance.

» Les Ouvrages de Frisi sont analysés dans le Chapitre XVII. Ils ressemblent à ceux de Boscovich, en ce qu'ils ont plutôt contribué à propager qu'à augmenter les connaissances sur la question.

» Le Chapitre XVIII traite des recherches diverses qui ont été faites de 1761 à 1780. Les trois premiers Mémoires de Laplace appartiennent à cette période; mais nous avons cru convenable d'en ajourner l'examen. Le Chapitre contient le compte rendu d'un Mémoire de Lagrange, traitant par l'Analyse la question que Maclaurin avait résolue géométriquement. Les opérations exécutées dans les monts Schehalliens, pour la détermination de la densité de la Terre, sont mentionnées, et l'on renvoie aux sources pour les travaux postérieurs sur le même sujet. Ici finit le premier volume, contenant l'histoire de notre sujet pendant le siècle qui a suivi la publication des *Principes* de Newton.

» Le Chapitre XIX concerne le premier des trois Mémoires de Laplace. On peut dire que l'objet principal de ces Mémoires est la solution d'un problème qui est une extension du postulat de Newton. Newton admettait qu'un sphéroïde aplati était une forme possible d'équilibre relatif pour un fluide animé d'une rotation; le problème actuel est de faire voir qu'un sphéroïde aplati est la *seule* forme possible, au moins sous certaines restrictions. J'appelle cette question le *Problème de Legendre*, ce géomètre étant le premier qui

en ait donné une solution passable. D'Alembert aborda le probl
mais il y échoua. Laplace ne le résolut pas complétement; m
fit voir que, pour une classe très-nombreuse de figures approc
de la sphère, l'équilibre était impossible. Il obtint aussi l'expre
de la loi de la gravité qui doit avoir lieu universellement.

» Le Chapitre XX est consacré à un Mémoire qui occupe une
remarquable dans l'histoire de la théorie de l'attraction : c'
premier Mémoire de Legendre. La limite atteinte par Macl
est maintenant, pour la première fois, dépassée de beaucoup
gendre montre que le théorème concernant les ellipsoïdes confo
est vrai pour *toute position* du point extérieur, quand les ellips
sont de révolution. Legendre introduit ici les expressions célè
jusque-là inconnues, que l'on appelle maintenant, d'habitude
coefficients de Laplace; en outre, d'après une idée suggérée
Laplace, nous voyons apparaître dans cette théorie la fonction
pelée aujourd'hui la *fonction potentielle*.

» Le Chapitre XXI nous met sous les yeux un Traité asse
de Laplace, et contient l'analyse de la partie de ce Traité q
rapporte à l'attraction et à la figure de la Terre. Là se trouve
la première fois la démonstration du théorème concernant l'a
des ellipsoïdes confocaux sur un point extérieur, théorème
j'appelle du nom de Laplace. Les théories de l'attraction des e
soïdes et de la figure homogène de la Terre sont présentées
ce Traité à peu près sous la même forme que dans la *Mécan*
céleste.

» Le Chapitre XXII est relatif au second Mémoire de Legen
Ici Legendre résout le problème auquel j'attache son nom. Il ad
que le fluide a la figure d'un corps de révolution et qu'il ne s'éc
pas beaucoup de la forme sphérique.

» Le Chapitre XXIII rend compte des quatrième, cinquièm
sixième Mémoires de Laplace. Le quatrième et le cinquième
moire contiennent la théorie de l'attraction des sphéroïdes, e
théorie des fonctions de Laplace sous la même forme que dan
Mécanique céleste. Le sixième Mémoire est relatif à l'anneau
Saturne.

» Le Chapitre XXIV est consacré au troisième Mémoire de
gendre. L'objet de ce Mémoire est de démontrer le théorème
Laplace sur les ellipsoïdes confocaux, par un procédé plus direct

celui que Laplace lui-même avait employé. Legendre démontre le théorème sans développer ses expressions en séries; mais la marche est excessivement longue et compliquée.

» Le Chapitre XXV analyse le quatrième Mémoire de Legendre. On y trouve un grand développement de la méthode de Clairaut pour le cas d'un fluide homogène. L'auteur obtient une équation générale, analogue à l'équation primitive de Clairaut, et il s'en sert pour faire voir que les couches doivent être ellipsoïdales.

» Le Chapitre XXVI est consacré au septième Mémoire de Laplace. Ce Mémoire contient quelques discussions numériques des longueurs de degrés et des longueurs du pendule à seconde; il s'y trouve aussi une théorie de la figure hétérogène de la Terre, qui s'accorde, en substance, avec celle du quatrième Mémoire de Legendre.

» Le Chapitre XXVII traite des recherches diverses qui ont eu lieu de 1781 à 1800. Entre autres sujets, nous avons ici à mentionner l'*Introduction à l'étude de l'Astronomie physique,* par Cousin, un Mémoire de Lagrange, et un autre de Trembley; ce dernier travail est d'une valeur aussi médiocre que les différents Mémoires du même auteur que j'ai examinés dans mon *Histoire de la Théorie mathématique des Probabilités*.

» Le Chapitre XXVIII rend compte des deux premiers volumes de la *Mécanique céleste*, en tant qu'ils se rapportent à notre sujet. Laplace y a reproduit avec peu de changements les quatre derniers de ses sept Mémoires, et l'ensemble forme un Traité qui n'a pas encore été dépassé.

» Le Chapitre XXIX retrace l'histoire des recherches concernant le théorème de Laplace. Ivory, Legendre, Gauss et Rodrigues ont tous donné des discussions complètes de l'attraction des ellipsoïdes, tandis que Biot et Plana ont commenté des parties de cette théorie. La méthode d'Ivory est la plus simple de toutes, et elle a conquis une place permanente dans nos Ouvrages élémentaires, d'autant plus qu'on a l'habitude de parler du *théorème d'Ivory,* quoiqu'il fût plus exact de dire la *démonstration par Ivory du théorème de Laplace*.

» Le Chapitre XXX traite d'une équation que Laplace semble avoir considérée avec une prédilection marquée, et qui se rencontre souvent dans ses Ouvrages. Toutefois cette équation ne parut pas

satisfaisante à Ivory, qui la critiqua avec sévérité. On peut di le résultat de cette discussion a été d'établir l'exactitude de l' tion, pourvu qu'on s'en serve, comme le faisait Laplace lui-avec les précautions convenables; mais, d'autre part, les ré que Laplace voulait atteindre au moyen de son équation s'obti maintenant, en général, sans y avoir recours, de sorte qu'à p cette équation est rarement employée dans la pratique.

» Le Chapitre XXXI explique l'équation aux différentiell tielles du symbole qui désigne la fonction potentielle. Laplac d'abord admis qu'une certaine équation avait lieu à la fois po particule extérieure et pour une particule intégrante du corp sidéré; mais Poisson montra que les deux cas exigeaient des f d'équation différentes.

» Le Chapitre XXXII discute une méthode donnée par L pour résoudre le problème de Legendre, avec l'objection faite méthode par Liouville, et l'analyse que Poisson a substituée de Laplace.

» Le Chapitre XXXIII passe en revue divers Mémoires p par Laplace, pendant le premier quart du présent siècle.

» Le Chapitre XXXIV est consacré à la partie du cinq volume de la *Mécanique céleste* qui se rapporte à notre d sujet, et qui consiste principalement dans une reproduction de moires dont il a été question au Chapitre XXXIII.

» Strictement parlant, la période historique que je me pro de décrire s'arrête ici; mais il m'a semblé convenable de renf dans mon cadre tous les écrits de trois mathématiciens qui a déjà joué un rôle important dans mon Livre, et qui peuvent êt sociés naturellement avec leurs prédécesseurs, particulièr avec Laplace. Ces auteurs sont Poisson, Ivory et Plana.

» Le Chapitre XXXV contient un compte rendu de tous le vaux de Poisson qui n'avaient pas été déjà examinés. Les plu portants sont un Mémoire approfondi sur l'attraction des sphér et un Mémoire contenant une nouvelle étude du théorème d place sur les ellipsoïdes confocaux.

» Le Chapitre XXXVI donne une courte esquisse des noml articles et Mémoires publiés par Ivory, en vue surtout de déf certaines opinions personnelles, à la fois singulières et erro Les grandes promesses que faisaient entrevoir ses premiers s

furent suivies d'aucun résultat de quelque valeur dans les es-is de ses dernières années.

» Le Chapitre XXXVII est consacré à Plana, qui a écrit divers émoires, la plupart en forme de commentaires, sur Lagrange, Le-ndre et Laplace.

» Le dernier Chapitre traite de différentes recherches entreprises ndant le premier quart du présent siècle. C'est par hasard que listoire se termine par un paragraphe relatif à Bowditch; mais, au int de vue de ses qualités morales et intellectuelles et de son dé-uement désintéressé à la Science, le nom d'un des géomètres les us distingués de l'autre côté de l'Atlantique mérite bien de clore ie liste qui commence par le nom de Newton. »

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (¹).

T. LXXVII, 1873, 2ᵉ semestre (fin).

N° 22. Séance du 1ᵉʳ décembre 1873.

Resal. — *Note accompagnant la présentation du « Cours de Mécanique appliquée aux machines »* de J.-V. Poncelet.

Faye. — *Sur les trombes terrestres et solaires.*

Morin (le général). — *Observations sur la Communication de* I. Faye.

Siacci (F.). — *Sur un théorème de Mécanique céleste.*

M. Newcomb a communiqué à l'Académie, en 1872, le théorème uivant : « Si b_1, $b_2, \ldots$, b_{2n} sont les coefficients du temps dans les xpressions des coordonnées et des vitesses de n planètes; si c_1, $_2, \ldots$, c_{2n} sont les constantes canoniques dont les grands axes, les xcentricités et les inclinaisons des orbites peuvent être considérées

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 76.

comme des fonctions, et si V est le viriel exprimé en foncti $c_1, c_2, \ldots, c_{3n}$, on a $b_i = \frac{\partial V}{\partial c_i}$. »

M. Siacci donne une nouvelle démonstration de ce théorè montre qu'on peut remplacer le viriel par la constante des vives avec le signe changé, et que cette constante n'est dépen que des grands axes, des excentricités et des inclinaison orbites.

Mercadier (E.). — *Sur le mouvement d'un fil élastiqu une extrémité est animée d'un mouvement vibratoire.*

L'auteur donne l'équation qui représente ce mouvemen montre que les conséquences en sont identiques aux expéri indiquées dans les Notes précédentes.

N° 23. Séance du 8 décembre 1873.

Menabrea (L.-F.). — *Note sur l'identité des formules do par Cauchy pour déterminer les conditions de convergence série de Lagrange, avec celles qui ont été établies par Lag lui-même.*

Les formules établies par Cauchy se trouvent dans son *Mé sur divers points d'Analyse* (*Mémoires de l'Académi Sciences de Paris,* t. VII), et celles de Lagrange dans l *toire de l'Académie des Sciences de Berlin,* année 1768, *velle méthode pour résoudre les équations littérales* (*OEuv Lagrange,* t. III, p. 5).

Wolf (C.). — *Observation des étoiles filantes de novemb*

Stephan (E.). — *Nouvelles observations de la comète p dique de M.* Faye, *et découvertes et observations de ving buleuses, faites à l'Observatoire de Marseille.*

Mercadier (E.). — *Sur le mouvement d'un fil élastique une extrémité est animée d'un mouvement vibratoire.* (Suit

N° 24. Séance du 15 décembre 1873.

Levy (M.). — *Sur une réduction de l'équation à differ partielles du troisième ordre, qui régit les familles de sur susceptibles de faire partie d'un système orthogonal.*

Si $\rho = F(x, y, z)$ est l'équation de la famille de surfaces, on regardera z comme une fonction des variables indépendantes x, y, ρ; par ce moyen, M. Levy fait disparaître trois des six dérivées du troisième ordre que l'équation en question renferme, et il énonce une règle très-simple qui permet d'écrire immédiatement la nouvelle équation, en prenant l'équation connue de la projection des lignes de courbure sur le plan des xy.

N° 25. Séance du 22 décembre 1873.

Lucas (F.). — *Rapport anharmonique de quatre points du plan.*

L'application de l'Algèbre des imaginaires à la Géométrie est déjà fort ancienne; sans parler de la représentation géométrique des imaginaires, dont l'idée a été développée par Argand (1806), Mourey (1828), Gauss (1831), nous rappellerons que M. Bellavitis a donné, dans les *Annales de Mathématiques* de Fusinieri, cette proposition très-générale : « A toute relation entre des points en ligne droite correspond une relation analogue entre un même nombre de points situés sur un plan. » Dans deux Mémoires insérés au *Journal de Crelle*, en 1856, Möbius étudie les propriétés du double rapport formé avec quatre segments pris parmi ceux qui unissent deux à deux quatre points situés d'une manière quelconque sur un plan, en faisant correspondre les segments aux formes imaginaires de l'Algèbre.

Citons encore les Mémoires de Siebeck (*Journal de Borchardt*, 1858), de M. Transon (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1868), de M. Beltrami (*Ricerche sulla Geometria delle forme binarie cubiche*, extrait du tome IX des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Bologne*, 1870), où l'on donne les propriétés du rapport anharmonique complexe, des involutions complexes, etc.

Jordan (C.). — *Sur les polynômes bilinéaires.*

Soit un polynôme bilinéaire

$$P = \sum A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta, \quad \text{où} \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n; \quad \beta = 1, 2, \ldots, n,$$

qu'on se propose de ramener à la forme (dite *canonique*)

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_m y_m, \quad \text{où} \quad m \overline{\lessdot} n.$$

M. Jordan donne la solution des trois questions suivantes :

1° Ramener un polynôme bilinéaire P à une forme canon simple, par des substitutions *orthogonales*, opérées les unes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les autres sur $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

2° Ramener P à une forme canonique simple par des subst tions linéaires quelconques, mais opérées *simultanément* sur l et sur les y.

3° Ramener simultanément à une forme canonique deux p nômes P et Q, par des substitutions linéaires quelconques, rées *isolément* sur chacune des deux séries de variables.

Le second problème a déjà été traité par M. Kronecker (*Mo bericht*, 15 octobre 1866), et le troisième par M. Weierst (*Ibid.*, 18 mai 1868.)

Vicaire (E.). — *Sur la constitution physique du Soleil. Rép aux articles de* M. Faye.

N° 26. Séance du 29 décembre 1873.

Puiseux (V.). — *Sur la formation des équations de cond qui résulteront des observations du passage de Vénus du 8 cembre* 1874.

Chaque observation du passage de Vénus conduira à une é tion de condition entre les diverses inconnues de la questic pourra contribuer, par conséquent, à la détermination de c connues, dont la plus importante est la valeur moyenne de l rallaxe solaire. Pour faciliter la formation de ces équations exige des calculs assez laborieux, M. Puiseux a construit de bles, d'où l'on peut tirer commodément les nombres qui do entrer dans ces équations ; ces Tables terminent la Note actı

Boussinesq (J.). — *Essai théorique sur l'équilibre d'élas des massifs pulvérulents et sur la poussée des terres san hésion.*

Genocchi (A.). — *Observations relatives à une Note pı dente de* M. Menabrea, *concernant la série de Lagrange.*

M. Genocchi fait remarquer que la transformation dont M. nabrea se sert a été employée, il y a plus de vingt-cinq ans, pa lix Chiò, et il ajoute qu'un second Mémoire de Félix Chiò (t des *Savants étrangers*) contient, outre des calculs et des é

tions identiques à ceux de M. Menabrea, plusieurs propositions très-remarquables, pour déterminer les cas dans lesquels la règle de Lagrange doit s'accorder avec celle de Cauchy.

T. LXXVIII, 1874. 1er semestre.

N° 1. Séance du 5 janvier 1874.

LEDIEU (A.). — *Interprétation mécanique des lois de Dulong et Petit et de Wœstyn sur les chaleurs spécifiques atomiques. Observations présentées à propos des dernières Communications de* MM. LOCKYER, DUMAS *et* BERTHELOT, *relatives à la nature des éléments des corps.*

PAINVIN (L.). — *Recherche des conditions pour qu'une conique ait, avec une courbe donnée, un contact d'ordre déterminé.*

REYE (Th.). — *Réponse aux remarques de* M. FAYE *sur les trombes terrestres et solaires.*

N° 2. Séance du 12 janvier 1874.

LE VERRIER. — *Tables du mouvement de Jupiter, fondées sur la comparaison de la théorie avec les observations.*

SIACCI (F.). — *Sur le Problème des trois Corps.*

L'auteur présente une méthode, au moyen de laquelle on peut toujours avoir plusieurs systèmes canoniques de huit équations, dont chacun réduit, par conséquent, à sept le nombre des intégrations à faire, en tenant compte de l'intégrale des forces vives.

LUCAS (F.). — *Propriétés géométriques des fractions rationnelles.*

Le point de départ des recherches de l'auteur est l'équation

$$\frac{f(z)}{F(z)}=\lambda,$$

qui détermine ce qu'on a nommé une *involution complexe* (Beltrami, etc.); il en déduit plusieurs propriétés relatives aux courbes, qu'il appelle *cyclides.*

PÉPIN (le P.). — *Théorèmes d'Analyse indéterminée.*

Les théorèmes énoncés concernent l'équation indétermin

$$ax^4 + by^4 = z^2.$$

N° 3. Séance du 19 janvier 1874.

Resal (H.). — *Sur la théorie des chocs.*

Anciennement on concluait, de l'assimilation des corps tement élastiques à de véritables ressorts, que la somme tesses normales extrêmes au point de contact, dans le choc corps, était égale au double de la vitesse pareille, dans l'hy où les corps seraient complétement dénués d'élasticité. M montre que cette règle se vérifie dans toutes les circonstan peut présenter le choc de deux corps élastiques, lorsqu' abstraction du frottement, en résolvant complétement le pr considéré à son point de vue le plus général.

Lucas (F.). — *Propriétés géométriques des fractions nelles.* (Suite.)

Fouret. — *Détermination, à l'aide du principe de corr dance, du nombre des solutions d'un système de n équati gébriques à n inconnues.*

N° 4. Séance du 26 janvier 1874.

Ledieu (A.). — *Démonstration directe de l'équation*

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

pour tout cycle fermé et réversible.

Morin (le général). — *Sur l'enseignement de la Méca appliquée donné par Poncelet.*

Le général Morin, en retraçant la vie de Poncelet et l' rique de ses recherches dans le domaine de la Mécanique appli désire appeler l'attention de l'Académie sur l'ensemble des tr si originaux de ce célèbre géomètre sur ce sujet, et provoq publication de la partie des œuvres qui s'y rapporte.

Lucas (F.). — *Propriétés géométriques des fractions ra nelles.* (Suite.)

Voici quelques-unes des propositions énoncées par l'auteur :

« Si tous les points racines d'une équation algébrique forment les sommets d'un polygone convexe, les points racines de l'équation dérivée sont tous situés à l'intérieur de ce polygone.

» Si tous les points racines d'une équation algébrique sont disposés en ligne droite, cette droite contient aussi les racines de l'équation dérivée. »

ZEUTHEN (G.). — *Détermination des nombres plückériens des enveloppes.*

LAGUERRE. — *Sur la théorie des équations numériques.*

M. Laguerre énonce les propositions suivantes, qui sont remarquables :

« 1° Étant donné un cercle quelconque, contenant tous les points racines de l'équation $f(x, y) = 0$, et étant pris un point quelconque ξ en dehors de ce cercle, toutes les racines d'une quelconque des équations

$$\left(\xi \frac{d}{dx} + \eta \frac{d}{dy}\right)^i f = 0,$$

que l'on obtient en égalant à zéro un émanant de l'équation proposée, sont également contenues dans l'intérieur du cercle.

» 2° Si deux points du plan, ξ, ξ', satisfont à la relation

$$\xi' \frac{df}{d\xi} + \eta' \frac{df}{d\eta} = 0,$$

tout cercle mené par ces deux points contient au moins un point racine; il y a, en outre, au moins un point racine à l'extérieur de ce cercle. »

N° 5. Séance du 2 février 1874.

LEDIEU (A.). — *Démonstration directe de l'équation*

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

pour tout cycle fermé et réversible. (Suite et fin.)

ZEUTHEN (G.). — *Détermination des nombres plückériens des enveloppes.* (Suite.)

Ce second article a pour objet la démonstration des for
qui servent à déterminer le nombre des points cuspidaux et des tangentes d'inflexion de l'enveloppe d'un système donné.

FLAMMARION. — *Orbite apparente et période de révoluti l'étoile double ζ d'Hercule.*

M. Flammarion conclut de la comparaison de toutes les ob tions que la période de révolution est de $34^{ans},57$.

N° 6. **Séance du 9 février 1874.**

MORIN (le général). — *Étude expérimentale sur la bali intérieure.*

TISSERAND (F.). — *Observations faites à l'Observatoi Toulouse. — Observation de l'aurore boréale du 4 février à Toulouse.*

MATHIEU (É.). — *Mémoire sur le Problème des trois Cor*

Cette Note a principalement pour objet de démontrer di ment que deux combinaisons des équations des aires sont r mées dans les huit équations canoniques que l'auteur avait do dans le Mémoire présenté dans la séance du 10 novembre 18

LUCAS (F.). — *Théorèmes concernant les équations briques.*

Supposant un point quelconque P du plan affecté d'une égale à l'unité et repoussant un autre point Q en raison inve la distance PQ, l'auteur appelle *action algébrique* de P su force ainsi engendrée, et il énonce les théorèmes suivants :

« Les actions algébriques exercées par les racines (M) équation sur une racine I de sa dérivée se font équilibre.

» La résultante des actions algébriques exercées sur une d cines (M) d'une équation par toutes les autres racines équiv la résultante des actions algébriques exercées sur cette mêm cine par toutes celles de l'équation dérivée. »

GENOCCHI (A.). — *Sur l'impossibilité de quelques ég doubles.*

PAINVIN (L.). — *Conditions pour qu'une conique ait, une courbe d'ordre quelconque, un contact du cinquième or*

LAGUERRE. — *Sur les normales abaissées d'un point donné sur une surface de second ordre.*

N° 7. Séance du 16 février 1874.

CLAUSIUS (R.). — *Sur une équation mécanique qui correspond à l'équation*

$$\int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Les équations que M. Clausius rappelle sont celles qu'il a données dans deux Mémoires publiés en 1870 et 1873. (*Annales de Poggendorff*, t. CXLII et CL.)

TRESCA. — *Rapport sur un Mémoire de* M. MAREY, *concernant le point d'appui de l'aile sur l'air* (dans le vol des insectes et des oiseaux).

JOURJON. — *Sur une transformation de la formule de Taylor.*
La transformation indiquée par l'auteur résulte de l'identité

$$f(x+h) - f(x) = f\left[\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}\right] - f\left[\left(x + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2}\right].$$

N° 8. Séance du 23 février 1874.

RESAL (H.). — *Du mouvement ondulatoire d'un train de wagons dû à un choc.*

Supposant le train placé sur une voie droite et les centres de gravité des véhicules situés dans un même plan vertical, M. Resal admet que la percussion a lieu dans ce plan, que l'action mutuelle entre deux véhicules est proportionnelle à leur déplacement relatif et que les résistances pendant le mouvement sont proportionnelles à la masse; il intègre alors et discute les équations du mouvement.

LEDIEU (A.). — *Observations à propos de la dernière Communication de M. Clausius sur l'équation*

$$\int \frac{dQ}{T} = 0.$$

LAGUERRE. — *Sur les droites qui sont doublement tangentes*

à la surface lieu des centres de courbure d'une surface du sec ordre.

Dans sa première Note (séance du 9 février), M. Laguerre pelle d'abord le théorème suivant, dû à M. Desboves (*Théorie velle des normales aux surfaces du second ordre*) :

Si une conique située sur une surface (S) *du second o est telle que les normales à* (S) *issues de trois de ses points se pent en un même point, il y aura de même une infinité d'au groupes analogues de trois normales à* (S), *et les normales à rencontrent une même droite* Δ.

Une droite Δ jouit donc de cette propriété, que le lieu des des normales, menées de chacun des points de la droite à la face (S), se décompose en deux coniques.

L'auteur signale plusieurs propriétés relatives à ces dro celle-ci entre autres :

Toutes les droites Δ *sont doublement tangentes à la surfac lieu des centres de courbure de la surface* (S).

Ces diverses propositions sont, pour la plupart, déduites de tions analogues à celles qui ont été données par Joachimsthal

Dans sa seconde Note, M. Laguerre revient sur cette der proposition et la conclut, à l'aide de considérations géométriq de plusieurs théorèmes généraux démontrés d'abord pour des faces d'ordre quelconque.

N° 9. Séance du 2 mars 1874.

Chasles. — *Considérations sur le caractère propre du p cipe de correspondance.*

Voici en quels termes M. Chasles caractérise ce principe :

« Le principe de correspondance s'applique, avec une très-gr facilité, à une infinité de questions. Cette facilité est telle, sans qu'on ait besoin d'exprimer, par aucune équation, comm Analyse, les conditions de la question, on pose sur-le-champ nombres qui satisfont à ces conditions, et dont la simple so exprime la solution. Toutefois il peut se trouver dans ce rés

(¹) *Journal de Crelle*, t. 53.

des solutions étrangères qu'il faut élaguer.... A cet égard, les courbes unicursales ont un très-utile privilége....

» Le principe de correspondance a encore un autre caractère, qui doit accroître considérablement l'étendue des résultats qui lui seront dus : c'est que, en l'appliquant à une question des plus simples, on reconnaît immédiatement que le raisonnement sera absolument le même dans le cas de la plus grande généralisation que peut admettre la question....

» Enfin j'ajouterai que le principe de correspondance comporte une telle facilité de solution que, quelle que soit la question qu'on s'est proposée, indépendamment de la généralisation dont je viens de parler, on a tout aussitôt la pensée d'appliquer ce mode de solution spontanée à diverses autres questions relatives à la figure qu'on a sous les yeux.... »

M. Chasles apporte de nombreux exemples à l'appui de ses assertions. Nous citerons le théorème suivant, généralisation d'une propriété bien connue des coniques :

Le lieu d'un point d'où l'on peut mener à quatre courbes, de classes n', n'', n''', n^{iv}, quatre tangentes faisant entre elles un rapport anharmonique donné, est une courbe de l'ordre $2n'$, n'', n''', n^{iv}.

FAYE. — *Sur le mouvement descendant des trombes solaires et terrestres, et sur la formation de leurs gaînes opaques.* Réponse à M. le Dr Reye.

SECCHI (le P.). — *Observations des protubérances solaires pendant le dernier trimestre de l'année 1873. Résultats fournis par l'emploi des réseaux, au lieu de prismes, dans les observations spectrales des protubérances.*

JORDAN (C.). — *Sur la réduction des formes bilinéaires.*

Cette Note est une réponse à une critique de M. Kronecker, relative au Mémoire de M. Jordan *Sur la réduction des formes bilinéaires,* Mémoire inséré dans le *Journal de Liouville,* 1873.

THOULET (J.). — *Projection gnomonique de la surface terrestre sur un octaèdre et sur un cube circonscrit à la sphère.*

MANNHEIM (A.). — *Démonstration géométrique de quelques*

théorèmes, au moyen de la considération d'une rotation in ment petite.

Les propriétés établies concernent principalement les norn aux surfaces de second ordre; M. Mannheim retrouve ainsi sieurs des théorèmes énoncés par M. Laguerre (Séance du 2 vrier).

Flammarion (C.). — *Orbite apparente et période de ré tion de l'étoile double η de la Couronne.*

La durée de la révolution serait de $40^{ans},17$.

N° 10. Séance du 9 mars 1874.

Resal (H.). — *Note sur la théorie de la houle.*

Phillips. — *Note sur un nouveau spiral réglant des chron tres et des montres.*

Hatt (Ph.). — *Sur une disposition particulière du micro à fils mobiles, proposée pour les lunettes qui serviront à l'o vation du passage de Vénus sur le Soleil.*

Bertin (E.). — *Nouvelle Note sur les vagues de hauteur vitesse variables.*

N° 11. Séance du 16 mars 1874.

Resal (H.). — *Note sur l'emploi des lames flexibles p tracé d'arcs de cercle d'un grand diamètre.*

L'appareil ingénieux présenté par M. Resal permet de très-exactement des arcs de cercle de 2 mètres de diamètre; d'une construction fort simple et repose sur le principe sui si une lame élastique est encastrée dans deux pièces, mobile lonté autour de deux axes variables, les encastrements, en de la symétrie, ne donnent lieu qu'à deux couples de sen traire, lorsqu'on fait tourner ces encastrements d'un même le profil de la lame sera un arc de cercle.

Secchi (le P.). — *Recherches expérimentales conduisant détermination de la température du Soleil.*

Beaumont (Élie de). — *Rapport sur les travaux géod relatifs à la nouvelle détermination de la méridienne de F*

fait au nom d'une Commission formée des Membres des Sections de Géométrie, d'Astronomie, de Géographie et Navigation et des Membres composant le Bureau.

Cet important Rapport comprend treize pages des *Comptes rendus*.

JORDAN (C.). — *Sur une application de la théorie des substitutions aux équations différentielles linéaires.*

La question qui constitue l'objet principal de ce Mémoire est la suivante :

Les substitutions qui s'opèrent sur les intégrales autour de chaque point critique étant supposées connues, s'assurer si le groupe dérivé de ces substitutions est primaire ou non.

LAGUERRE. — *Sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie plane.*

Pour appliquer la théorie des formes binaires à l'étude des courbes, M. Laguerre considère ce qu'il nomme l'*équation mixte* de la courbe, notion qu'il a déjà présentée dans un Mémoire inséré dans le *Journal de Liouville;* il en a été rendu compte au *Bulletin* (1872, t. III, p. 379). L'auteur se propose principalement, dans le Mémoire actuel, de déterminer les équations mixtes des courbes que l'on obtient en égalant à zéro les divers covariants de l'équation mixte d'une courbe donnée.

BOUSSINESQ (J.). — *Sur les lois de la distribution plane des pressions à l'intérieur des corps isotropes dans l'état d'équilibre limite.*

N° 12. Séance du 23 mars 1874.

BOUSSINESQ (J.). — *Sur la distribution plane des pressions à l'intérieur des corps isotropes, dans l'état d'équilibre limite. Mode d'intégration des équations différentielles.*

VICAIRE (E.). — *Sur la loi de l'attraction astronomique, sur les masses des divers corps du système solaire, et en particulier sur la masse et sur la durée du Soleil.*

L'auteur pense que la proportionnalité de l'attraction aux masses n'est pas une vérité démontrée, et que, comme hypothèse, elle n'est pas vérifiée par ses conséquences.

Fouret. — *Sur les systèmes de courbes planes, algébriqu transcendantes, définies par deux caractéristiques.*

L'auteur considère les systèmes généraux définis par une é tion algébrique, entière et rationnelle, entre les quantités

$$x, y, \quad \text{et} \quad \alpha, \beta, \quad \left(\alpha = \frac{dy}{dx}, \beta = y - x\frac{dy}{dx}\right);$$

les caractéristiques μ et ν de ce système seront les degrés resp de cette équation par rapport à α et β, et par rapport à x M. Fouret énonce plusieurs théorèmes généraux relatifs à ce: tèmes.

Painvin (L.). — *Condition explicite pour qu'une coniqu un contact du cinquième ordre avec une courbe donnée.*

Les Notes présentées sur ce sujet, dans les séances des 5 ja 9 février et 23 mars, résument les résultats principaux d'u moire qui comprend les trois Parties suivantes : dans la pre Partie, on donne l'équation explicite des $2m - 3$ sécante gnant les points d'intersection d'une conique osculatrice ave courbe d'ordre m au point d'osculation; la deuxième Partie ferme l'interprétation géométrique de la condition qui ex que la conique a un contact du cinquième ordre; la troisième tie donne la forme explicite de cette équation de condition e application à une courbe particulière du quatrième ordre.

Mannheim (A.). — *Deux théorèmes nouveaux sur la surfa l'onde.*

L'auteur conclut des théorèmes qu'il énonce la déterminati la courbe de contact des plans tangents doubles de la surfa ondes, et les sections circulaires des cônes tangents aux point bles de cette même surface.

Rayet (G.). — *Sur un cadran solaire grec trouvé* M. O. Rayet, *à Héraclée du Latmos.*

N° 13. Séance du 30 mars 1874.

Picart (A.). — *Sur l'intégration des équations aux dé partielles du second ordre.*

Voici la méthode indiquée par M. Picart : si n est le nomb

dérivées de l'ordre le plus élevé de l'équation proposée, nous associons à cette équation $n-1$ autres équations renfermant chacune une constante arbitraire, et telles que les valeurs de ces dérivées, tirées des n équations, rendent *intégrable* le système d'équations aux différentielles totales, qui lie la fonction et ses dérivées successives. L'intégration de ce système donne une intégrale complète, de laquelle on cherche à déduire ensuite l'intégrale générale.

ZENGER (Ch.). — *Sur une méthode d'agrandissement photographique pour les observations astronomiques.*

LAUSSEDAT. — *Sur l'emploi des signaux lumineux dans les opérations géodésiques.*

MONTHLY NOTICES OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON (¹).

T. XXXIII; novembre 1872 à février 1873.

MARTH (A.). — *Liste des coordonnées de la Voie lactée.*

M. Marth, astronome de M. Newall, croit que le travail le plus utile auquel puisse être employé un grand équatorial ($0^{m},63$ d'ouverture) est de construire, dans une station dont le climat soit favorable (Malte, Ténériffe ou Madère), une Carte de la Voie lactée comprenant toutes les étoiles et toutes les nébuleuses visibles dans cette région du ciel. C'est, en effet, répondre à un pressant appel, adressé, en 1844, par Argelander aux astronomes possesseurs d'instruments puissants, et continuer l'œuvre entreprise dans notre hémisphère par MM. Heiss et Schmidt.

M. Marth publie aujourd'hui, comme travail préparatoire de cette Carte, comme base d'un premier canevas, la liste des coordonnées de toutes les étoiles de l'*Uranometria nova* d'Argelander, jusqu'à la 6ᵉ grandeur, comprises dans la zone centrale de la Voie lactée.

PROCTOR (R.-A.). — *Les régions nébuleuses voisines de la Vierge et de la Chevelure de Bérénice.*

(¹) Voir *Bulletin*, t. III, p. 245.

faussaient les résultats; par exemple, des mesures différentes faites entre la ville du Cap (*Cape Town*) et *Klyp Fountain*, on a déduit les trois résultats suivants :

Amplitude.	Longueur en pieds.	Longueur pour 1 degré.
1°.13′.17″,33	445506	364728,8
1.13.17,33	445361	364607,5
1.13.14,51	445027	364568,3

Le premier a été donné par Lacaille; le second résulte de la combinaison des triangles de Lacaille avec les bases modernes, et le troisième provient des mesures astronomiques et géodésiques modernes. M. Maclear n'explique nulle part d'où peuvent provenir ces différences. Il y a, dans l'Ouvrage de M. Maclear, malgré toute sa valeur, quelques imperfections, que M. Todhunter signale à l'attention de l'auteur.

Toutes ces questions ont de l'intérêt pour ceux qui s'occupent de la détermination de la forme de la Terre; et c'est précisément à propos d'un Ouvrage de ce genre ([1]), que M. Todhunter vient de publier, qu'il a été conduit à faire de la triangulation du Cap une étude si approfondie.

LINDSAY (Lord) et GILL (A.). — *Préparatifs pour l'observation du passage de Vénus.*

Nous les indiquerons plus en détail, lorsqu'il sera question des travaux faits à l'Observatoire de Dun-Echt en 1872. Nous insisterons seulement sur les observations que lord Lindsay et son astronome veulent faire avec l'héliomètre, instrument qui, à leur avis, a été trop délaissé par les astronomes que la Société Royale et le Gouvernement ont chargés de diriger et de surveiller les préparatifs des expéditions subventionnées par le Gouvernement et la Société Royale Astronomique.

Les deux échelles qui font mouvoir les demi-lentilles de l'objectif de leur héliomètre ont été graduées avec la même machine à diviser, qu'on faisait, dans chaque cas, marcher dans le même sens; puis, l'une d'elles ayant été retournée bout pour bout, il s'ensuit nécessairement que, lorsque les deux moitiés de l'objectif se dépla-

([1]) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 276.

égal à

$$0'',050 \times \frac{8,9}{28,2} = 0'',016,$$

c'est-à-dire moindre que *deux centièmes de seconde*. Les mesures photographiques ou les observations des contacts donneront-elles la même approximation ? Lord Lindsay ne le pense pas.

AUWERS. — *Expéditions allemandes pour le passage de Vénus.*

Trois expéditions principales seront envoyées par la Société Astronomique allemande et le Gouvernement impérial : dans le voisinage de Chefoo, en Chine ; à l'île Auckland ; à l'île Macdonald, ou, si le séjour dans cette île présente des difficultés trop considérables, à l'île Kerguelen.

Ces trois expéditions porteront surtout leur attention sur les points suivants :

1° Mesures héliométriques de la distance de Vénus au point du bord du Soleil le plus voisin, ainsi qu'au plus éloigné, pendant toute la durée du passage ;

2° Observation de l'époque du premier et du dernier contact ;

3° Photographies du phénomène, d'où l'on puisse déduire l'angle de position et la distance de Vénus par rapport au centre du Soleil.

En outre, une quatrième expédition, envoyée dans l'île Maurice, sera chargée de mesures héliométriques et de l'observation des contacts ; et une cinquième, purement photographique, sera envoyée en Perse.

Outre les instruments nécessaires pour déterminer le temps du lieu et quelques petites lunettes, les appareils emportés par les différentes expéditions sont :

1° Quatre héliomètres de Fraunhofer, de 8 centimètres d'ouverture et de $1^m,14$ de foyer ;

2° Quatre équatoriaux de Fraunhofer, de 12 centimètres d'ouverture et de $1^m,95$ de foyer ;

3° Deux appareils photographiques de Steinheil, ayant un objectif achromatique de 15 centimètres d'ouverture ;

4° Deux appareils photographiques de Steinheil, munis d'objectifs quadruples de 11 centimètres d'ouverture.

Les stations dont les longitudes encore inconnues doivent être

ment dans une direction différente, déductions qui semblent s'accorder avec l'observation. Toutes les comètes dont l'aphélie est près de l'orbite de Jupiter avancent; un nombre considérable de celles dont l'aphélie est près de l'orbite de Neptune rétrogradent.

Enfin il est évident, d'après cette théorie, que l'un ou l'autre des nœuds de chacune de ces comètes doit être tout près de l'orbite de la planète dont elle dérive. Or, maintenant, les nœuds de toutes les comètes joviennes et neptuniennes, aussi bien que des comètes saturniennes et uraniennes (comète de Tempel), sont près des orbites de leurs planètes génératrices.

HIND. — *Sur deux anciennes apparitions probables de la comète des météores de novembre.*

M. Hind remarque que la comète observée en Chine dans la dernière semaine d'octobre 1366 a une orbite très-semblable à celle de la comète de Tempel, et qu'à la même époque on a vu, en Bohême et en Portugal, une véritable averse d'étoiles filantes. « Elles étaient en nombre tel et si serrées, que le ciel paraissait en feu. »

A la fin de janvier et dans les premiers jours de février 868, on a également observé, en Europe et en Chine, une comète dont la marche dans le ciel fut voisine de celle que devait alors avoir la comète des météores de novembre.

Or, entre 1866 et 1366, il y a quinze périodes de $33^{ans},28$, et, entre 1366 et 868, quinze périodes de $33^{ans},24$. Il est donc presque certain que la comète de Tempel a dû être observée en 868 et 1366. Depuis cette époque, la durée de sa révolution n'aurait même que très-peu changé.

HIND. — *Sur la comète de Pons.* (Comète I, 1818.)

CARRINGTON (R.-C.). — *Sur la marche d'une pendule dans l'air raréfié.*

LYNN (W.-T.). — *Sur la parallaxe et le mouvement propre de l'étoile* 21185 *de Lalande.*

Les observations les plus récentes conduisent aux valeurs suivantes :

Mouvement en ascension droite..	$-0^s,044$
Mouvement en déclinaison......	$+4'',66$

qui s'accordent avec les valeurs obtenues par Argelander en 1857.

C'est, après 1830 Groombridge et la 61e du Cygne, l'éto
le mouvement propre le plus considérable; sa parallax
d'ailleurs, être, à très-peu près, la même que celle de l
Cygne.

Browning (J.). — *Sur une nouvelle forme de l'ocul laire.*

Russell (C.-W.). — *Sur l'amas coloré qui entoure l de la Croix du Sud.*

Depuis les observations faites par sir John Herschel a Bonne-Espérance, aucun observatoire de l'hémisphère a repris l'étude de l'amas voisin de la Croix du Sud. M. R recteur de l'Observatoire de Sydney, à la Nouvelle-Galle a consacré quelques mois de l'année 1872 à combler cett

L'instrument dont il se servait est un équatorial de $7\frac{1}{4}$ pouces d'ouverture libre et de 10 pieds 4 pouces de fo vant supporter un grossissement de 400 fois. Les couleur en outre, vérifiées avec un télescope de Browning de 8 d'ouverture.

M. Russell a déterminé les positions de 130 étoiles, de 15e grandeur; 15 d'entre elles sont colorées soit en jaun l'étoile $\varkappa$, soit en rouge, soit en bleu; 25 de ces étoiles point été aperçues par Herschel, et c'est là un fait rem lorsqu'on songe aux dimensions du télescope que cet astro ployait. D'un autre côté, la comparaison des étoiles comm le catalogue d'Herschel montre que beaucoup d'entre elle déplacées depuis 1834; quant aux couleurs, elles sont ré splendides et justifient ce mot d'Herschel, que cet am « comme un splendide joyau ».

Wilson (J.-M.). — *Sur les positions des deux étoiles de*

Herschel (A.-S.), Grant, Lowe (E.-J.), Rosse (lor sel (V.). — *Sur l'averse météorique du 27 novembre 18*

Nous résumons sous ce titre les Notes présentées à la Royale Astronomique sur les observations faites à Ne Glasgow, Nottingham, Birr-Castle, et Morges (en Suisse). l général du phénomène n'a pas été différent de celui qu'a p la grande averse du 13-14 novembre 1866; cependant les m ont été moins brillants. Leur couleur normale était la

blanche; rarement ils ont égalé en éclat une étoile de première grandeur; cependant de temps à autre paraissait un météore de splendeur inaccoutumée et dont l'éclat rivalisait avec celui de Jupiter ou de Sirius.

La durée de la visibilité d'un météore n'excéda point, en général, deux ou trois secondes; deux ou trois d'entre eux, pourtant, sont restés visibles pendant une trentaine de secondes.

L'ensemble de ces observations porte à admettre que le point radiant de cette averse était à peu près au milieu de l'intervalle qui sépare sur la sphère céleste les étoiles γ et 51 d'Andromède, c'est-à-dire par 26 degrés d'ascension droite et 44 degrés de déclinaison nord. Le nombre des météores tombés dans cette averse est d'ailleurs excessivement considérable. M. Grant, à Glasgow, en a compté 10579, de $5^h 30^m$ à $11^h 50^m$ du soir; M. Lowe, à Nottingham, en a observé, 14665, de $5^h 50^m$ à $10^h 30^m$, dans un quart environ de la portion visible de la sphère céleste, ce qui ferait le chiffre énorme de 58660 en tout pendant les $4^h 30^m$ qui commencèrent la nuit du 27 novembre; à Birr-Castle, enfin, on en a vu 7995, de $7^h 47^m$ à $14^h 38^m$.

D'un autre côté, l'intensité de l'averse fut loin d'être constante pendant toute sa durée; mais, d'abord croissante pendant la première moitié du phénomène, elle a décru ensuite d'une façon régulière; c'est ce que montre le tableau suivant, où sont inscrits les nombres de météores observés à Glasgow pendant chaque période de quinze minutes, à partir de $5^h 30^m$.

Numéro du quart d'heure.	Nombre de météores.	Numéro du quart d'heure.	Nombre de météores.
1.........	150	13........	599
2.........	174	14..	413
3.........	292	15........	418
4.........	507	16........	213
5.........	643	17........	233
6.........	840	18........	246
7.........	721	19........	190
8.........	890	20........	116
9.........	881	21........	111
10.........	930	22..	74
11.........	1070	23........	48
12.........	777	24........	22

HIND. — *Éléments de l'orbite de ξ de la Grande-Ourse.*

Passage au périastre	1875,687	
Durée de la révolution en années	60,679	
Longitude du périastre, comptée sur l'orbite à partir du nœud	332°33′	1872
Nœud	100,42	1872
Inclinaison	56,20	
Excentricité	0,38302	
Demi-grand axe	2″,587	

LYNN (W.-T.). — *Sur le mouvement propre des étoiles* 21258 *de Lalande et* 1830 *Groombridge.*

Le mouvement propre de la petite étoile 21258 de Lalande (8e grandeur) a été signalé par Argelander (¹) et évalué par lui, d'après ses observations de Bonn, à 4″, 5. Cette découverte a été confirmée par les observations faites à l'Observatoire royal de Greenwich, en 1864 et 1869, observations qui, comparées les unes aux autres, conduisent aux valeurs suivantes :

Mouvement propre en asc. droite	−0s, 386
Mouvement propre en distance polaire nord	−1″, 36

D'un autre côté, sa parallaxe a été déterminée par Auwers, et trouvée égale à 0″, 27; cette étoile se trouve donc 761 000 fois plus loin de nous que le Soleil; en d'autres termes, il faut environ douze ans à la lumière qu'elle émet pour arriver jusqu'à la Terre.

Ces résultats ont engagé M. Lynn à reprendre l'étude du mouvement propre de l'étoile 1830 Groombridge : les observations de Greenwich lui ont aussi fourni les éléments de son calcul, et la comparaison des positions données par le Catalogue de douze ans (*Twelve years Catalogue,* 1845) avec les observations récentes de 1869, 1870 et 1871 lui a donné :

Mouvement propre en asc. droite	+0s, 344
Mouvement propre en distance polaire nord	+5″, 77

Ces nombres équivalent à un mouvement de 7″, 03, sur un arc de grand cercle. C'est de beaucoup le mouvement propre le plus considé-

(¹) *Astronomische Nachrichten;* vol. LIV, p. 245.

rable que nous connaissions; celui de cinq étoiles seulement passe la moitié de ce nombre : ce sont les mouvements propr 61 Cygne, 21185 de Lalande, 21258 de Lalande, μ Cassiop o^2 Eridan.

Ajoutons qu'on n'a encore fait, à notre connaissance, au recherche sur la parallaxe de ces deux dernières étoiles.

Elger (C.-E.). — *Sur les couleurs des composant γ Dauphin.*

Ces observations ont été faites à Bedford avec une lunette a matique de Cooke, de 4 pouces d'ouverture, munie d'un oc grossissant 180 fois, et embrassent une période de six ans tembre 1866 à novembre 1872). En 1850, Smyth, à Hartwell trouvé les deux composantes de grandeurs inégales (dans le r de 4 à 7) elles ont paru d'égale grandeur à M. Elger; d'ail l'une d'elles, la plus brillante de Smyth, est toujours res couleur orange, tandis que la couleur de l'autre a passé du ja vert, puis au bleu.

Tupman (le Capitaine). — *Observations des protubé solaires.*

Dans cette Note, M. Tupman, capitaine d'artillerie de la M royale, donne les résultats de 246 observations de protubé faites par lui en septembre, octobre et novembre 1872, av lunette de 3 pouces d'ouverture et 40 pouces de foyer, et un troscope à vision directe de Browning, composé de cinq prism dont le pouvoir dispersif équivalait à celui d'un prisme d ordinaire, d'angle réfringent égal à 60 degrés [1].

Carrington (R.-C.). — *Sur un double altazimut.*

Robinson (T.-R.). — *Note sur la marche d'une horloge nomique dans l'air raréfié.*

Denison (E.-B.). — *Sur un nouveau mode de compensati l'erreur barométrique des horloges astronomiques.*

La construction des instruments méridiens a été depuis que années portée à un haut degré de perfection et ceux de ces

---

[1] Le prix total de l'appareil spectroscopique et de sa monture est de 1l (450 francs); M. Tupman croit qu'on pourrait le réduire encore beaucoup.

reils qui sortent des ateliers des grands constructeurs de Londres, de Paris ou de Munich ne laissent presque plus rien à désirer sous le rapport de la perfection des tourillons ou du mécanisme des pièces mobiles. D'un autre côté, l'expérience a fait découvrir des procédés sûrs pour assurer aux piliers sur lesquels ils reposent une stabilité presque parfaite, ou, du moins, pour prévenir tous les changements brusques qu'ils pourraient éprouver. Si l'astronome opère avec adresse, il peut donc être sûr de connaître avec précision, à chaque instant, la position que sa lunette méridienne occupe par rapport au méridien terrestre.

La détermination de l'ascension droite des étoiles n'est plus alors sujette qu'à deux sortes d'erreurs : la première provenant de l'imperfection inévitable de l'estime de la fraction de seconde à laquelle elle passe sous un fil ; la seconde ayant son origine dans la marche plus ou moins régulière de la pendule employée pour compter le temps.

Les causes qui peuvent troubler la marche régulière d'une pendule sont nombreuses : la plus sensible est l'action de la température sur la tige du balancier, qui alternativement s'allonge ou se raccourcit, et fait retarder ou avancer la pendule. On sait combien il est rare d'avoir des horloges insensibles aux variations du thermomètre ; mais cette action perturbatrice peut être complétement annulée si l'on a soin, comme à Greenwich ou à Paris, de placer les pendules dans une cave profonde, dont la température soit constante, ou du moins indépendante des changements diurnes ou accidentels de la température de l'air extérieur.

La seconde cause d'erreur, bien plus difficile à éliminer, provient des variations dans la pression atmosphérique. Un pendule qui oscille dans l'air éprouve de sa part deux sortes d'actions : il y a d'abord une perte de poids égale au poids de l'air déplacé, et si la pression et, par suite, la densité de l'air viennent à changer, la perte de poids change et la pesanteur du pendule se trouve augmentée ou diminuée, sans que pour cela son moment d'inertie ait le moins du monde varié ; par suite de cette circonstance, les pendules doivent avancer lorsque le baromètre baisse, retarder lorsqu'il monte ; en second lieu, le pendule en mouvement rencontre dans l'air une résistance proportionnelle à la pression ; si cette résistance augmente, l'amplitude d'oscillation devient plus petite, la durée d'une oscillation diminue, et l'horloge doit avancer.

Ces deux causes perturbatrices ne se compensent point, et l
pendule éprouve dans sa marche des perturbations qui sont
par une loi complexe aux variations du baromètre.

Pour supprimer cette cause d'erreur, les astronomes ont de
longtemps songé à placer les pendules dans le vide ou dans de
à pression constante.

Des expériences de cet ordre avaient été faites en 1829 et 1
par Sabine et Baily, et viennent d'être reprises par M. Carrin
qui a montré que son horloge retardait lorsque la pression de
augmentait.

M. Denison, un des grands horlogers de Londres, revient s
résultat et décrit un système propre à compenser l'influen
l'action de l'air. L'appareil consiste essentiellement en un baro
à mercure fixé sur le balancier; lorsque la pression de l'air augm
cas ou la pendule doit retarder, sa masse se rapproche de l'axe
cillation et, la longueur du balancier se trouvant ainsi diminu
pendule tend à marcher plus vite; de là la possibilité d'une
pensation dont le célèbre artiste donne des preuves théoriqu
expérimentales.

KLINKERFUES et POGSON. — *Sur la nouvelle découverte d
comète de Biéla.*

Le 30 novembre 1872, M. Klinkerfues envoyait à M. Po
directeur de l'Observatoire de Madras, un télégramme ainsi co
« La comète de Biéla a rencontré la Terre le 27 novembre;
chez vers l'étoile θ du Centaure. »

Les nuages empêchèrent toutes recherches jusqu'au 2 déce
à 17 heures, temps moyen, où survint une légère éclai
M. Pogson trouva immédiatement la comète, non loin de la po
indiquée par M. Klinkerfues; elle se présentait, dit-il, sous la f
« d'un disque lumineux, circulaire, avec un noyau bien caract
mais sans apparence de queue; son diamètre était d'env
45 secondes. » Le lendemain, M. Pogson rencontra, à peu de
tance de la première, une nouvelle nébulosité cométaire, do
diamètre était de 75 secondes, et qui présentait une queue de f
éclat, mais de 8 minutes de longueur environ.

TUPMAN. — *Sur la réapparition de*

L'ensemble des observations

27 novembre et sur la comète de Biéla elle-même, conduit M. Tupman aux conclusions suivantes :

1° L'averse météorique a été produite par une portion éloignée de la comète, détachée de l'un des deux noyaux du côté le plus éloigné du Soleil, et se mouvant à peu près sur le prolongement du même rayon vecteur.

2° La comète *principale* eut la même longitude que la Terre, le 27 novembre entre 3 et 4 heures, à une distance du Soleil moindre que la Terre d'environ les 0,032 de la distance moyenne de cette dernière : c'est elle que M. Pogson a retrouvée le 3 décembre.

3° La comète *secondaire* rencontra la Terre comme la première, mais douze heures plus tôt : c'est elle que M. Pogson a aperçue le 2 décembre.

Meldrum (C.). — *Observations de l'averse météorique du 27 novembre, faites à l'île Maurice.*

Cette Note résume les observations faites à l'île Maurice : par M. Meldrum à l'Observatoire ; MM. C. Bruce, recteur du collége, et E. Newton, secrétaire auxiliaire du gouvernement, au collége Royal ; le lieutenant-colonel O'Brien, inspecteur général de la police, M. A. Brown, MM. R. Stein et A. Macpherson, M. Morsch ; M. le capitaine Fry et M. le capitaine Gaston, commandant la frégate française *la Pénélope*, alors en station devant l'île Maurice.

Marth (A.). — *Éphéméride pour l'observation physique de la Lune.*

M. Marth, astronome de M. Newall, de Gateshead, publie une Éphéméride destinée à faciliter l'observation des différents cratères de la Lune. Il donne leurs positions aux époques où ils sont le mieux éclairés par le Soleil.

Airy (G.-B.). — *Occultations et phénomènes des satellites de Jupiter, observés à l'Observatoire royal de Greenwich, en 1872.*

Proctor (R.-A.). — *Carte représentant les terres et les mers de Mars, telles qu'on les verra de la Terre aux différentes époques de l'année 1873.*

Buffham (W.). — *Taches de la planète Uranus.*

[illegible] qu'ici distingué sur le disque de la [illegible] bien dessinée ou assez persis-

dépendant du symbole $E\sqrt[m]{\frac{n}{u}}$ est fondée sur la considération de diverses classes de nombres, telles que : 1° les nombres non décomposables en facteurs carrés; 2° les nombres non décomposables en facteurs cubes; en général les nombres n'admettant pas de facteurs de degré m. L'auteur considère en particulier les fonctions

$$H_1(n), \quad H_2(n), \ldots, \quad H_m(n),$$

qui représentent : la première, le nombre des nombres non divisibles par des carrés et inférieurs à n; la deuxième, celui des nombres non divisibles par des cubes, etc.; pour ces fonctions il donne des formules qui permettent de calculer leurs valeurs exactes et leurs valeurs asymptotiques.

Il trouve, entre autres, la valeur asymptotique de $H_1(n)$ égale à $\frac{6}{\pi^2}n$, c'est-à-dire la même qui a été trouvée par Lejeune-Dirichlet, à l'aide du Calcul des probabilités ([1]).

Dans la conclusion, il expose les principes généraux de la théorie des fonctions numériques. La différence qui existe entre celles-ci et les fonctions analytiques, consistant en ce qu'elles sont essentiellement discontinues, ainsi que leurs variables, ne permet pas de leur appliquer les méthodes générales de l'Analyse. L'étude de ces fonctions conduit à des principes nouveaux et variés, par suite de la variété même des modes de discontinuité. En effet, la continuité n'admet qu'une seule détermination, tandis que les hypothèses sur le mode de discontinuité peuvent être très-diverses. La continuité elle-même peut être envisagée comme un cas particulier de la discontinuité, lorsque les accroissements sont infiniment petits et infiniment rapprochés.

Les fonctions numériques peuvent être divisées en deux classes :

1° Les fonctions discontinues d'une variable continue, comme les fonctions dépendant du symbole E; elles ont beaucoup de points communs avec les fonctions analytiques, de sorte qu'on peut les appeler *semi-analytiques;*

([1]) Ce résultat a été communiqué par Lejeune-Dirichlet à M. Kummer, qui l'a, à son tour, communiqué à l'auteur.

2° Les fonctions qui varient, ainsi que leurs variables, par in
valles finis. On peut les ramener quelquefois à la première cl
par exemple en les groupant en nombre considérable. Ainsi la fc
tion $\rho(n)$, qui exprime le nombre de diviseurs de n, est d
deuxième classe, tandis que

$$\sigma(n) = \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=n} \rho(u) = \mathrm{E}\frac{n}{1} + \mathrm{E}\frac{n}{2} + \mathrm{E}\frac{n}{3} + \cdots$$

est de la première classe.

Oumof (N.-A.). — *Théorie des actions mutuelles à dista finie, et son application à la déduction des lois électrostatiqu électrodynamiques.* (43 p.)

Le but de ce travail est de ramener les phénomènes des acti
mutuelles de corps à distance aux phénomènes produits dans
milieux environnants. Sans faire aucune hypothèse particulière
la nature des milieux, l'auteur prend pour point de départ le pi
cipe de l'action égale à la réaction et le principe de la conserva
des forces vives exprimé par la formule

$$\sum \frac{mv^2}{2} + \Pi = \text{const.}$$

(Π étant l'énergie potentielle de Rankine, et le premier terme
nergie cinétique). Il appelle milieu *composé* celui dans lequel
avoir lieu la conversion de l'énergie cinétique en énergie potenti
et milieu *simple* celui dans lequel cette conversion n'a pas lie
établit les formules pour un milieu simple, et il explique di
phénomènes de l'électricité par l'interposition de ce milieu (éth
entre les corps électrisés.

Sloudskiï (J.-A.). — *Du mouvement libre d'un liquide.* (

Un liquide libre (non contenu dans un vase) peut se mouvoi
façon que ses molécules n'exercent aucune pression mutuelle
unes sur les autres. L'auteur établit les conditions d'un tel mo
ment, qu'il appelle *libre*, dans trois hypothèses sur les forces e
rieures.

Letnikof (A.-V.). — *Éclaircissement des principaux point*

la théorie de la différentiation avec un indice quelconque (à propos du Mémoire de M. Sonine [1]). (33 p.)

Dans son Mémoire intitulé : « Théorie de la différentiation avec » un indice quelconque [2] », M. Letnikof, en envisageant ce problème comme la recherche d'une formule d'interpolation pouvant reproduire les termes de la série

$$\ldots, \int^{(n)} f(x)\,dx^n, \ \ldots, \ \int f(x)\,dx, \ f(x), \ f'(x), \ldots, \ f^{(n)}(x), \ \ldots,$$

a été amené à considérer l'expression

$$(1) \qquad \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{\xi}{p} \frac{f(x-p\delta)}{\delta^\xi} \quad [3],$$

dont les valeurs limites sont, pour $\xi < 0$,

$$(2) \qquad \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_u^x (x-\alpha)^{-\xi-1} f(\alpha)\,d\alpha,$$

et, pour $\xi > 0$,

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=m} \frac{f^{(k)}(u)(x-u)^{-\xi+k}}{\Gamma(-\xi+k+1)} \\ \qquad\qquad + \displaystyle\frac{1}{\Gamma(-\xi+m+1)} \int_u^x (x-\alpha)^{-\xi+m} f^{(m+1)}(\alpha)\,d\alpha. \end{array} \right.$$

Ces deux expressions se réduisent en une seule, et représentent la formule cherchée, c'est-à-dire l'expression de $[D_x^\xi f(x)]_u^x$ pour ξ quelconque. M. Sonine a accusé d'inexactitude la première de ces formules, en s'appuyant sur ce que l'expression (1), ayant pour $\xi > 0$ son dénominateur infiniment petit, devient infinie. L'auteur fait remarquer qu'il n'en est pas ainsi, et il établit que le numérateur de (1) tend vers zéro comme le dénominateur, et que leur rapport a pour limite l'expression (3).

---

[1] Voir *Bulletin*, t. V, p. 292.

[2] *Математическій Сборникъ*, t. VI, p. 1; 1867.

[3] Le symbole $\binom{\xi}{p}$ désignant le coefficient du terme général de la puissance d'un binôme.

Il fait observer ensuite que la formule

$$(4) \qquad \frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{\Gamma(p+1)}{2\pi i} \int_\alpha^\alpha \frac{f(\alpha) d\alpha}{(\alpha - x)^{p+1}} + \frac{d^p(0)}{dx^p},$$

établie par M. Sonine, en faisant abstraction de la fonction co mentaire, se ramène, par un changement de variable, à la mule (3). M. Sonine a aperçu aussi cette transformation; mais l'a pas crue permise, à cause de la fonction complémentaire. l teur explique que la non-existence d'une fonction compléme dans la formule (3) est due à la considération des dérivées intégrales prises entre certaines limites, tandis que la formu renferme une intégrale fermée indéfinie.

Enfin l'auteur signale l'inexactitude d'une formule de M. So déduite de la formule (4); mais son appréciation nous obli d'entrer dans beaucoup plus de détails que ne le comporte l'ét de cet article.

Lioubimof (N.-A.). — *Réponse à M.* Bredikhine. (7 p.)

Bredikhine (F.-A.). — *Observations sur la réponse de M.* l bimof. (4 p.)

Andréief (K.-A.). — *Démonstration d'une propriété gén des polygones.* (9 p.)

Considérons une figure formée par l'intersection de n circ rences passant par un point; si le point commun s'éloigne à l' et que les rayons de circonférences deviennent infiniment gr la figure deviendra un polygone rectiligne de n côtés.

Les polygones qu'on obtient en combinant k à k les n côt polygone considéré s'appellent *polygones secondaires d'ord*

En considérant les polygones circulaires, il est facile de dé trer que :

1° Dans un quadrilatère, les quatre circonférences circons aux triangles secondaires passent par un point commun appelé *singulier* du quadrilatère;

2° Dans un pentagone, les points singuliers des six quadrila secondaires sont situés sur une même circonférence, dite *circo rence singulière* du pentagone.

En général, *dans un polygone de n côtés, pour n pair, les conférences singulières des polygones d'ordre n* — 1 *passent*

un même point, et pour n impair les points singuliers des polygones d'ordre n — 1 sont situés sur une même circonférence.

Ce théorème, établi indépendamment de la position du point commun des circonférences, est encore vrai pour le cas où ce point est à l'infini, c'est-à-dire pour les polygones rectilignes.

2e Partie.

ORLOF (J.-E.). — *Des machines.* (17 p.)

Leçon d'inauguration faite à la Faculté de Moscou, le 21 octobre 1872.

TSERASKIÏ (V.-K.). — *Passage de Vénus sur le disque solaire en 1874.*

Après avoir exposé l'historique des divers essais de détermination de la parallaxe solaire, l'auteur donne les époques des passages de Vénus (entrées et sorties) pour quarante et une localités principales de la Russie. A. P.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ANDRÉ (C.) et RAYET (G.). — L'Astronomie pratique et les Observatoires en Europe et en Amérique, depuis le milieu du XVIIe siècle jusqu'à nos jours. 1re Partie : Angleterre. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-18 jés. 180 p., 33 fig. dans le texte. 4 fr. 50

BOUSSINGAULT, membre de l'Institut. — Agronomie, Chimie agricole et Physiologie. 2e éd. revue et augmentée. T. V, 1874; 428 p., 1 pl. — Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

CAHOURS (A.). — Traité de Chimie générale élémentaire. *Chimie organique*. Leçons professées à l'École Polytechnique. 3e édition, t. I. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-12, 451 p. Ce tome I se vend séparément 6 fr.

La *Chimie organique* comprendra 3 volumes, dont le prix total est, pour les souscripteurs, de 15 fr.

DORMOY (É.). — Théorie mathématique des paris de courses. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. Gr. in-8, 103 p. 2 fr.

DUPUY (L.). — Exposition de la méthode de Hansen, relative au

calcul des perturbations des petites planètes. — Paris, Gauthi Villars, 1874. Gr. in-8, 230 p. 6

Durrande (H.). — Cours populaire de Mécanique. Cinématiq — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-4, lithogr. 101 p. 3

Finance (Ch.). — Arithmétique à l'usage des élèves des Éc normales primaires, des colléges, etc. Nouvelle édition. — Pa Gauthier-Villars, s. d. In-12., 390 p. 2 fr.

Lecoq de Boisbaudran. — Spectres lumineux. Spectres pris tiques et en longueurs d'ondes, destinés aux recherches Chimie minérale. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. 2 vol. in-8; 1 vol. de texte, et Atlas de 29 pl. 20

Le Verrier (U.-J.). — Annales de l'Observatoire de Paris. M moires, t. X, 1874. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-4, 3 67-37 p., 1 pl. 30

Recherches astronomiques (suite). *Chapitre* XVIII. Détermination actions mutuelles de Jupiter et de Saturne, pour servir de base aux théo des deux planètes. — Additions au Chapitre XVII. — C. Wolf et C. And Recherches sur les apparences singulières qui ont souvent accompagné l' servation des contacts de Mercure et de Vénus avec le bord du Soleil.

Mastaing (L. de). — Cours de Mécanique appliquée à la résista des matériaux. Leçons professées à l'Ecole centrale des Arts Manufactures; rédigées par M. *G. Courtès-Lapeyrat*. — Pa J. Dejey et C[ie], 1874. Gr. in-8, 352 p., 2 pl. 15

Moncel (Th. du). — Détermination des éléments de constructi des électro-aimants, suivant les applications auxquelles on v les soumettre. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. Gr. in-8, 39 1 fr.

Moock (L.). — Traité pratique complet d'impression photog phique aux encres grasses. — Paris, Gauthier-Villars, 18 In-18, 140 p. 3

Normand (J.-A.). — Note sur la détermination de la parallaxe s laire. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. In-8, 10 p. 1

Recueil de Mémoires, Rapports et Documents relatifs à l'Obser tion du passage de Vénus sur le Soleil. (Formant le tome X des *Mémoires de l'Académie des Sciences*). — Paris, Firm Didot et Ganthiers-Villars, 1874. In-4, 460 p., 5 pl. 12 fr.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME VI. — JANVIER-JUIN 1874.

TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET JOURNAUX DONT LES ARTICL[ES] ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS LE BULLETIN.

MÉLANGES.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

TABLE GÉNÉRALE DES MÉMOIRES ET OUVRAG

CITÉS DANS CE VOLUME.

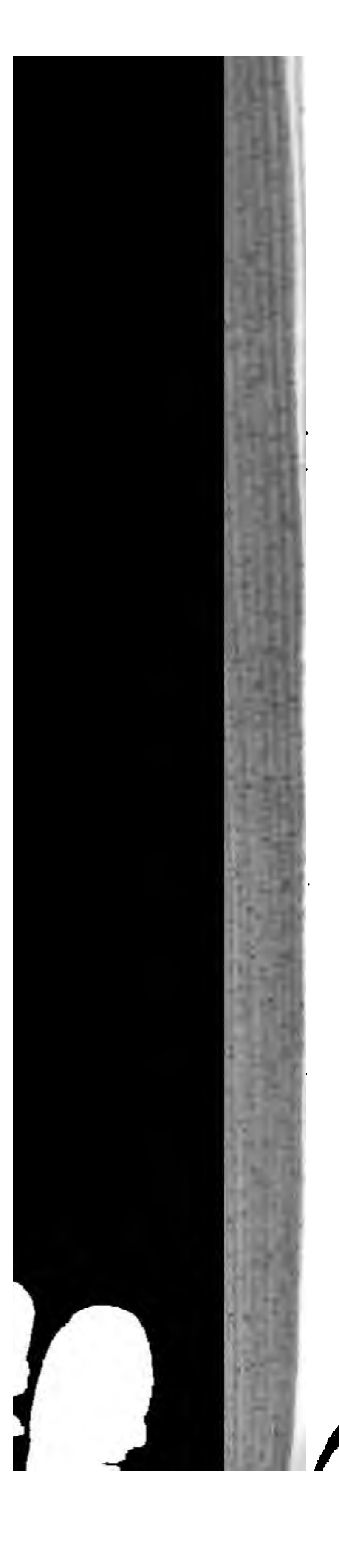




TABLE DES NOMS

PAR ORDRE DE M

HISTOIRE DES MATHÉMATIQU

ARITHMÉTIQUE. —

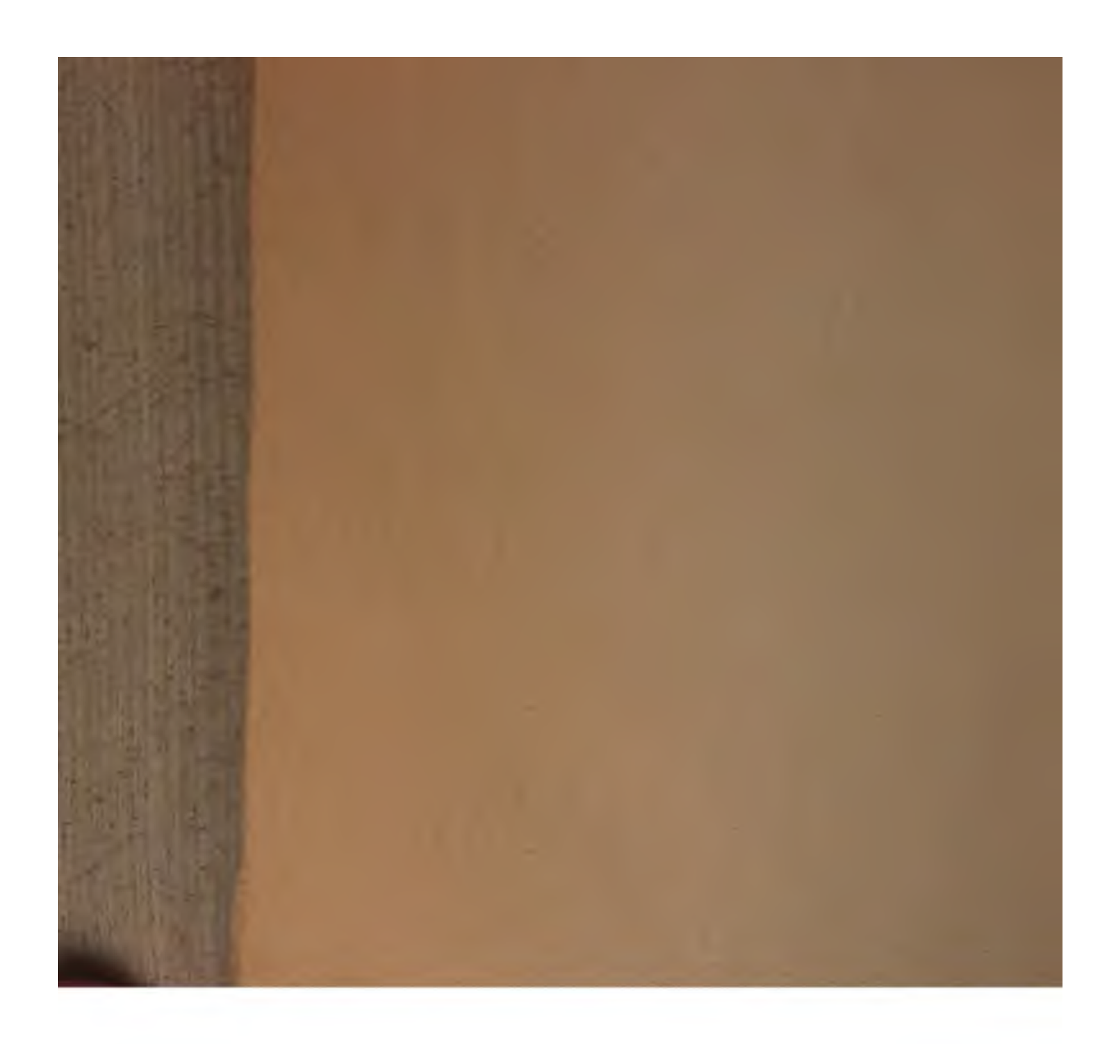


GÉOMÉTRIE.

MÉCANIQUE. — PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

FIN DU TOME SIXIÈME.

Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.






STORAGE AREA

